УДК 528.35

Я. М. КОСТЕЦКАЯ, канд. техн. наук
Львовский политехнический институт

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ НЕСВОБОДНЫХ РЯДОВ ТРИЛАТЕРАЦИИ

Точность положения пунктов в несвободных рядах трилатерации характеризуют величины их среднеквадратических продольных и поперечных сдвигов, для получения которых были определены их обратные веса попутно с уравниванием рассматриваемых рядов условным способом.

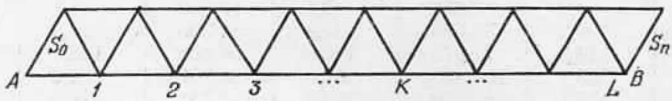

Рис. 1. Схема одинарного ряда трилатерации.

Определим сдвиги K-й точки диагонали AB одинарного ряда трилатерации, построенного из равносторонних треугольников (рис. 1). Их весовые функции, выраженные через измеренные стороны, получены в работе [1]. Запишем на их основании выражения квадратических членов весовых функций продольного и поперечного сдвигов:

$$[f_u f_u] = K; \quad (1) \qquad [f_t f_t] = \frac{K}{9}(8K^2 - 3K + 13), \tag{2}$$

где f_u — коэффициенты весовой функции продольного сдвига K-й точки; f_t — коэффициенты весовой функции поперечного сдвига той же точки; K — номер точки, или число сторон диагонали AB, отделяющей оцениваемую точку от начала сети.

Примем, что стороны s_0 и s_{2L} ряда имеют жесткие дирекционные углы. Тогда в рассматриваемом ряде трилатерации возникнет одно условное уравнение дирекционных углов, которое после перехода от поправок в углы к поправкам в измеренные стороны приведено в работе [2]. Чтобы упростить вычисления, умножим его на $\frac{\sqrt{3}a}{\rho}$, где a — длина стороны треугольника в сети. Квадратический член этого уравнения после умножения будет равен

$$[\alpha\alpha] = 2(4L+1). \tag{3}$$

Здесь L — число сторон, из которых состоит диагональ AB или номер ее последней точки.

Обратный вес функции уравненных элементов в рассматриваемой сети

$$\frac{1}{P} = [ff] - \frac{[\alpha f]^2}{[\alpha\alpha]}. \tag{4}$$

Суммируя произведения коэффициентов при поправках в одни и те же стороны условного уравнения и весовой функции, соответственно получаем для продольного и поперечного сдвигов:

$$[\alpha f_u] = -2K; \quad (5) \qquad [\alpha f_t] = \frac{1}{\sqrt{3}}(4K^2 - K - 2). \quad (6)$$

Подставив в (4) значения квадратического и неквадратического членов соответствующей весовой функции и равенства (3), получим формулы обратных весов сдвигов:

$$\frac{1}{P_u} = K - \frac{2K^2}{4L+1}; \quad (7)$$

$$\frac{1}{P_t} = \frac{K}{9}(8K^2 - 3K + 13) - \frac{(4K^2 - K - 2)}{6(4L+1)}. \quad (8)$$

Среднеквадратические сдвиги K-й точки диагонали AB ряда трилатерации с жесткими дирекционными углами крайних сторон можно определить по формулам:

$$m_u = \mu\sqrt{K - \frac{2K^2}{4L+1}}; \quad (7')$$

$$m_t = \mu\sqrt{\frac{K}{9}(8K^2 - 3K + 13) - \frac{(4K^2 - K - 2)}{6(4L+1)}}, \quad (8')$$

где μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса. Поскольку рассматриваемая сеть построена из равносторонних треугольников, принято, что все стороны равноточны и вес их равен единице.

Предположим, что точки ряда A и B жесткие. Причем возникают два условных уравнения координат — продольного и поперечного сдвигов, а обратный вес функции уравненных сторон в алгоритмах Гаусса будет определяться выражением

$$\frac{1}{P} = [ff] - \frac{[uf]}{[uu]} - \frac{[tf \cdot I]^2}{[tt \cdot I]}. \quad (9)$$

Условные уравнения сдвигов имеют такой же вид, как и их весовые функции для последней точки диагонали, т. е. при $K=L$. Чтобы коэффициенты условного уравнения поперечного сдвига были целыми числами, умножим его на $\sqrt{3}$. Квадратические коэффициенты этих условных уравнений:

$$[uu] = L; \; [tt] = \frac{L}{3}(8L^2 - 3L + 13),$$

а их неквадратический член $[ut] = -L^2$.

Преобразованный квадратический член условного уравнения поперечного сдвига

$$[tt\cdot 1] = [tt] - \frac{[ut]^3}{[uu]} = \frac{L}{3}(5L^2 - 3L + 13).$$

Неквадратические члены весовых функций продольного и поперечного сдвигов K-й точки, входящие в уравнение (9):

$$[uf_u] = K;\ [tf_u\cdot 1] = K(K-L);\ [uf_t] = -\frac{K^2}{3},$$

$$[tf_t\cdot 1] = \frac{1}{3\sqrt{3}}[3L(3K^2 - K - 2) - K(4K^2 - 19)].$$

Подставим в уравнение (9) их и соответствующие квадратические коэффициенты. Тогда:

$$\frac{1}{P_u} = K - \frac{K^2}{L} - \frac{3K^2(K-L)}{(5L^2 - 3L + 13)} =$$

$$= K - \frac{K^2}{L}\cdot\frac{2L^2 - 3L(2K-1) - 3K^2 - 13}{5L^2 - 3L - 13}; \qquad (10)$$

$$\frac{1}{P_t} = \frac{K}{9}(8K^2 - 3K + 13) - \frac{K^4}{3L} -$$

$$- \frac{[3L(3K^2 - K - 2) - K(4K^2 - 19)]^2}{9L(5L^2 - 3L - 13)}. \qquad (11)$$

Средние квадратические продольные и поперечные сдвиги можно определить по формуле

$$m = \pm\mu\sqrt{\frac{1}{P}}.$$

Далее оценим точность ряда, в котором жесткими являются азимуты конечных сторон и пункты А и В. Поскольку в таком одинарном ряде трилатерации возникают три условных уравнения (дирекционных углов, продольного и поперечного сдвигов), то обратный вес функции уравненных сторон в алгоритмах Гаусса имеет вид

$$\frac{1}{P} = [ff] - \frac{[\alpha f]^2}{[\alpha\alpha]} - \frac{[uf\cdot 1]^2}{[uu\cdot 1]} - \frac{[tf\cdot 2]^2}{[tt\cdot 2]}. \qquad (12)$$

Определим сначала значения знаменателей в дробях обратного веса. Напомним, что условные уравнения сдвигов имеют такой же вид, как и весовые функции их точки $K = L$, только коэффициенты условного уравнения поперечного сдвига увеличены по сравнению с весовой функцией в $\sqrt{3}$ раз. Значение первого знаменателя получено в уравнении (3). Второй знаменатель

$$[uu\cdot 1]=[uu]-\frac{[\alpha u]^2}{[\alpha\alpha]}=L-\frac{4L^2}{2(4L+1)}=\frac{L(2L+1)}{4L+1}.$$

Третий знаменатель

$$[tt\cdot 2]=[tt]-\frac{[\alpha t]^2}{[\alpha\alpha]}-\frac{[ut\cdot 1]^2}{[uu\cdot 1]}=\frac{L}{3}(8L^2-3L+13)-$$

$$-\frac{(4L^2-L-2)^2}{2(4L+1)}-\frac{4L^2(L^2+2L+1)}{L(2L+1)(4L+1)}\approx$$

$$\approx 0{,}667\,L^3+0{,}5\,L^2+5{,}3\,L+0{,}25.$$

Числители в дробях формулы (12) для весовой функции продольного сдвига имеют следующие значения:

$$[\alpha f_u]=-2K;\ [uf_u\cdot 1]=K-\frac{(-2K)(-2L)}{2(4L+1)}=\frac{K(2L+1)}{4L+1};$$

$$[tf_u\cdot 2]=K(K-2L)-\frac{(4L^2-L-2)(-2K)}{2(4L-1)}-$$

$$-\frac{\left[-L^2-\frac{L(4L^2-L-2)}{4L+1}\right]\frac{K(2L+1)}{4L+1}}{\frac{L(2L+1)}{4L+1}}=K(K-L).$$

Подставив в уравнение (12) значения числителей, знаменателей и квадратического члена функции продольного сдвига K-й точки, получим формулу для определения обратного веса продольного сдвига

$$\frac{1}{P_u}=K-\frac{2K^2}{4L+1}-\frac{K^2(2L+1)}{L(4L+1)}-\frac{K^2(K-L)^2}{0{,}667\,L^3-0{,}5\,L^2-5{,}33L-0{,}25}\approx$$

$$\approx K-\frac{K^2}{L}\left(1-\frac{(K-L)^2}{0{,}667\,L^2-0{,}5\,L+5{,}33}\right). \qquad (13)$$

Формулы (13) — приближенные. Нестрогость первой формулы заключается в использовании приближенного значения $[tt\cdot 2]$. При $L=10$ точное значение $[tt\cdot 2]$ равно 768,477, а значение, определенное по приближенной формуле, 768,5. Поэтому можно считать, что первая формула дает точное значение обратного веса продольного сдвига. Для упрощения этой формулы примем $\frac{2K^2}{4L+1}\approx\frac{K^2}{2L}$, $\frac{2L+1}{4L-1}\approx\frac{1}{2}$ и отбросим 0,25 в знаменателе третьей дроби.

Числители в обратном весе поперечного сдвига имеют следующие значения:

$$[\alpha f_t] = \frac{1}{\sqrt{3}}(4K^2 - K - 2);\quad [uf_t \cdot 1] = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{K^2 + LK + 2L}{4L + 1};$$

$$[tf_t \cdot 2] = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[L(K-2) + 6K + \frac{K}{3}(2K-1)(6L-2K-1) -$$

$$-\frac{2(L+1)(K^2+LK+2L)}{(4L+1)(2L+1)} - \frac{(4L^2-L-2)(4K^2-K-2)}{2(4L+1)}\Big] \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{K}{3}(19-K^2) + (4K^2-K-2)(0{,}5L+0{,}25)\right].$$

Подставив полученные значения и уравнение (2) в формулу (12), получим

$$\frac{1}{P_t} = \frac{K}{9}(8K^2 - 3K + 13) -$$

$$-\frac{(4K^2-K-2)^2}{6(4L+1)} - \frac{(K^2+LK+2L)^2}{3L(2L+1)(4L+1)} -$$

$$-\frac{\left[\frac{K}{3}(19-4K^2) + (4K^2-K-2)(0{,}5L+0{,}25)\right]^2}{2L^3 + 1{,}5L^2 + 16L + 0{,}75}. \qquad (14)$$

Если вычислять поперечные сдвиги для точек с номерами $K \leqslant L/2$, то в формуле (14) можно пренебрегать третьим членом, который при $K = L/2$ равен примерно $L/30$.

Выполним в соответствии с описанной выше методикой оценку точности положения точек жестких строенных рядов трилатерации (рис. 2). Сначала предположим, что конечные стороны s_0 и s_{2L} среднего ряда имеют жесткие дирекционные углы. В такой сети возникает $2N$ условных уравнений центральных систем и одно условное уравнение дирекционных углов. Здесь N — число центральных систем в одном сдвоенном ряде сети. Обратный вес функции уравненных сторон

$$\frac{1}{P_{(\alpha)}} = [ff] - \sum_{i=1}^{2N} A_i - \frac{[\alpha f \cdot 2N]^2}{[\alpha\alpha \cdot 2N]}, \qquad (15)$$

где $A_i = \dfrac{[a_i f(i-1)]^2}{[a_i a_i (i-1)]}$ — величина, вносимая в обратный вес i-м условным уравнением с коэффициентами a_i. Однако

$$[ff] - \sum_{i=1}^{2N} A_i = \frac{1}{P_{\text{св. с}}},$$

поэтому формулу (15) запишем так:

$$\frac{1}{P_{(\alpha)}} = \frac{1}{P_{\text{св.с}}} - \frac{[\alpha f \cdot 2N]^2}{[\alpha\alpha \cdot 2N]}. \tag{15'}$$

Преобразованный квадратический член условного уравнения дирекционных углов выведен в работе [2]. Подставив в него $N = L - 1$, получим

$$[\alpha\alpha \cdot 2N] = 0{,}8\,L - 9{,}85.$$

Выражение, имеющееся в числителе формулы (15),

$$[\alpha f \cdot 2N] = [\alpha f] - \sum_{i=1}^{2N} \frac{[a_i\,\alpha\,(i-1)][a_i f\,(i-1)]}{[a_i a_i\,(i-1)]}. \tag{16}$$

Определим обратный вес продольного сдвига K-й точки. Формула для него в свободной сети получена в работе [1]. Чтобы получить $[\alpha f_u \cdot 2]$, сложим i-ю величину с $(N+i)$-й под

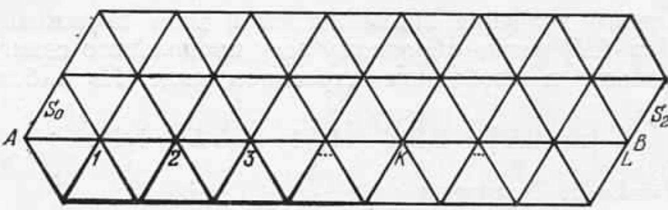

Рис. 2. Схема строенного ряда трилатерации.

знаком суммы в формуле (16). Таким образом, получен ряд из N членов, в котором $K-4$ члена постоянны и равны $-1{,}8$. Сумма оставшихся членов равна -6. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{2N} \frac{[a_i\,\alpha\,(i-1)][a_i f_u\,(i-1)]}{[a_i a_i\,(i-1)]} = -[1{,}8\,(K-4) + 6] = -1{,}8\,K - 1{,}2.$$

Подставим в (16) $[\alpha f] = -2K$ и значение полученной выше суммы. Тогда $[\alpha f_u \cdot 2N] = -2K + 1{,}8\,K - 1{,}2 = -(0{,}2\,K + 1{,}2)$. Используем это значение неквадратического члена весовой функции, квадратического члена условного уравнения и $1/P_{u(\text{св}\cdot\text{с})}$ из работы [1] для определения обратного веса продольного сдвига K-й точки диагонали AB строенного ряда с жесткими дирекционными углами двух крайних сторон

$$\frac{1}{P_{u\,(\alpha)}} = 0{,}3\,K + 0{,}94 - \frac{(0{,}2\,K + 1{,}2)^2}{0{,}8\,L + 9{,}85}. \tag{17}$$

Значение суммы в формуле (16) для функции поперечного сдвига можно определить исходя из того, что основная часть величин $[a_i f_t (i-1)]$ представляет арифметическую прогрессию [4]. Воспользовавшись этим, получим

$$[\alpha f_t \cdot 2N] = \frac{1}{3}[0{,}4\,K(K+11{,}8)-2{,}35].$$

Используя значение $1/P_{t(\text{св}\cdot\text{с})}$ из работы [4], $[\alpha f_t \cdot 2N]$ и $[\alpha\alpha \cdot 2N]$, можем записать:

$$\frac{1}{P_{t\,(\alpha)}} = 0{,}0882\,K^3 + 1{,}6\,K^2 - 0{,}6\,K + 0{,}7 - \frac{[0{,}4K\,(K+11{,}8)-2{,}35]^2}{3\,(0{,}8\,L+9{,}85)}. \tag{18}$$

Перейдем к оценке точности строенного ряда, в котором точки A и B жесткие. В такой сети обратный вес функции уравненных величин

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{P_{\text{св. с}}} - \frac{[uf \cdot 2N]^2}{[uu \cdot 2N]} - \frac{[tf\,(2N+1)]^2}{[tt\,(2N+1)]}. \tag{19}$$

Определим значения знаменателей в этом выражении. Величина $[uu \cdot 2N]$ равна обратному весу продольного сдвига конца диагонали в свободном строенном ряде. Из работы [3] имеем

$$[uu \cdot 2N] = 0{,}3\,N + 1{,}54 = 0{,}3\,L + 1{,}24. \tag{20}$$

Здесь $N=L-1$. Величина

$$[tt \cdot (2N+1)] = [tt \cdot 2N] - \frac{[ut \cdot 2N]^2}{[uu \cdot 2N]},$$

а $[tt \cdot 2N] = 3 \cdot \dfrac{1}{P_{t\,(\text{св. с})}}$ для конечной точки диагонали, т. е. при $K=L$. Здесь коэффициент 3 введен для того, чтобы коэффициенты условного уравнения были целыми числами (уравнение было умножено на $\sqrt{3}$). Таким же путем, как $[\alpha f_t \cdot 2N]$, получаем

$$[ut \cdot 2N] = -\,0{,}1\,L^2 - 1{,}133\,L - 0{,}608 \text{ и } \frac{[ut \cdot 2N]^2}{[uu \cdot 2N]} =$$

$$= \frac{(0{,}1\,L^2 + 1{,}133\,L + 0{,}608)}{0{,}3\,L + 1{,}24} = 0{,}03333\,L^3 + 0{,}6177\,L^2 +$$

$$+ 2{,}131\,L - 4{,}216 - \frac{5{,}598}{0{,}3\,L + 1{,}24}.$$

Преобразованный квадратический член условного уравнения поперечного сдвига

$$[tt\,(2N+1)] = 0{,}2311\,L^3 + 4{,}1851\,L^2 - 3{,}835\,L + 4{,}92 + \frac{5{,}6}{0{,}3L+1{,}2}. \tag{21}$$

Последним членом можно пренебречь, поскольку даже в небольших сетях (при $L=10$) он оказывается немногим больше 1.

Выражения в числителе формулы (19) для функции продольного сдвига:

$$[uf_u \cdot 2N] = 0{,}3\,K + 0{,}65;\ [tf_u \cdot (2N+1)] = \\ = 0{,}1\,K\,(K - L + 6{,}65) - 0{,}927\,L + 1{,}267, \qquad (22)$$

Подставив выражения (20), (21) и (22) в формулу (19), получим значение обратного веса продольного сдвига K-й точки строенного ряда трилатерации с двумя жесткими точками

$$\frac{1}{P_{u\,(u,\,t)}} = 0{,}3\,K + 0{,}94 - \frac{(0{,}3\,K + 0{,}65)^2}{0{,}3\,L + 1{,}24} - \\ - \frac{[0{,}1\,K\,(K - L + 6{,}65) - 0{,}927\,L + 1{,}27]^2}{0{,}2311\,L^3 + 4{,}185\,L^2 - 3{,}835\,L + 4{,}92}. \qquad (23)$$

Для весовой функции поперечного сдвига таким же путем определим

$$[uf_t \cdot 2N] = \frac{1}{\sqrt{3}} 0{,}1\,K\,(K + 11{,}67);\ [tf_t \cdot (2N+1)] = \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0{,}356\,L\,(K^2 + 11{,}955\,K - 9{,}133) - \\ - 0{,}2\,K\,(1{,}828 + K + 0{,}6612\,K^2) + 1{,}56$$

и обратный вес поперечного сдвига

$$\frac{1}{P_{t\,(u,\,t)}} = 0{,}0882\,K^3 + 1{,}6\,K^2 - 0{,}6\,K + 0{,}7 - \frac{[0{,}1\,K\,(K + 11{,}67)]^2}{3\,(0{,}3\,L + 1{,}24)} - \\ - \frac{[0{,}356\,L\,(K^2 + 11{,}955K - 9{,}133) - 0{,}2\,K\,(0{,}6612\,K^2 + K + 1{,}828) + 1{,}56]^2}{0{,}6933\,L^3 + 12{,}555\,L^2 - 11{,}505\,L + 14{,}76}. \qquad (24)$$

С помощью аналогичных приемов получены формулы для обратных весов продольного и поперечного сдвигов K-й точки диагонали AB строенного ряда трилатерации, в котором имеются жесткие дирекционные углы крайних сторон среднего ряда и жесткие точки A и B:

$$\frac{1}{P_{u\,(\alpha,\,u,\,t)}} = 0{,}3\,K + 0{,}94 - \frac{(0{,}2\,K + 1{,}2)^2}{0{,}8\,L + 9{,}85} - \frac{(0{,}25K + 0{,}35)^2}{0{,}25\,L + 0{,}70} - \\ - \frac{\left[0{,}1\,K\,(K - L - 1{,}81) - 0{,}544\,L - 1{,}017 + 1{,}65\,\frac{K}{L}\right]^2}{0{,}06445\,L^3 + 2{,}55\,L^2 + 0{,}6\,L + 1{,}6}; \qquad (25)$$

Результаты проверки формул для сдвигов точек строенного ряда трилатерации

Вид сети	Способ определения сдвигов	Номер точки (*K*)							
		1	4	8	13	18	22	25	26
Свободный строенный ряд	По схеме / По схеме	0,95 / 1,35	1,46 / 5,49	1,83 / 12,02	2,20 / 21,40	2,52 / 31,99	2,75 / 41,22	2,91 / 48,64	3,01 / 51,18
Ряд между двумя жесткими дирекционными углами	По схеме	0,92 / 1,31	1,41 / 4,92	1,76 / 10,38	2,09 / 16,80	2,37 / 23,04	2,56 / 27,34	2,66 / 30,29	2,68 / 30,99
	По формуле (17) / По формуле (18)	1,08 / 1,32	1,42 / 4,90	1,76 / 10,16	2,09 / 16,83	2,36 / 23,10	2,57 / 27,47	2,68 / 30,17	2,72 / 30,93
Ряд между двумя жесткими точками	По схеме	0,86 / 1,23	1,28 / 3,95	1,47 / 6,58	1,55 / 8,35	1,48 / 7,47	1,26 / 4,85	0,87 / 1,56	— / —
	По формуле (23) / По формуле (24)	1,07 / 1,30	1,28 / 3,94	1,46 / 6,73	1,55 / 8,35	1,48 / 6,73	1,30 / 3,94	1,04 / 1,30	— / —
Ряд между двумя жесткими дирекционными углами и двумя жесткими точками	По схеме	0,85 / 1,22	1,26 / 3,83	1,42 / 5,81	1,48 / 7,44	1,40 / 6,26	1,19 / 4,03	0,84 / 1,13	— / —
	По формуле (25) / По формуле (26)	1,01 / 1,31	1,29 / 3,87	1,41 / 6,50	1,48 / 8,15	1,40 / 6,50	1,25 / 3,87	0,99 / 1,31	— / —

$$\frac{1}{P_{u\,(\alpha,\,u,\,t)}} = 0{,}0882K^3 + 1{,}6K^2 - 0{,}6K + 0{,}7 - \frac{[0{,}4K(K+11{,}8) - 2{,}35]^2}{2{,}4L + 29{,}55} - \frac{[0{,}2L(K^2 + 12{,}066K - 10{,}874) + 0{,}133K(14{,}51 - K^2) + 2{,}3]^2}{0{,}06445L^3 + 2{,}55L^2 + 0{,}6L + 1{,}6}. \qquad (26)$$

Следует отметить, что формулы (24) и (26) дают правильные результаты при $K \leqslant \frac{L}{2}$, т. е. аргументом в них является число сторон, отделяющих оцениваемую точку от ближайшего края сети. Остальные формулы дают правильные результаты при любой нумерации точек.

В таблице приведены результаты проверки выведенных формул для строенного ряда. В ней имеются значения средних квадратических сдвигов точек $K=1$, 4, 8, 13, 18, 22, 25 и 26 диагонали АВ строенного ряда с $N=25$, вычисленных по весам, определенным по выведенным формулам и полученным из решения схемы Гаусса. При вычислениях принято $\mu = \pm 1$ см. Из таблицы видно, что формулы для определения продольного сдвига в трех рассматриваемых случаях дают практически точные значения сдвигов. Только для точек, отделенных от края сети одной-двумя сторонами, погрешность формул достигает 20%. Погрешность формул для определения поперечного сдвига не превышает 12%.

В таблице приведены также значения сдвигов точек средней диагонали свободного строенного ряда. Сравнивая их со сдвигами в жестких сетях, можно сказать, что жесткие крайние точки вызывают более значительное уменьшение сдвигов, чем жесткие дирекционные углы крайних сторон и что в жестких сетях уменьшается разность между величинами продольных и поперечных сдвигов.

Список литературы: 1. *Костецкая Я. М.* Исследование закономерностей накопления погрешностей положения пунктов в сплошных сетях трилатерации. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, вып. 19. 2. *Костецкая Я. М.* Учет исходных дирекционных углов при оценке точности сетей трилатерации. — В сб.: 50 лет Ленинского декрета об учреждении высшего геодезического управления. Львов, Изд-во Львов. ун-та, 1970. 3. *Костецкая Я. М.* К вопросу оценки точности сплошных сетей трилатерации. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1967, вып. 6. 4. *Костецкая Я. М.* О поперечном сдвиге точек в сетях трилатерации. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1977, вып. 28.

Работа поступила 26 мая 1977 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.