УДК 528.21/22

И. Ф. МОНИН, д-р техн. наук
Львовский политехнический институт

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМУЛ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ВЕРТИКАЛЬНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ЗЕМНОГО УСКОРЕНИЯ

Формулы, позволяющие определять производные земного ускорения на геоиде по известным аномалиям [1], имеют следующий вид:

$$a^2 \frac{\partial \Delta g}{\partial z} = 2c - 2a\Delta g - \frac{a}{4\pi} \int (\Delta g' - \Delta g)\, S_1(\psi)\, d\sigma; \qquad (1)$$

$$a^3 \frac{\partial^2 \Delta g}{\partial z^2} = -8c + 6a\Delta g + \frac{a}{4\pi} \int (\Delta g' - \Delta g)\, S_2(\psi)\, d\sigma, \qquad (2)$$

где Δg — аномалия земного ускорения; z — радиус-вектор фиксированной точки геоида (начало координат принято в центре общего земного эллипсоида); ψ — угловое расстояние между фиксированной и текущей точками поверхности; $d\sigma$ — элемент поверхности сферы единичного радиуса;

$$S_1(\psi) = \sum_0^\infty (2n+1)(n+2)\, P_n(\cos\psi) = -\frac{2}{r^3};$$

$$S_2(\psi) = \sum_0^\infty (2n+1)(n+2)(n+3)\, P_n(\cos\psi) = -\frac{14}{r^3};$$

$$\Delta g = g - \gamma, \; c = W_0 - U_0, \; r = 2\sin\frac{\psi}{2}.$$

Здесь W_0, g — гравитационный потенциал и ускорение на геоиде; U_0, γ — нормальные значения гравитационного потенциала и ускорения на земном эллипсоиде с большой полуосью a; $P_n(\cos\psi)$ — полином Лежандра.

При исследовании формул (1) и (2) на теоретической модели, подходящей к геоиду Земли, в качестве геоида примем эллипсоид Красовского. За отсчетную поверхность возьмем эллипсоид вращения, у которого большая полуось такая же, как у эллипсоида Красовского, а малая на 100 м больше. Данная модель, как показано в работах [2, 3], имеет следующие характеристики гравитационного поля:

$$\Delta g = g_e \Delta\beta \sin^2\Phi; \quad (3) \qquad c = W_0 - U_0 = \frac{2}{3} a g_e \Delta\beta, \ \zeta = -a\Delta\alpha \sin^2\Phi; \quad (4)$$

$$\Delta\alpha = 0{,}0000157; \quad \Delta\beta = -0{,}0000158, \quad (5)$$

где g_e — экваториальная постоянная земного ускорения; ζ — высота геоида над эллипсоидом; Φ — геоцентрическая широта.

Найдем связь между $\partial\Delta g/\partial z$ и $\partial g/\partial z$, $\partial\gamma/\partial\rho$. Здесь ρ — радиус-вектор фиксированной точки эллипсоида. Мы имеем:

$$\frac{\partial\Delta g}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial z}; \ \frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{\partial\gamma}{\partial\rho + \partial\zeta}; \ z = \rho + \zeta;$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{\partial\gamma}{\partial\rho\left(1 + \frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)} \approx \frac{\partial\gamma}{\partial\rho}\left(1 - \frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right); \ \frac{\partial\gamma}{\partial\rho} \approx -\frac{2\gamma}{\rho}, \ \frac{\partial\zeta}{\partial\rho} \approx -\frac{\Delta g}{g}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z} \approx \frac{\partial\gamma}{\partial\rho} - \frac{2\Delta g}{\rho}; \quad (7) \qquad \frac{\partial\Delta g}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial\rho} + \frac{2\Delta g}{\rho}. \quad (8)$$

Формула (8) представляет зависимость между вертикальным градиентом земного ускорения на геоиде $\partial g/\partial z$, его нормальным значением $\partial\gamma/\partial\rho$ на эллипсоиде и производной $\partial\Delta g/\partial z$. Не нарушая принятой точности (здесь удерживаются малые величины $\Delta g/\rho$ второго порядка), можно z и ρ заменить внешними нормалями к поверхностям геоида и эллипсоида. Формулы (6) хорошо известны в гравиметрии.

Применяя также известную формулу

$$\frac{\partial\gamma}{\partial n} \approx -\frac{2g_e}{a}\left[1 + q + \alpha + \left(\frac{5}{2}q - \alpha\right)\sin^2\Phi\right],$$

где $q = \frac{\omega^2 a}{g_e}$; $\alpha = \frac{a-b}{a}$, к геоиду и эллипсоиду модели, по формуле (8) получаем [5]

$$\frac{\partial\Delta g}{\partial n} = -\frac{2g_e}{a}\Delta\alpha(1 - 3\sin^2\Phi) + \frac{2g_e}{a}\Delta\beta\sin^2\Phi. \quad (9)$$

Далее найдем зависимость между $\partial^2 \Delta g/\partial z^2$ и $\partial^2 g/\partial z^2$, $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \rho^2}$. Легко увидеть, что

$$\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \rho + \partial \zeta}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} - \frac{2\Delta g}{\rho}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} - \frac{2\Delta g}{\rho}\right) = \left(1 + \frac{\Delta g}{g}\right)\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \rho^2} + \frac{2\Delta g}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \rho^2} + \frac{2\Delta g}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial \Delta g}{\partial z} + \frac{\Delta g}{g} \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \rho^2}; \quad \frac{\Delta g}{g} \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \rho^2} \cong \frac{6\Delta g}{\rho^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial z^2} \approx \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial \Delta g}{\partial z} - \frac{8}{\rho^2}\Delta g. \tag{10}$$

Получим теперь формулу, определяющую $\partial^2 g/\partial n^2$, где n — внешняя нормаль эллипсоида. Воспользовавшись точной формулой, приведенной в статье [4], напишем

$$-\frac{\partial^2 \gamma}{\partial n^2} = \frac{fM}{a^3} \cdot \frac{F(a^2 + F)(c^2 - b^2) - 4a^4 b^2}{F^{7/2}} +$$

$$+ \frac{\omega^2 a^2}{3} \cdot \frac{\frac{3}{2}\sin^2 u - \frac{1}{2}}{\left(\frac{3b^2}{c^2} + 1\right)\operatorname{arctg}\frac{c}{b} - \frac{3b}{c}} \times$$

$$\times \left\{\frac{3b^2 + c^2}{ca^3} \cdot \frac{F(a^2 + b^2)(c^2 - b^2) - 4a^4 b^2}{F^{7/2}} + \frac{18a}{c} \cdot \frac{2b^2 - F}{F^{5/2}} + \right.$$

$$+ 3ac\frac{F - 4b^2}{F^{7/2}} \cdot \cos^2 u + \frac{24ab}{c^2} \cdot \frac{a^2 b^2 - F(a^2 + b^2 - F)}{F^{7/2}} \times$$

$$\left. \times \operatorname{arctg}\frac{c}{b}\right\} + 4\omega^2 ab \cdot \frac{a^2 b^2 - F(a^2 + b^2 - F)}{F^{7/2}} \cdot \cos^2 u, \tag{11}$$

где M — масса уровенного эллипсоида; b — его малая полуось; f — гравитационная постоянная; ω — угловая скорость суточного вращения эллипсоида; u — приведенная широта, $c^2 = a^2 - b^2$, $F = a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u$.

Чтобы получить приближенную формулу, определяющую $\partial^2\gamma/\partial n^2$, разложим все функции, входящие в формулу (11), в ряды по степеням эксцентриситета эллипсоида e^2. Тогда:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2; \; b^2 = a^2(1 - e^2); \; c^2 = a^2 e^2; \; F = a^2(1 - e^2 \cos^2 u);$$

$$\operatorname{arctg}\frac{c}{b}=\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{e^3}{(1-e^2)^{3/2}}+\cdots;\ \left(\frac{3b^2}{c^2}+1\right)\operatorname{arctg}\frac{c}{b}-\frac{3b}{c}=$$

$$=\frac{4}{15}e^3\left(1+\frac{3}{2}e^2+\cdots\right);\ \frac{18a}{c}\cdot\frac{2b^2-F}{F^{5/2}}=\frac{18}{a^3}\cdot\frac{1}{e}\Big[1-2e^2+$$

$$+\frac{7}{2}e^2\cos^2 u+e^4\left(-5\cos^2 u+\frac{55}{8}\cos^4 u\right)+\cdots\Big];$$

$$\frac{a^2b^2-F\,(a^2+b^2-F)}{F^{7/2}}=\frac{e^4}{a^3}(-\cos^2 u+\cos^4 u)+\cdots,$$

$$fM=g_e a^2\left(1-\frac{e^2}{2}+\frac{3}{2}q\right);\ \frac{F\,(a^2+F)(c^2-b^2)-4a^4b^2}{F^{7/2}}=$$

$$=-\frac{6}{a}\left(1-\frac{4}{3}e^2+3e^2\cos^2 u-\frac{11}{3}e^2\cos^2 u+\frac{151}{24}e^4\cos^4 u+\cdots\right);$$

$$\frac{24ab}{c^2}\cdot\frac{a^2b^2-(a^2+b^2)F+F^2}{F^{7/2}}\operatorname{arctg}\frac{c}{b}=\frac{24}{a^3}e^3(\cos^4 u-\cos^2 u)+\cdots;$$

$$\frac{F\,(a^2+F)(c^2-b^2)-4a^4b^2}{F^{7/2}}\cdot\frac{3b^2+c^2}{ca^3}=-\frac{18}{a^3}\cdot\frac{1}{e}\Big[1-2e^2+$$

$$+\frac{8}{9}e^4+3e^2\cos^2 u-\frac{17}{3}e^4\cos^2 u+\frac{151}{24}e^4\cos^4 u+\cdots\Big];$$

$$3ac\frac{F-4b^2}{F^{7/2}}\cos^2 u=-\frac{9e}{a^3}\Big(1-\frac{4}{3}e^2+\frac{23}{6}e^2\cos^2 u-\frac{14}{3}e^4\cos^2 u+$$

$$+\frac{217}{24}e^4\cos^4 u+\cdots\Big);$$

$$4\omega^2ab\frac{a^2b^2-F\,(a^2+b^2-F)}{F^{7/2}}\cos^2 u=$$

$$=-\frac{\omega^2}{a^3}e^4\sqrt{1-e^2}\,(\cos^2 u-\cos^4 u)\cos^2 u.$$

В результате этих разложений и некоторых преобразований получаем приближенную формулу

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial n^2}=\frac{6g_e}{a^2}\left[1-\frac{1}{6}q+\frac{7}{6}e^2+(5q-3e^2)\sin^2 u\right].\tag{12}$$

Применив формулу (12) к геоиду и эллипсоиду модели, по формуле (10) найдем

$$\frac{\partial^2\Delta g}{\partial z^2}=\frac{6g_e}{a^2}\left(\frac{7}{3}\Delta\alpha-6\Delta\alpha\sin^2\Phi\right)+\frac{2}{a}\Big[-\frac{2g_e}{a}\Delta\alpha\,(1-3\sin^2\Phi)+$$

$$+\frac{2g_e}{a}\Delta\beta\sin^2\Phi\Big]-\frac{8}{a^2}g_e\Delta\beta\sin^2\Phi=\frac{g_e}{a^2}[10\Delta\alpha-(24\Delta\alpha+4\Delta\beta)\sin^2\Phi].\tag{13}$$

Таким образом, мы подготовили необходимые данные для проверки формул (1) и (2). Отметим, что формулы (8) и (10) характеризуют производные от аномалий в общем случае. Формулы же (9) и (13) пригодны только для конкретной модели. Вычислим теперь производные $\partial\Delta g/\partial z$, $\partial^2\Delta g/\partial z^2$ по формулам (1), (2) для принятой модели. Для этого подставим в них значения Δg и c из формул (3) и (4). Причем предварительно вычислим значения интегралов, которые для данной модели легко получить как при помощи свойств сферических функций, так и обычным способом. Окончательно запишем

$$\iint\limits_{\sigma} (\sin^2 \Phi' - \sin^2 \Phi)\, S_1(\psi)\, d\sigma = 8\pi \left(\sin^2 \Phi - \frac{1}{3}\right);$$

$$\iint\limits_{\sigma} (\sin^2 \Phi' - \sin^2 \Phi)\, S_2(\psi)\, d\sigma = 56\,\pi \left(\sin^2 \Phi - \frac{1}{3}\right).$$

После этого по формулам (1) и (2) получаем:

$$\frac{\partial\Delta g}{\partial z} = \frac{g_e}{a}\left[\frac{4}{3}\Delta\beta - 2\Delta\beta\sin^2\Phi - 2\Delta\beta\left(\sin^2\Phi - \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{2g_e}{a}\Delta\beta\,(1 - 2\sin^2\Phi); \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2\Delta g}{\partial z^2} = \frac{g_e}{a^2}\left[-\frac{16}{3}\Delta\beta + 6\Delta\beta\sin^2\Phi + 14\,\Delta\beta\left(\sin^2\Phi - \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{10g_e}{a^2}\Delta\beta\,(-1 + 2\sin^2\Phi). \tag{15}$$

Сравнение формул (14) и (15) с формулами (9) и (13) показывает, что между ними имеется довольно хорошее согласие, не превышающее малых величин третьего порядка.

Список литературы: 1. *Монін І. Ф.* Про розклад гравітаційного потенціалу Землі в ряд Тейлора. — «ДАН УРСР. Серія Б», 1967, № 9. 2. *Монин И. Ф.* К определению фигуры Земли с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия земного эллипсоида. — «Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1962, вып. 4. 3. *Монін І. Ф.* До обгрунтування одного методу визначення фігури Землі. — «ДАН УРСР. Серія Б», 1973, № 3. 4. *Монін І. Ф.* Про обчислення аномалій сили тяжіння, висот квазігеоїда та відхилень виска. — «ДАН УРСР», 1963, № 5. 5. *Монін І. Ф.* Про визначення фігури Землі за аномаліями вертикального градієнта сили тяжіння.— «ДАН УРСР. Серія Б», 1968, № 4.

Работа поступила 1 марта 1977 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.