УДК 528.21/22

И. Ф. МОНИН, д-р техн. наук
Львовский политехнический институт

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМУЛЫ Д. В. ЗАГРЕБИНА ПО ТЕОРИИ РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОГО ГЕОИДА

Д. В. Загребин [1, 2, 3] создал теорию регуляризированного геоида. Применяя аппарат эллиптических функций Лямэ и выполняя оригинальные математические преобразования, он впервые получил формулу, по которой можно вычислять ондуляции геоида с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли для случая эллипсоидальной уровенной поверхности. Им же наиболее полно исследована знаменитая формула Стокса в теории фигуры Земли.

Формула Д. В. Загребина имеет следующий вид:

$$\zeta = \zeta_0 + \alpha\zeta_1, \tag{1}$$

где $\zeta_0 = \dfrac{a}{4\pi\gamma}\displaystyle\int \Delta g\sqrt{1 + i^2\sin^2 u}\cdot Z(\psi)\,d\sigma$; $\zeta_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \zeta_0\cos^2 u S(\psi)\,d\sigma$;

$$Z(\psi) = \sum_2^\infty \frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi) + i^2\left\{2\sum_2^\infty \frac{2n+1}{(n-1)^2(2n+3)}P_n(\cos\psi) - \right.$$

$$- \sum_2^\infty \frac{(2n+1)\,n^2}{(n-1)^2(2n+3)}P_n(\cos\psi) - \sum_2^\infty \frac{2n+1}{(n-1)^2(2n+3)} \times$$

$$\left. \times \frac{\partial^2}{\partial\lambda_0^2}P_n(\cos\psi) - \sum_2^\infty \frac{2n+1}{(n-1)^2}P_n(\cos\psi)\right\} + 2q\sum_2^\infty \frac{2n+1}{(n-1)^2}P_n(\cos\psi),$$

где ζ — ондуляция геоида (или расстояние между геоидом и эллипсоидальной поверхностью); Δg — аномалия силы тяжести; a — большая полуось эллипсоида, α — сжатие эллипсоида по меридиану; γ — нормальное значение силы тяжести;

$$i^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2};\; q = \frac{\omega^2 a}{g_e};\; \alpha = \frac{a-b}{a};$$

b — малая полуось эллипсоида; ω — угловая скорость вращения Земли; g_e — экваториальная постоянная нормальной силы тяжести; $P_n(\cos\psi)$ — полином Лежандра n-го порядка; ψ — угловое расстояние между фиксированной и текущей точками эллипсоида (начало координат принято в центре земного эллипсоида); u — приведенная широта; $S(\psi)$ — функция Стокса; $d\sigma$ — элемент поверхности сферы единичного радиуса; λ_0 — долгота фиксированной точки.

Д. В. Загребин выполнил также суммирование рядов, входящих в функцию $Z(\psi)$. Окончательную формулу для этой функции мы не приводим из-за ее громоздкости.

Теория Д. В. Загребина построена для частного случая, когда масса уровенного эллипсоида и гравитационный потенциал на его поверхности соответственно равны массе и потенциалу геоида, центры эллипсоида и геоида совпадают, а вращение их происходит около общей оси. Эти условия соблюдаются и при выводе формулы Стокса. Их называют «условиями применимости формулы Стокса».

Формула (1) была проверена на специальной модели. Как показано в статье [4], при практическом применении формулы (1) к модели после интегрирования и последующих вычислений появляется постоянная часть (вследствие несоблюдения условий Стокса в модели), которую приходится отбрасывать. Для геоида условия Стокса тоже не удовлетворяются. В связи с этим уточним формулу (1) и добьемся, чтобы она учитывала различия массы и гравитационного потенциала геоида и уровенного отсчетного эллипсоида.

Пусть W_0 — потенциал силы тяжести на геоиде; U_0 — нормальный потенциал на уровенном эллипсоиде; ν — внешняя нормаль к эллипсоиду; g — сила тяжести на геоиде; γ — нормальная сила тяжести на эллипсоиде; T — возмущающий потенциал; Δg — аномалия силы тяжести.

Тогда на геоиде легко составить [4] граничное условие

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} - \frac{T}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = -\Delta g - \frac{W_0 - U_0}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \nu}. \qquad (2)$$

Как и Д. В. Загребин [1], перейдем в уравнении (2) от производной по ν к производной по эллиптической координате ρ. Разложив $\partial\gamma/\partial\nu$ в ряд по степеням сжатия α и зная, что $W_0 - U_0$ и T, Δg — малые величины второго порядка ($\alpha^2 W$, $\alpha^2 g$), из формулы (2) получим

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + (1 + q + \alpha\cos^2 \Phi)\,\frac{2T}{\rho} =$$

$$= -\Delta g\,(1 + \alpha\sin^2 \Phi) + \frac{2}{a}(W_0 - U_0)(1 + q + \alpha\cos^2 \Phi). \qquad (3)$$

Поскольку в рассматриваемом случае

$$T = \gamma\zeta + W_0 - U_0, \qquad (4)$$

то, полагая, что $T = T_0 + \alpha T_1$, $\zeta = \zeta_0 + \alpha\zeta_1$, из формул (3) и (4) находим:

$$\frac{\partial T_0}{\partial \rho} + (1 + q)\,\frac{2T_0}{\rho} = -\Delta g + \frac{2}{a}(1 + q)(W_0 - U_0);$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \rho} + \frac{2T_1}{\rho} = -\Delta g\sin^2 \Phi - \frac{2\zeta_0}{a}\gamma\cos^2 \Phi;$$

$$T_0 = \gamma\zeta_0 + W_0 - U_0,\; T_1 = \gamma_e\zeta_1,$$

где Φ — геоцентрическая широта.

Далее, точно так же, как это делает Д. В. Загребин, разложим T_0 в бесконечный ряд эллиптических функций Лямэ. Причем будем учитывать функции нулевого порядка в разложении T_0. Легко установить, что в данном случае

$$T_0 = \frac{a}{4\pi}\int \Delta g^* Z^*(\psi)\,d\sigma;\ \Delta g^* = \Delta g - \frac{2}{a}(W_0 - U_0)(1+q);$$

$$Z^*(\psi) = Z(\psi) - 1 - \frac{2}{3}\alpha + 2q, \tag{5}$$

или окончательно

$$\gamma\zeta_0 = \frac{a}{4\pi}\int \Delta g Z(\psi)\,d\sigma - \frac{a}{4\pi}\left(1 + \frac{2}{3}\alpha - 2q\right)\int \Delta g d\sigma +$$

$$+\left(1 + \frac{4}{3}\alpha - 2q\right)(W_0 - U_0); \tag{6}$$

$$g_e\zeta_1 = \frac{a}{4\pi}\int\left(\Delta g \sin^2\Phi + \frac{2\zeta_0}{a}\gamma\cos^2\Phi\right)[S(\psi) - 1]\,d\sigma. \tag{7}$$

Таким образом, формулы (6) и (7) уточняют теорию регуляризированного геоида в том случае, когда условия Стокса не соблюдаются.

Проверим формулы (6) и (7) на модели, взятой из статьи [4]. Напомним, что в этой модели в качестве геоида принят уровенный эллипсоид Красовского со следующими гравиметрическими характеристиками:

$$g = g_e(1 + \beta\sin^2 B - \beta_1\sin^2 2B - \beta_2\sin^2 B\sin^2 2B);$$

$$e^2 = 0{,}006\,693\,422;\ \beta = 0{,}005\,302\,925;\ \beta_1 = 0{,}000\,005\,849;$$

$$\beta_2 = 0{,}000\,000\,032;\ \alpha = 0{,}003\,352\,330;\ g_e = 978\,049\ \text{мгл};$$

$$q = 0{,}003\,467\,749;\ a = 6\,378\,245\ \text{м}.$$

Здесь B — геодезическая широта.

За отсчетную поверхность модели возьмем уровенный эллипсоид вращения, у которого большая полуось такая же, а малая — на 100 м больше, чем в эллипсоиде Красовского. Коэффициенты нормальной формулы и другие характеристики отсчетного эллипсоида определяются так:

$$\gamma_e = 978\,049\ \text{мгл};\ \beta' = 0{,}005\,318\,670;\ \beta_1' = 0{,}000\,005\,828;$$

$$\beta_2 = 0{,}000\,000\,032;\ e'^2 = 0{,}006\,662\,170;\ \alpha' = 0{,}003\,336\,652;$$

$$\zeta_{\text{геом}} = -a\left[(\alpha_{\text{г}} - \alpha_e) + \frac{2}{3}(\alpha_{\text{г}}^2 - \alpha_e^2) + 2(\alpha_{\text{г}}^3 - \alpha_e^3)\right]\sin^2\Phi +$$

$$+ a\left[\frac{3}{2}(\alpha_{\text{г}}^2 - \alpha_e^2) + \frac{9}{2}(\alpha_{\text{г}}^3 - \alpha_e^3)\right]\sin^4\Phi - \frac{5}{2}a(\alpha_{\text{г}}^3 - \alpha_e^3)\sin^6\Phi; \tag{8}$$

$$\Delta g = g_e(\delta_1 \sin^2 \Phi + \delta \sin 2\Phi),\ \delta_1 = \beta - \beta';$$

$$\delta = \frac{e^2}{2}\delta_1 - \delta_2 + \beta\Delta\alpha;\ \delta_2 = \beta_1 - \beta_1';\ \Delta\alpha = \alpha_{\text{г}} - \alpha_e, \tag{9}$$

$\alpha_{\text{г}}$, α_e — сжатия геоида и эллипсоида.

Воспользовавшись известными формулами для уровенного эллипсоида

$$fM = a^2\gamma_e\left(1 - \alpha + \frac{3}{2}q - \frac{15}{14}q\gamma - \frac{1}{294}q\alpha^2 + \cdots\right);$$

$$W = a\gamma_e\left(1 - \frac{2}{3}\alpha + \frac{11}{6}q - \frac{1}{5}\alpha^2 - \frac{8}{105}\alpha^3 - \frac{4}{7}\alpha q - \frac{118}{735}\alpha^2 q + \cdots\right),$$

найдем разность масс и потенциалов геоида и отсчетного уровенного эллипсоида модели:

$$f(M_{\text{г}} - M_e) = -\gamma_e a^2\left(1 + \frac{15}{14}q\right)\Delta\alpha; \tag{10}$$

$$W_2 - W_e = -\gamma_e a\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{5}(\alpha_{\text{г}} - \alpha_e) + \frac{4}{7}q\right]\Delta\alpha, \tag{11}$$

где f — гравитационная постоянная; $M_{\text{г}}$, M_e — масса геоида и эллипсоида; $W_{\text{г}}$, W_e — их гравитационные потенциалы.

Принимая во внимание следующие интегралы:

$$\int S(\psi)\,d\sigma = 0,\ \int S(\psi)\sin^2\Phi'\,d\sigma = 4\pi\left(\sin^2\Phi - \frac{1}{3}\right);$$

$$\int S(\psi)\sin^4\Phi'\,d\sigma = -\frac{36}{35}\pi + \frac{16}{7}\pi\sin^2\Phi_0 + \frac{4}{3}\pi\sin^4\Phi;$$

$$\sum_2^\infty \frac{2n+1}{(n-1)^2(2n+3)}\int P_n(\cos\psi)\sin^2\Phi'\,d\sigma = \frac{4}{7}\pi\left(\sin^2\Phi - \frac{1}{3}\right);$$

$$\sum_2^\infty \frac{(2n+1)n^2}{(n-1)^2(2n+3)}\int P_n(\cos\psi)\sin^2\Phi'\,d\sigma = \frac{16}{7}\left(\sin^2\Phi - \frac{1}{3}\right)\pi;$$

$$\sum_2^\infty \frac{2n+1}{(n-1)^2(2n+3)}\int \sin^2\Phi'\frac{\partial^2}{\partial\lambda_0^2}P_n(\cos\psi)\,d\sigma = 0;$$

$$\sum_2^\infty \frac{2n+1}{(n-1)^2}\int P_n(\cos\psi)\sin^2\Phi'\,d\sigma = 4\pi\left(\sin^2\Phi - \frac{1}{3}\right),$$

из формул (6) и (7) после подстановки в них аномалий силы тяжести (9) получаем:

$$\gamma\zeta_0 = ag_e\left\{-\frac{\delta_1}{3} - \frac{32}{105}\delta + \frac{3}{7}e^2\delta_1 - \frac{2}{3}q\delta_1 + \left(\delta_1 + \frac{12}{7}\delta - \frac{9}{7}e^2\delta_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2q\delta_1\right)\sin^2\Phi - \frac{4}{3}\delta\sin^4\Phi\right\} + (W_0 - U_0)\left(1 + \frac{4}{3}\alpha - 2q\right) -$$

$$- ag_e\left(1 + \frac{2}{3}\alpha - 2q\right)\left(\frac{1}{3}\delta_1 + \frac{18}{15}\delta\right); \qquad (12)$$

$$\gamma_e\zeta_1 = ag_e\left\{-\frac{92}{105}\delta_1 + \frac{10}{7}\delta_1\sin^2\Phi - \frac{\delta_1}{3}\sin^4\Phi\right\} +$$

$$+ \left(W_0 - U_0 - \frac{2}{3}ag_e\delta_1\right)\left(-\frac{2}{3} - 2\sin^2\Phi\right). \qquad (13)$$

После этого легко найти окончательную высоту геоида

$$\zeta = a\left\{\left(\delta_1 + \frac{12}{7}\delta + 2q\delta_1 - \frac{4}{7}e^2\delta_1\right)\sin^2\Phi - \left(\frac{e^2}{6}\delta_1 + \beta'\delta_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{4}{3}\delta\right)\sin^4\Phi\right\} + \frac{W_0 - U_0}{g_e} - a\left(\frac{2}{3}\delta_1 + \frac{88}{105}\delta + \frac{4}{3}q\delta_1 - \frac{34}{105}e^2\delta_1\right). \qquad (14)$$

Для данной модели при $\Phi = 0$, $\zeta = 0$. Поэтому разность потенциалов, вычисленная по формуле (14), $W_0 - U_0 = -0{,}000\,010\,517\; g_e a$. Следовательно, погрешность в высоте геоида ζ за счет несовпадения этой разности с действительной, вычисленной по формуле (11), равна 0,083 м. Отсюда расчетная формула для высот геоида модели примет вид

$$\xi = a\left\{\left(\delta_1 + \frac{12}{7}\delta + 2q\delta_1 - \frac{4}{7}e^2\delta_1\right)\sin^2\Phi - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{e^2}{6}\delta_1 + \beta'\delta_1 + \frac{4}{3}\delta\right)\sin^4\Phi\right\}. \qquad (15)$$

Ниже приведены результаты вычислений высот геоида по формулам (15), (8) и их разности $\Delta\zeta$:

ζ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
(15)	0	3,033	11,763	25,122	41,482	58,859	75,156	88,420	97,067	100,069
(8)	0	3,045	11,804	25,191	41,563	58,926	75,188	88,405	96,988	99,999
$\Delta\zeta$	0	0,012	0,041	0,069	0,081	0,067	0,032	—0,015	—0,079	—0,070

Сравнение значений высот геоида, полученных гравиметрическим методом, со значениями, определенными по формуле (8), которая выведена геометрическим путем, позволяет судить о точности формул (6) и (7). Как и следовало ожидать, точность этих формул порядка квадрата сжатия Земли.

В заключение уточним вычисления, приведенные в работе [3]. Д. В. Загребин, получая формулу для аномалий силы тяжести модели, не учел различие широт на геоиде и эллипсоиде, которое имеет второй порядок малости. В связи с этим аномалии силы тяжести получат некоторую поправку. Найдем ее. Сила тяжести на геоиде в отдельных точках направлена по отвесной линии, а нормальная сила — по нормали к эллипсоиду. Угол между ними есть уклонение отвеса.

Следовательно,

$$g(B+\Delta B)=g(B)+\Delta B\frac{\partial g}{\partial B}+\cdots,$$

где ΔB — уклонение отвеса в плоскости меридиана. Высоты геоида в модели, которую принимал Д. В. Загребин, можно определять по формуле [4]

$$\zeta=\frac{a}{2}\alpha_t'\left(1-\frac{3}{2}e^2\sin^2\Phi\right)\cos^2\Phi\cos 2\lambda.$$

Здесь α_t' — сжатие экватора трехосного эллипсоида, равное 1 : 30000. Таким образом, по определению уклонения отвеса:

$$\Delta B=-\frac{\partial\zeta}{M\partial B}\approx-\left(1+e^2\frac{\sin^2\Phi}{2}\right)\frac{\partial\zeta}{a\partial\Phi};$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\Phi}=-\frac{a}{2}\alpha_t'\left(1+\frac{3}{2}e^2\cos 2\Phi\right)\sin 2\Phi\cos 2\lambda;$$

$$\frac{\partial g}{\partial B}=g_e A_t\sin 2B+\cdots;$$

$$\Delta B\frac{\partial g}{\partial B}\approx\frac{g_e}{2}\alpha_t' A_t\sin^2 2\Phi\cos 2\lambda, \tag{16}$$

где M — радиус кривизны меридиана эллипсоида; A_t — коэффициент нормальной формулы для силы тяжести на уровенном трехосном эллипсоиде, равный 0,005302925.

Следовательно, к аномалиям силы тяжести модели в работах Д. В. Загребина [1, 3] должна быть прибавлена поправка, определяемая по формуле (16). Высота геоида при этом увеличится на величину, получаемую после интегрирования

$$\Delta\zeta=aA_t\alpha_t'\left(\frac{4}{21}+\frac{2}{3}\sin^2\Phi\right)\cos^2\Phi\cos 2\lambda, \tag{17}$$

которая, например для $\Phi=0$, $\lambda=0$, принимает значение

$$\Delta\zeta=\frac{4}{21}aA_t\alpha_t'=\frac{4}{21}\cdot 6378245\cdot 0{,}005302925\frac{1}{30000}\approx 0{,}214 \text{ м}.$$

Тогда погрешность в высоте геоида для этой точки модели в работе Д. В. Загребина будет равна всего 4 мм, а не 0,210 м.

Список литературы: 1. *Загребин Д. В.* Теория регуляризированного геоида. — «Труды института теоретической астрономии АН СССР», 1952, вып. 2. 2. *Загребин Д. В.* О формуле Стокса для случая эллипсоидальной поверхности. — «Научные записки Львовского политехнического института, серия геодезическая», 1962, вып. 85, № 9. 3. *Загребин Д. В.* Об уточнении теории регуляризированного геоида. — «Бюллетень института теоретической астрономии АН УССР», 1972, т. 13, № 2 (145). 4. *Монин И. Ф.* К определению фигуры Земли с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия земного эллипсоида. — «Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1962, вып. 4.

Работа поступила 3 марта 1977 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.

УДК 528.14/16:681.3

В. И. МУХА, Б. Л. СКУИН
Львовский политехнический институт

УРАВНИВАНИЕ СЕТЕЙ С ИЗМЕРЕННЫМИ ДИРЕКЦИОННЫМИ УГЛАМИ

В последние годы получил большое распространение гироскопический метод ориентирования [2], к достоинствам которого можно отнести независимость наблюдений от погодных условий и сравнительную быстроту определения дирекционных углов. В связи с этим становится актуальным вопрос о построении геодезических сетей с измеренными дирекционными углами в районах, где отсутствуют пункты государственной основы. В настоящей статье на примере центральной системы (рисунок) рассмотрены некоторые вопросы уравнивания подобных построений коррелатным методом.

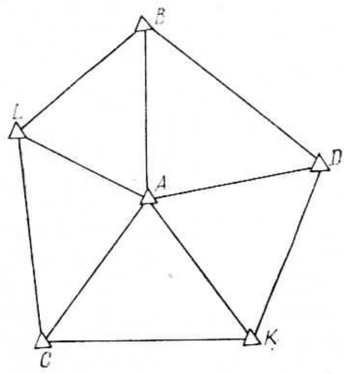

Схема сети.

При подсчете количества и определения вида условных уравнений в данной сети необходимо помнить, что уравнивание должно привести к равенству прямых и обратных дирекционных углов и, как в обычной угловой сети, к удовлетворению полюсного условия и условия фигур.

Общий вид условия дирекционных углов

$$\alpha_{пр} - \alpha_{обр} \pm 180 = 0. \quad (1)$$

Переходя к условному уравнению, получаем

$$(\alpha_{пр}) - (\alpha_{обр}) + w = 0, \quad (2)$$