УДК 52

Я. М. КОСТЕЦКАЯ, канд. техн. наук
Львовский политехнический институт

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ НЕСВОБОДНЫХ РЯДОВ ТРИЛАТЕРАЦИИ

Точность положения пунктов в несвободных рядах трил терации характеризуют величины их среднеквадратических пр дольных и поперечных сдвигов, для получения которых бы определены их обратные веса попутно с уравниванием рассма риваемых рядов условным способом.

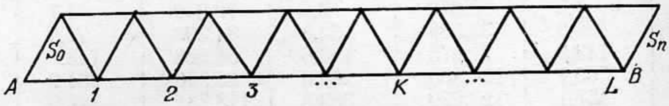

Рис. 1. Схема одинарного ряда трилатерации.

Определим сдвиги K-й точки диагонали AB одинарного р да трилатерации, построенного из равносторонних треуголь ков (рис. 1). Их весовые функции, выраженные через измере ные стороны, получены в работе [1]. Запишем на их основан выражения квадратических членов весовых функций продол ного и поперечного сдвигов:

$$[f_u f_u] = K; \quad (1) \qquad [f_t f_t] = \frac{K}{9}(8K^2 - 3K + 13), \quad (2)$$

где f_u — коэффициенты весовой функции продольного сдви K-й точки; f_t — коэффициенты весовой функции поперечно сдвига той же точки; K — номер точки, или число сторон ди гонали AB, отделяющей оцениваемую точку от начала сети.

Примем, что стороны s_0 и s_{2L} ряда имеют жесткие дире ционные углы. Тогда в рассматриваемом ряде трилатерац возникнет одно условное уравнение дирекционных углов, кот рое после перехода от поправок в углы к поправкам в измере ные стороны приведено в работе [2]. Чтобы упростить выч ления, умножим его на $\frac{\sqrt{3}a}{\rho}$, где a — длина стороны треугол ника в сети. Квадратический член этого уравнения после умн жения будет равен

$$[\alpha\alpha] = 2(4L + 1). \quad (3)$$

Здесь L — число сторон, из которых состоит диагональ AB и номер ее последней точки.

Обратный вес функции уравненных элементов в рассмат ваемой сети

$$\frac{1}{P} = [ff] - \frac{[\alpha f]^2}{[\alpha\alpha]}. \quad (4)$$

Суммируя произведения коэффициентов при поправках в одни и те же стороны условного уравнения и весовой функции, соответственно получаем для продольного и поперечного сдвигов:

$$[\alpha f_u] = -2K; \quad (5) \qquad [\alpha f_t] = \frac{1}{\sqrt{3}}(4K^2 - K - 2). \qquad (6)$$

Подставив в (4) значения квадратического и неквадратического членов соответствующей весовой функции и равенства (3), получим формулы обратных весов сдвигов:

$$\frac{1}{P_u} = K - \frac{2K^2}{4L+1}; \qquad (7)$$

$$\frac{1}{P_t} = \frac{K}{9}(8K^2 - 3K + 13) - \frac{(4K^2 - K - 2)}{6(4L+1)}. \qquad (8)$$

Среднеквадратические сдвиги K-й точки диагонали AB ряда трилатерации с жесткими дирекционными углами крайних сторон можно определить по формулам:

$$m_u = \mu \sqrt{K - \frac{2K^2}{4L+1}}; \qquad (7')$$

$$m_t = \mu \sqrt{\frac{K}{9}(8K^2 - 3K + 13) - \frac{(4K^2 - K - 2)}{6(4L+1)}}, \qquad (8')$$

где μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса. Поскольку рассматриваемая сеть построена из равносторонних треугольников, принято, что все стороны равноточны и вес их равен единице.

Предположим, что точки ряда A и B жесткие. Причем возникают два условных уравнения координат — продольного и поперечного сдвигов, а обратный вес функции уравненных сторон в алгоритмах Гаусса будет определяться выражением

$$\frac{1}{P} = [ff] - \frac{[uf]}{[uu]} - \frac{[tf \cdot I]^2}{[tt \cdot I]}. \qquad (9)$$

Условные уравнения сдвигов имеют такой же вид, как и их весовые функции для последней точки диагонали, т. е. при $K=L$. Чтобы коэффициенты условного уравнения поперечного сдвига были целыми числами, умножим его на $\sqrt{3}$. Квадратические коэффициенты этих условных уравнений:

$$[uu] = L; \; [tt] = \frac{L}{3}(8L^2 - 3L + 13),$$

а их неквадратический член $[ut] = -L^2$.

Преобразованный квадратический член условного уравнения поперечного сдвига

$$[tt\cdot 1] = [tt] - \frac{[ut]^3}{[uu]} = \frac{L}{3}(5L^2 - 3L + 13).$$

Неквадратические члены весовых функций продольного и поперечного сдвигов K-й точки, входящие в уравнение (9):

$$[uf_u] = K;\ [tf_u\cdot 1] = K(K - L);\ [uf_t] = -\frac{K^2}{3},$$

$$[tf_t\cdot 1] = \frac{1}{3\sqrt{3}}[3L(3K^2 - K - 2) - K(4K^2 - 19)].$$

Подставим в уравнение (9) их и соответствующие квадратические коэффициенты. Тогда:

$$\frac{1}{P_u} = K - \frac{K^2}{L} - \frac{3K^2(K - L)}{(5L^2 - 3L + 13)} =$$

$$= K - \frac{K^2}{L}\cdot\frac{2L^2 - 3L(2K - 1) - 3K^2 - 13}{5L^2 - 3L - 13}; \qquad (10)$$

$$\frac{1}{P_t} = \frac{K}{9}(8K^2 - 3K + 13) - \frac{K^4}{3L} -$$

$$-\frac{[3L(3K^2 - K - 2) - K(4K^2 - 19)]^2}{9L(5L^2 - 3L - 13)}. \qquad (11)$$

Средние квадратические продольные и поперечные сдвиги можно определить по формуле

$$m = \pm\mu\sqrt{\frac{1}{P}}.$$

Далее оценим точность ряда, в котором жесткими являются азимуты конечных сторон и пункты А и В. Поскольку в таком одинарном ряде трилатерации возникают три условных уравнения (дирекционных углов, продольного и поперечного сдвигов), то обратный вес функции уравненных сторон в алгоритмах Гаусса имеет вид

$$\frac{1}{P} = [ff] - \frac{[\alpha f]^2}{[\alpha\alpha]} - \frac{[uf\cdot 1]^2}{[uu\cdot 1]} - \frac{[tf\cdot 2]^2}{[tt\cdot 2]}. \qquad (12)$$

Определим сначала значения знаменателей в дробях обратного веса. Напомним, что условные уравнения сдвигов имеют такой же вид, как и весовые функции их точки $K=L$, только коэффициенты условного уравнения поперечного сдвига увеличены по сравнению с весовой функцией в $\sqrt{3}$ раз. Значение первого знаменателя получено в уравнении (3). Второй знаменатель

$$[uu\cdot 1] = [uu] - \frac{[\alpha u]^2}{[\alpha\alpha]} = L - \frac{4L^2}{2(4L+1)} = \frac{L(2L+1)}{4L+1}.$$

Третий знаменатель

$$[tt\cdot 2] = [tt] - \frac{[\alpha t]^2}{[\alpha\alpha]} - \frac{[ut\cdot 1]^2}{[uu\cdot 1]} = \frac{L}{3}(8L^2-3L+13) -$$

$$- \frac{(4L^2-L-2)^2}{2(4L+1)} - \frac{4L^2(L^2+2L+1)}{L(2L+1)(4L+1)} \approx$$

$$\approx 0{,}667\,L^3 + 0{,}5\,L^2 + 5{,}3\,L + 0{,}25.$$

Числители в дробях формулы (12) для весовой функции продольного сдвига имеют следующие значения:

$$[\alpha f_u] = -2K;\ [uf_u\cdot 1] = K - \frac{(-2K)(-2L)}{2(4L+1)} = \frac{K(2L+1)}{4L+1};$$

$$[tf_u\cdot 2] = K(K-2L) - \frac{(4L^2-L-2)(-2K)}{2(4L-1)} -$$

$$- \frac{\left[-L^2 - \frac{L(4L^2-L-2)}{4L+1}\right]\frac{K(2L+1)}{4L+1}}{\frac{L(2L+1)}{4L+1}} = K(K-L).$$

Подставив в уравнение (12) значения числителей, знаменателей и квадратического члена функции продольного сдвига K-й точки, получим формулу для определения обратного веса продольного сдвига

$$\frac{1}{P_u} = K - \frac{2K^2}{4L+1} - \frac{K^2(2L+1)}{L(4L+1)} - \frac{K^2(K-L)^2}{0{,}667\,L^3-0{,}5\,L^2-5{,}33\,L-0{,}25} \approx$$

$$\approx K - \frac{K^2}{L}\left(1 - \frac{(K-L)^2}{0{,}667\,L^2 - 0{,}5\,L + 5{,}33}\right). \qquad (13)$$

Формулы (13) — приближенные. Нестрогость первой формулы заключается в использовании приближенного значения $[tt\cdot 2]$. При $L=10$ точное значение $[tt\cdot 2]$ равно 768,477, а значение, определенное по приближенной формуле, 768,5. Поэтому можно считать, что первая формула дает точное значение обратного веса продольного сдвига. Для упрощения этой формулы примем $\frac{2K^2}{4L+1} \approx \frac{K^2}{2L}$, $\frac{2L+1}{4L-1} \approx \frac{1}{2}$ и отбросим 0,25 в знаменателе третьей дроби.

Числители в обратном весе поперечного сдвига имеют следующие значения:

$$[\alpha f_t] = \frac{1}{\sqrt{3}}(4K^2 - K - 2); \quad [uf_t \cdot 1] = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{K^2 + LK + 2L}{4L + 1};$$

$$[tf_t \cdot 2] = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[L(K-2) + 6K + \frac{K}{3}(2K-1)(6L - 2K - 1) -$$

$$- \frac{2(L+1)(K^2 + LK + 2L)}{(4L+1)(2L+1)} - \frac{(4L^2 - L - 2)(4K^2 - K - 2)}{2(4L+1)}\Big] \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{K}{3}(19 - K^2) + (4K^2 - K - 2)(0{,}5L + 0{,}25)\right].$$

Подставив полученные значения и уравнение (2) в формулу (12), получим

$$\frac{1}{P_t} = \frac{K}{9}(8K^2 - 3K + 13) -$$

$$- \frac{(4K^2 - K - 2)^2}{6(4L+1)} - \frac{(K^2 + LK + 2L)^2}{3L(2L+1)(4L+1)} -$$

$$- \frac{\left[\frac{K}{3}(19 - 4K^2) + (4K^2 - K - 2)(0{,}5L + 0{,}25)\right]^2}{2L^3 + 1{,}5L^2 + 16L + 0{,}75}. \qquad (14)$$

Если вычислять поперечные сдвиги для точек с номерами $K \leqslant L/2$, то в формуле (14) можно пренебрегать третьим членом, который при $K = L/2$ равен примерно $L/30$.

Выполним в соответствии с описанной выше методикой оценку точности положения точек жестких строенных рядов трилатерации (рис. 2). Сначала предположим, что конечные стороны s_0 и s_{2L} среднего ряда имеют жесткие дирекционные углы. В такой сети возникает $2N$ условных уравнений центральных систем и одно условное уравнение дирекционных углов. Здесь N — число центральных систем в одном сдвоенном ряде сети. Обратный вес функции уравненных сторон

$$\frac{1}{P_{(\alpha)}} = [ff] - \sum_{i=1}^{2N} A_i - \frac{[\alpha f \cdot 2N]^2}{[\alpha\alpha \cdot 2N]}, \qquad (15)$$

где $A_i = \dfrac{[a_i f(i-1)]^2}{[a_i a_i (i-1)]}$ — величина, вносимая в обратный вес i-м условным уравнением с коэффициентами a_i. Однако

$$[ff] - \sum_{i=1}^{2N} A_i = \frac{1}{P_{\text{св. с}}},$$

поэтому формулу (15) запишем так:

$$\frac{1}{P_{(\alpha)}} = \frac{1}{P_{\text{св.с}}} - \frac{[\alpha f\cdot 2N]^2}{[\alpha\alpha\cdot 2N]}. \qquad (15')$$

Преобразованный квадратический член условного уравнения дирекционных углов выведен в работе [2]. Подставив в него $N=L-1$, получим

$$[\alpha\alpha\cdot 2N] = 0{,}8\,L - 9{,}85.$$

Выражение, имеющееся в числителе формулы (15),

$$[\alpha f\cdot 2N] = [\alpha f] - \sum_{i=1}^{2N}\frac{[a_i\,\alpha\,(i-1)][a_i\,f\,(i-1)]}{[a_i\,a_i\,(i-1)]}. \qquad (16)$$

Определим обратный вес продольного сдвига K-й точки. Формула для него в свободной сети получена в работе [1]. Чтобы получить $[\alpha f_u\cdot 2]$, сложим i-ю величину с $(N+i)$-й под

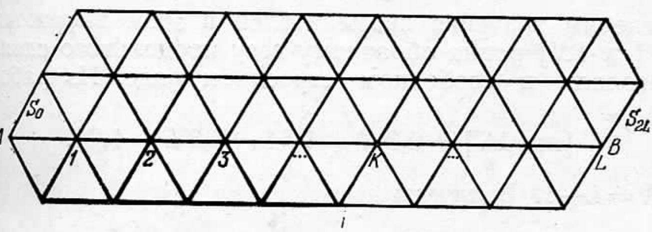

Рис. 2. Схема строенного ряда трилатерации.

знаком суммы в формуле (16). Таким образом, получен ряд из N членов, в котором $K-4$ члена постоянны и равны $-1{,}8$. Сумма оставшихся членов равна -6. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{2N}\frac{[a_i\alpha\,(i-1)][a_i f_u\,(i-1)]}{[a_i a_i\,(i-1)]} = -\,[1{,}8\,(K-4)+6] = -\,1{,}8\,K - 1{,}2.$$

Подставим в (16) $[\alpha f] = -2K$ и значение полученной выше суммы. Тогда $[\alpha f_u\cdot 2N] = -\,2K + 1{,}8\,K - 1{,}2 = -\,(0{,}2\,K + 1{,}2)$. Используем это значение неквадратического члена весовой функции, квадратического члена условного уравнения и $1/P_{u(\text{св}\cdot\text{с})}$ из работы [1] для определения обратного веса продольного сдвига K-й точки диагонали АВ строенного ряда с жесткими дирекционными углами двух крайних сторон

$$\frac{1}{P_{u\,(\alpha)}} = 0{,}3\,K + 0{,}94 - \frac{(0{,}2\,K+1{,}2)^2}{0{,}8\,L+9{,}85}. \qquad (17)$$

Значение суммы в формуле (16) для функции поперечного сдвига можно определить исходя из того, что основная часть величин $[a_i f_t(i-1)]$ представляет арифметическую прогресси [4]. Воспользовавшись этим, получим

$$[\alpha f_t\cdot 2N]=\frac{1}{3}[0{,}4K(K+11{,}8)-2{,}35].$$

Используя значение $1/P_{t(\text{св}\cdot\text{с})}$ из работы [4], $[\alpha f_t\cdot 2N]$ $[\alpha\alpha\cdot 2N]$, можем записать:

$$\frac{1}{P_{t(\alpha)}}=0{,}0882K^3+1{,}6K^2-0{,}6K+0{,}7-\frac{[0{,}4K(K+11{,}8)-2{,}35]^2}{3(0{,}8L+9{,}85)} \quad (18$$

Перейдем к оценке точности строенного ряда, в которо точки А и В жесткие. В такой сети обратный вес функции урав ненных величин

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{P_{\text{св. с}}}-\frac{[uf\cdot 2N]^2}{[uu\cdot 2N]}-\frac{[tf(2N+1)]^2}{[tt(2N+1)]}. \quad (19$$

Определим значения знаменателей в этом выражении. Ве личина $[uu\cdot 2N]$ равна обратному весу продольного сдвига кон ца диагонали в свободном строенном ряде. Из работы [3 имеем

$$[uu\cdot 2N]=0{,}3N+1{,}54=0{,}3L+1{,}24. \quad (20$$

Здесь $N=L-1$. Величина

$$[tt\cdot(2N+1)]=[tt\cdot 2N]-\frac{[ut\cdot 2N]^2}{[uu\cdot 2N]},$$

а $[tt\cdot 2N]=3\cdot\dfrac{1}{P_{t(\text{св. с})}}$ для конечной точки диагонали, т. е. пр $K=L$. Здесь коэффициент 3 введен для того, чтобы коэфф циенты условного уравнения были целыми числами (уравне ние было умножено на $\sqrt{3}$). Таким же путем, как $[\alpha f_t\cdot 2N]$, по лучаем

$$[ut\cdot 2N]=-0{,}1L^2-1{,}133L-0{,}608 \text{ и } \frac{[ut\cdot 2N]^2}{[uu\cdot 2N]}=$$

$$=\frac{(0{,}1L^2+1{,}133L+0{,}608)}{0{,}3L+1{,}24}=0{,}03333L^3+0{,}6177L^2+$$

$$+2{,}131L-4{,}216-\frac{5{,}598}{0{,}3L+1{,}24}.$$

Преобразованный квадратический член условного уравнени поперечного сдвига

$$[tt(2N+1)]=0{,}2311L^3+4{,}1851L^2-3{,}835L+4{,}92+\frac{5{,}6}{0{,}3L+1{,}2}. \quad (2$$

Последним членом можно пренебречь, поскольку даже в небольших сетях (при $L=10$) он оказывается немногим больше 1.

Выражения в числителе формулы (19) для функции продольного сдвига:

$$[uf_u \cdot 2N] = 0{,}3\,K + 0{,}65;\ [tf_u \cdot (2N+1)] = \\ = 0{,}1\,K\,(K - L + 6{,}65) - 0{,}927\,L + 1{,}267, \tag{22}$$

Подставив выражения (20), (21) и (22) в формулу (19), получим значение обратного веса продольного сдвига K-й точки строенного ряда трилатерации с двумя жесткими точками

$$\frac{1}{P_{u\,(u,\,t)}} = 0{,}3\,K + 0{,}94 - \frac{(0{,}3\,K + 0{,}65)^2}{0{,}3\,L + 1{,}24} - \\ - \frac{[0{,}1\,K\,(K - L + 6{,}65) - 0{,}927\,L + 1{,}27]^2}{0{,}2311\,L^3 + 4{,}185\,L^2 - 3{,}835\,L + 4{,}92}. \tag{23}$$

Для весовой функции поперечного сдвига таким же путем определим

$$[uf_t \cdot 2N] = \frac{1}{\sqrt{3}}\,0{,}1\,K\,(K + 11{,}67);\ [tf_t \cdot (2N+1)] = \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0{,}356\,L\,(K^2 + 11{,}955\,K - 9{,}133) - \\ - 0{,}2\,K\,(1{,}828 + K + 0{,}6612\,K^2) + 1{,}56$$

и обратный вес поперечного сдвига

$$\frac{1}{P_{t(u,t)}} = 0{,}0882\,K^3 + 1{,}6\,K^2 - 0{,}6\,K + 0{,}7 - \frac{[0{,}1\,K\,(K + 11{,}67)]^2}{3\,(0{,}3\,L + 1{,}24)} - \\ - \frac{[0{,}356\,L\,(K^2 + 11{,}955K - 9{,}133) - 0{,}2\,K\,(0{,}6612\,K^2 + K + 1{,}828) + 1{,}56]^2}{0{,}6933\,L^3 + 12{,}555\,L^2 - 11{,}505\,L + 14{,}76}. \tag{24}$$

С помощью аналогичных приемов получены формулы для обратных весов продольного и поперечного сдвигов K-й точки диагонали АВ строенного ряда трилатерации, в котором имеются жесткие дирекционные углы крайних сторон среднего ряда и жесткие точки А и В:

$$\frac{1}{P_{u\,(\alpha,\,u,\,t)}} = 0{,}3\,K + 0{,}94 - \frac{(0{,}2\,K + 1{,}2)^2}{0{,}8\,L + 9{,}85} - \frac{(0{,}25K + 0{,}35)^2}{0{,}25\,L + 0{,}70} - \\ - \frac{\left[0{,}1\,K\,(K - L - 1{,}81) - 0{,}544\,L - 1{,}017 + 1{,}65\,\dfrac{K}{L}\right]^2}{0{,}06445\,L^3 + 2{,}55\,L^2 + 0{,}6\,L + 1{,}6}; \tag{25}$$

Результаты проверки формул для сдвигов точек строенного ряда трилатерации

Вид сети	Способ определения сдвигов	Номер точки (*K*)							
		1	4	8	13	18	22	25	26
Свободный строенный ряд	По схеме / По схеме	0,95/1,35	1,46/5,49	1,83/12,02	2,20/21,40	2,52/31,99	2,75/41,22	2,91/48,64	3,01/51,18
Ряд между двумя жесткими дирекционными углами	По схеме	0,92/1,31	1,41/4,92	1,76/10,38	2,09/16,80	2,37/23,04	2,56/27,34	2,66/30,29	2,68/30,99
	По формуле (17) / По формуле (18)	1,08/1,32	1,42/4,90	1,76/10,16	2,09/16,83	2,36/23,10	2,57/27,47	2,68/30,17	2,72/30,93
Ряд между двумя жесткими точками	По схеме	0,86/1,23	1,28/3,95	1,47/6,58	1,55/8,35	1,48/7,47	1,26/4,85	0,87/1,56	—/—
	По формуле (23) / По формуле (24)	1,07/1,30	1,28/3,94	1,46/6,73	1,55/8,35	1,48/6,73	1,30/3,94	1,04/1,30	—/—
Ряд между двумя жесткими дирекционными углами и двумя жесткими точками	По схеме	0,85/1,22	1,26/3,83	1,42/5,81	1,48/7,44	1,40/6,26	1,19/4,03	0,84/1,13	—/—
	По формуле (25) / По формуле (26)	1,01/1,31	1,29/3,87	1,41/6,50	1,48/8,15	1,40/6,50	1,25/3,87	0,99/1,31	—/—

Примечание. В числителе приведены значения продольных сдвигов, а в знаменателе — поперечных.

$$\frac{1}{P_{u\,(a,\,u,\,t)}} = 0{,}0882K^3 + 1{,}6K^2 - 0{,}6K + 0{,}7 -$$

$$-\frac{[0{,}4K(K+11{,}8)-2{,}35]^2}{2{,}4L+29{,}55} - \frac{[0{,}2L(K^2+12{,}066K-10{,}874)+0{,}133K(14{,}51-K^2)+2{,}3]^2}{0{,}06445L^3+2{,}55L^2+0{,}6L+1{,}6}. \qquad (26)$$

Следует отметить, что формулы (24) и (26) дают правильные результаты при $K \leqslant \frac{L}{2}$, т. е. аргументом в них является число сторон, отделяющих оцениваемую точку от ближайшего края сети. Остальные формулы дают правильные результаты при любой нумерации точек.

В таблице приведены результаты проверки выведенных формул для строенного ряда. В ней имеются значения средних квадратических сдвигов точек $K=1$, 4, 8, 13, 18, 22, 25 и 26 диагонали AB строенного ряда с $N=25$, вычисленных по весам, определенным по выведенным формулам и полученным из решения схемы Гаусса. При вычислениях принято $\mu=\pm 1$ см. Из таблицы видно, что формулы для определения продольного сдвига в трех рассматриваемых случаях дают практически точные значения сдвигов. Только для точек, отделенных от края сети одной-двумя сторонами, погрешность формул достигает 20%. Погрешность формул для определения поперечного сдвига не превышает 12%.

В таблице приведены также значения сдвигов точек средней диагонали свободного строенного ряда. Сравнивая их со сдвигами в жестких сетях, можно сказать, что жесткие крайние точки вызывают более значительное уменьшение сдвигов, чем жесткие дирекционные углы крайних сторон и что в жестких сетях уменьшается разность между величинами продольных и поперечных сдвигов.

Список литературы: 1. *Костецкая Я. М.* Исследование закономерностей накопления погрешностей положения пунктов в сплошных сетях трилатерации. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, вып. 19. 2. *Костецкая Я. М.* Учет исходных дирекционных углов при оценке точности сетей трилатерации. — В сб.: 50 лет Ленинского декрета об учреждении высшего геодезического управления. Львов, Изд-во Львов. ун-та, 1970. 3. *Костецкая Я. М.* К вопросу оценки точности сплошных сетей трилатерации. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1967, вып. 6. 4. *Костецкая Я. М.* О поперечном сдвиге точек в сетях трилатерации. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1977, вып. 28.

Работа поступила 26 мая 1977 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.