УДК 528.21:517.53

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ, д-р техн. наук
Львовский политехнический институт

НОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВНЕШНЕГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА ПЛАНЕТЫ РЯДОМ ШАРОВЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. При изучении и описании гравитационных полей Земли, Луны и других планет их внешний гравитационный потенциал V записывают обычно в виде ряда шаровых функций

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}}, \tag{1}$$

в котором сферические функции

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = fMR^n \sum_{k=0}^{n} (C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda) P_n^k(\vartheta) \tag{2}$$

представлены линейной комбинацией стандартных сферических гармоник $P_n^k(\vartheta) \cos k\lambda$ и $P_n^k(\vartheta) \sin k\lambda$ с выделением перед ними безразмерных коэффициентов C_{nk} и S_{nk} (стоксовых постоянных):

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{matrix} C_{nk} \\ S_{nk} \end{matrix}\right\} &= 2 \cdot \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \cdot \frac{1}{MR^n} \int_{\tau} r^n P_n^k(\vartheta) \begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix} \cdot dm; \\ C_{n0} &= \frac{1}{MR^n} \int_{\tau} r^n P_n(\vartheta)\, dm; \; S_{n0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Здесь r, ϑ, λ — планетоцентрические координаты; f — гравитационная постоянная; M — общая масса планеты; R — либо средний радиус планеты (для Луны), либо средний (у некоторых авторов — наибольший) радиус экватора (для Земли, Марса); τ — объем планеты; dm — элемент массы слагающего планету вещества. Если считать плотность δ внутренних недр планеты непрерывной функцией, то $dm = \delta(r, \vartheta, \lambda) \cdot d\tau$. Интегрирование в выражениях стоксовых постоянных (3) предполагается распространенным на весь объем планеты.

Как следует из работ [1—3], метод вывода ряда (1)—(3), восходящий к Лапласу, обусловливает его равномерную сходимость при всяком $r > R_{\text{наиб}}$, где $R_{\text{наиб}}$ — планетоцентрический радиус-вектор точки поверхности σ планеты, наиболее удаленной от ее центра масс. Сходимость этого ряда в точках самой поверхности σ не доказана до настоящего времени. Однако, несмотря на это, ряд (1)—(3) широко используют в практических приложениях: при описании гравитационного поля в ближайшей окрестности планеты и при изучении ее формы [1, 2, 9 и др.]. В математических же работах [5—7, 11] о сходимости данного ряда высказываются намного осторожнее. Разложение (1)—(3) считают асимптотическим и им описывают потенциал лишь в точках, находящихся достаточно далеко от тела τ, создающего этот потенциал.

В теории гармонических функций [10] для произвольных гармонических функций, рассматриваемых либо внутри сферы, либо между двумя концентрическими сферами (в частном случае вне сферы), сделан иной вывод рядов по степеням переменной r с коэффициентами, зависящими от угловых координат. Этот вывод основан на использовании свойств гармонических функций, выражаемых формулами Пуассона и Грина. Причем в интересующем нас случае гармонических функций вне сферы σ ряд (1), соответствующий разлагаемой функции, трактуют как степенной (относительно r), которым *гармоническая функция V представляется в окрестности бесконечно удаленной точки**. Этот ряд равномерно сходится в любой частичной подобласти, целиком со своей границей принадлежащей области, внешней относительно сферы σ.

Здесь же мы будем искать такое разложение гармонической функции V (а, значит, и гравитационного потенциала) вне сферы σ радиуса R, которое *наилучшим образом* (в смысле метрики пространств функций с интегрируемым квадратом) *представляет эту функцию во всем пространстве, внешнем относительно сферы* σ.

§ 2. Пусть H — множество всех функций, гармонических в неограниченной области T (T — вся часть пространства, внешнего относительно сферы σ радиусом R), а значит [8], и регулярных на бесконечности [3]: $\lim\limits_{r\to\infty} rV < A$ и $\lim r^2 \dfrac{\partial V}{\partial r} < B$, где A и B — постоянные, т. е. V стремится к нулю не медленнее, чем $1/r$, а первые частные производные V — не медленнее, чем $1/r^2$. Точки поверхности σ причисляем к области T.

Рассмотрим в области T систему шаровых функций

$$\{\omega_{nk}\} = \left\{\frac{1}{r^{n+1}} P_n^k(\vartheta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} k\lambda\right\} \in H, \quad (n, k = 0, 1, 2 \ldots; \; k \leqslant n). \quad (4)$$

Непосредственными вычислениями легко установить, что функции этой системы образуют в T ортогональную систему функций при любом весе

$$p = r^{-(2+\varkappa)}, \quad \varkappa \geqslant 2. \quad (5)$$

Параллельно с этим элементарно определяем и нормы функций системы (4), т. е.

$$\left.\begin{matrix}\|\omega_{nk}\|^2\\ \|\omega_{n0}\|^2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{(2n+1+\varkappa) R^{2n+1+\varkappa}} \begin{cases} \dfrac{2\pi}{(2n+1)} \cdot \dfrac{(n+k)!}{(n-k)!} \\[2ex] \dfrac{4\pi}{2n+1}. \end{cases} \quad (6)$$

---

* Такое истолкование ряда (1) позволяет, найти по теореме Коши—Адамара его фактический радиус сходимости, если воспользоваться для конкретной планеты оценками коэффициентами $|Y_n|$ этого ряда в зависимости от h. [и др.].

Далее в области T система (4) является полной * относительно множества функций H. Это следует из определения полноты системы функций и из возможности представления всякой функции $V \in H$ рядом (1), (2), в результате чего в H существует только одна функция ($V \equiv 0$), которая ортогональна ко всем функциям системы (4). У всякой же иной функции $V \not\equiv 0$, представимой рядом (1), (2), имеется хотя бы один коэффициент C_{nk} (или S_{nk}), отличный от нуля, с учетом которого

$$\int_T pV\omega_{nk}\, d\tau = C \| \omega_{nk} \|^2 \neq 0, \; C = \text{const} \neq 0,$$

что достаточно для полноты в T системы (4).

На основании указанных свойств (ортогональности и полноты) системы функций (4) с весом (5) любую гармоническую функцию V в области T можно единственным образом аппроксимировать обобщенным полиномом V_N по функциям этой системы

$$V_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda)\, P_n^k(\vartheta), \tag{7}$$

под условием

$$\varepsilon_N^2 = \int_T \frac{1}{r^{2+\varkappa}} (V - V_N)^2\, d\tau = \min. \tag{8}$$

При этом довольно просто вычисляются коэффициенты Фурье функции $V \in H$ по системе (4), которые имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{matrix} A_{nk} \\ B_{nk} \end{matrix}\right\} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} (2n+1+\varkappa) R^{2n+1+\varkappa} \times \\ &\qquad \times \int_T V \frac{1}{r^{n+3+\varkappa}} P_n^k(\vartheta) \left\{\begin{matrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{matrix}\right. d\tau; \\ &A_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi} (2n+1+\varkappa) R^{2n+1+\varkappa} \times \\ &\qquad \times \int_T V \frac{1}{r^{n+3+\varkappa}} P_n(\vartheta)\, d\tau; \; B_{n0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Таким образом, обобщенный полином (7) с коэффициентами (9) дает наилучшее квадратичное приближение любой

* Выяснять полноту системы функций (4) приходится потому, что здесь мы рассматриваем не все пространство L_γ^2, а лишь его часть, т. е. подпространство $H \subset L_\gamma^2$.

гармонической функции V в неограниченной области T. Вследствие известных свойств обобщенных рядов Фурье по полным ортогональным системам квадратическая погрешность приближения ε_N при любом фиксированном N имеет наименьшее значение именно при найденных значениях коэффициентов A_{nk} и B_{nk}. В случае увеличения N она не возрастает. При $N \to \infty$ ряды, найденные для V_N, в среднем сходятся к функции V.

Отметим теперь принципиальное различие между рядом (1), (2), с одной стороны, и построенным при $N \to \infty$ рядом (7), (9) — с другой. Оба эти ряда описывают одну и ту же гармоническую функцию V в области T. Однако первый из них — это степенной ряд, представляющий *локальное* разложение функции V в окрестности бесконечно удаленной точки, и его коэффициенты могут быть представлены формулами типа (3), второй же ряд аппроксимирует эту функцию *глобально* во всей неограниченной области T, что подчеркивается выражениями его коэффициентов (9).

Однако, как легко показать, оба эти ряда тождественны. Действительно, рассматривая при $N \to \infty$ ряд (7), описывающий функцию $V \in H$, отметим, что относительно r — это степенной ряд, имеющий центром разложения бесконечно удаленную точку. А поскольку эта же функция представлена еще и рядом (1), то на основании свойства единственности разложения функции в степенной ряд [12] ряды (7) и (1) — как ряды относительно r — тождественны.

Однако нас интересует вопрос тождественности обсуждаемых рядов по стандартным шаровым функциям (4). Такая тождественность сразу следует из рассмотрения этих рядов при $r = \text{const}$, когда оба они оказываются рядами по зональным и тессеральным сферическим функциям, разложение по которым, как известно, единственно.

Таким образом, полученный нами ряд (7), дающий глобальное представление $V \in H$, полностью тождествен ряду (1), (2), представляющему локальное разложение функции V в окрестности $r = \infty$. Совпадение двух рядов, резко отличных по замыслам их построения, является следствием того, что каждое из этих разложений выполнено по одной и той же системе функций (4), которая в T является ортогональной и не требует ортогонализации при решении задачи о квадратической аппроксимации $V \in H$.

Следовательно, классическое представление (1), (2) произвольной гармонической функции * вне сферы рядом по шаровым функциям (4) допускает истолкование как разложение этой функции в неограниченной области T в обобщенный ряд Фурье по полной в множестве H ортогональной системе функций (4) с весом (5). Заканчивая обсуждение ряда (7) при

---

* Разложение (1), (2) было описано выше применительно к гравитационному потенциалу, но в T аналогичными рядами представляются и произвольные гармонические функции.

$N\to\infty$, скажем, что он не только сходится в среднем к функции V в неограниченной области T, но и сходится к ней равномерно в любой частичной подобласти целиком со своей границей, принадлежащей T.

Заметим, наконец, что при решении задачи о наилучшем квадратическом представлении произвольной гармонической функции V в области T полиномом V_N выше был получен не один полином, а целая их серия: каждый многочлен из этой серии соответствует конкретному выбору параметра $\varkappa \geqslant 0$, входящему в выражение (5) веса системы функций (4). Однако вследствие отмеченной выше тождественности рядов (7) и (1), (2) численные значения (9) коэффициентов A_{nk} и B_{nk} не зависят от конкретного выбора параметра $\varkappa$. Для простоты можно полагать $\varkappa=0$.

§ 3. Возвратимся теперь к рассмотрению гравитационного потенциала V планеты. Пусть она имеет сферическую форму. С одной стороны, ее потенциал * представляется рядом (1), (2), (3), с другой — рядом (7) при $N\to\infty$ с коэффициентами (9). Учитывая доказанную тождественность этих рядов и сравнивая их, замечаем, что (9) — размерные стоксовы постоянные

$$\left.\begin{matrix} C_{nk} \\ S_{nk} \end{matrix}\right\} \cdot fMR^n = \left\{\begin{matrix} A_{nk} \\ B_{nk}. \end{matrix}\right. \tag{10}$$

Таким образом, стоксовы постоянные C_{nk} и S_{nk} планеты строго сферической формы могут быть представлены в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{matrix} C_{nk} \\ S_{nk} \end{matrix}\right\} = \frac{(2n+1)}{2\pi} \cdot \frac{(n-k)!}{(n+k)!} (2n+1+\varkappa) \frac{R^{n+1+\varkappa}}{fM} \times \\ &\qquad \times \int\limits_T V \frac{1}{r^{n+3+\varkappa}} P_n^k(\vartheta) \left\{\begin{matrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{matrix}\right. d\tau; \\ &C_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi} (2n+1+\varkappa) \frac{R^{n+1+\varkappa}}{fM} \times \\ &\qquad \times \int\limits_T V \frac{1}{r^{n+3+\varkappa}} P_n(\vartheta)\, d\tau; \;\; S_{n0}=0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Эти выражения гармоник гравитационного потенциала при его представлении рядом по шаровым функциям, пожалуй, не менее естественны, чем выражения (3), ибо формулами (11) наглядно раскрывается их смысл как обобщенных коэффициентов Фурье. Коэффициенты C_{nk} и S_{nk} (или A_{nk} и B_{nk}) выражены

---

* Указанные ограничения на форму планеты (ее сферичность) отнюдь не умаляют значения ряда (1), (2), (3). Он, как указано выше, описывает при $r>R_{\text{наиб}}$ и потенциал тела произвольной формы.

здесь интегралами по всему внешнему пространству от произведений шаровых функций, веса и изучаемого потенциала V. Последнее отчетливо объясняет, например, замеченную на основании экспериментальных данных необходимость определения C_{nk} и S_{nk} по равномерно распределенным наблюдениям за ИСЗ при разнообразных их орбитах, охватывающих наибольшую часть пространства, внешнего относительно Земли.

Однако формулы (11) или (9) — лишь иная форма записи формул (3): как в случае (3) коэффициенты C_{nk} и S_{nk} могут быть выражены интегралами по поверхности планеты [1], так и в случае (11) или (9) фигурирующие в них интегралы по области T могут быть в принципе преобразованы в интегралы по поверхности планеты за счет известного представления внешнего потенциала потенциалами двойного и простого слоев, расположенных на σ и имеющих плотности $V|\sigma$ и $\left.\dfrac{\partial V}{\partial n}\right|_{\sigma}$. Но, несмотря на это, выражения (11) и (9) могут оказаться полезными, и их использование может привести к интересным и важным следствиям, одно из которых рассмотрим ниже.

Изучение потенциала планет несферической формы намного сложнее и требует решения задач о наилучшей квадратической аппроксимации гравитационного потенциала во всей неограниченной области T, внешней относительно поверхности планеты σ. Однако для этого надо, во-первых, знать форму планеты σ и, во-вторых, удачно подобрать исходную систему функций, по которым следует строить искомое разложение.

Не вдаваясь в обсуждение этих проблем, отметим, что строгое их решение требует использования метода последовательных приближений. В первом приближении форму планеты следует, безусловно, считать сферической. *Желая сохранить* принятое *разложение* внешнего потенциала *по шаровым функциям,* необходимо (в случае несферичности планеты) в этом приближении так выбрать радиус сферы R, вне которой ищется разложение потенциала V, чтобы *в среднем* интегралами по T было охвачено все внешнее относительно σ пространство, в котором этот потенциал полагаем заданным. При таком выборе R приходится отказаться от $R_{\text{наиб}}$, т. е. от сферы, охватывающей все массы планеты, и выгоднее пользоваться сферой, радиус которой равен среднему радиусу планеты $R_{\text{ср}}$.

Таким образом, мы вновь возвратились к вопросу, поднимавшемуся в 1963 г. на 21 симпозиуме МАС, посвященному системе фундаментальных постоянных астрономии. Тогда было решено использовать в формулах (1), (2) для Земли ее средний экваториальный радиус a лишь на том основании, что так поступают большинство исследователей-теоретиков [4]. Однако, исходя из принципа наилучшего квадратического приближения внешнего потенциала (а не из «эстетических» соображений [4]), в его разложении (1), (2) по шаровым функциям имеет смысл брать вместо $R=a$ средний радиус Земли $R_{\text{ср}}$. Формально область сходимости ряда (1) при этом несколько расширяется за счет добавления к области $r > R_{\text{наиб}}$ частей области, ограниченной сферами радиусов $R_{\text{ср}}$ и $R_{\text{наиб}}$, в которых нет масс твердой Земли. Вопрос о сходимости ряда (1) в ближайшей окрестности планеты безусловно остается открытым: его разрешение связано с последующими приближениями.

Такая замена a на $R_{\text{ср}}$ вызовет пересчет стоксовых постоянных планеты. Легко показать, что при этом в стоксовы постоянные Земли C_{nk} и S_{nk} надо ввести поправки:

$$\Delta C_{nk} = \frac{\Delta R}{R} \cdot n \cdot C_{nk} \text{ и } \Delta S_{nk} = \frac{\Delta R}{R} \cdot n \cdot S_{nk}, \qquad (12)$$

или, с достаточной степенью точности,

$$\Delta C_{nk} = 1{,}12 \cdot 10^{-3} \cdot n \cdot C_{nk} \text{ и } \Delta S_{nk} = 1{,}12 \cdot 10^{-3} \cdot n \cdot S_{nk}. \qquad (13)$$

При малых значениях n такие поправки на три порядка меньше самих гармоник C_{nk} и S_{nk}, т. е., кроме ΔC_{20}, они невелики. В соответствии с фундаментальными постоянными МАС (1964) имеем $\Delta C_{20} = -2{,}435 \cdot 10^{-6}$, значит, вместо принятого $I_2 = 0{,}0010827$ получаем его измененное значение $I_2' = 0{,}0010851$, что приводит к поправке в сжатие Земли $\delta_\alpha = 31 \cdot 10^{-7}$, за счет чего оно оказывается равным $0{,}0033560 = 1/297{,}97$ вместо принятого $0{,}0033529 = 1/298{,}25$.

Рассматриваемая нами трактовка представления внешнего гравитационного потенциала планеты позволяет получить обобщенную оценку наборов стоксовых постоянных, выводимых по результатам наземных или спутниковых наблюдений. Действительно, выписывая для ряда (7) при $N \to \infty$ равенство Парсеваля и заменяя в нем по формулам (10) коэффициенты A_{nk}, B_{nk} на C_{nk}, S_{nk}, а затем последние — на полностью нормализованные значения $\bar{C}_{nk}$ и $\bar{S}_{nk}$, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{2n+1+\varkappa} = \frac{R^{1+\varkappa} \| V \|^2}{4\pi (fM)^2}, \qquad (14)$$

где $\sigma_n^2 = \sum_{k=0}^{n} (\bar{C}_{nk}^2 + \bar{S}_{nk}^2)$ — так называемая порядковая дисперсия стоксовых постоянных; $\| V \| = \left(\int_T r^{-(2+\varkappa)} V^2 d\tau \right)^{1/2}$ — норма потенциала.

Список литературы: 1. *Бровар В. В.* [и др.]. Теория фигуры Земли, М., Геодезиздат, 1961. 2. *Бурша М. И.* Основы космической геодезии, ч. 2. Пер. с чешск. М., «Недра», 1975. 3. *Идельсон Н. И.* Теория потенциала и ее приложения к геофизике. М.—Л., Гостехтеориздат, 1932. 4. *Каула В. М.* Обзор геодезических параметров. — В сб.: Фундаментальные постоянные астрономии. Материалы Симпозиума по астрономическим постоянным (Париж, 1963). М., «Мир», 1967. 5. *Кошляков Н. С.* [и др.]. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М., Физматгиз, 1962. 6. *Ляпу-*

ов А. М. Собр. соч., т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1959. 7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 3, ч. 2, М.—Л., Гостехтеориздат, 1951. 8. *Сретенский Л. Н.* Теория Ньютоновского потенциала. М.—Л., Гостехиздат, 1946. 9. Стандартная Земля, геодезические параметры Земли на 1966 г. Пер. с англ. М., «Мир», 1969. 10. *Тиман А. Ф., Трофимов В. Н.* Введение в теорию гармонических функций. М., «Наука», 1968. 11. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., Гостехтеориздат, 1953. 12. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М.—Л., Гостехтеориздат, 1951.

Работа поступила 5 марта 1977 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.