

И. Ф. МОНИН, д-р техн. наук
Львовский политехнический институт

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМУЛЫ Д. В. ЗАГРЕБИНА ПО ТЕОРИИ РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОГО ГЕОИДА

Д. В. Загребин [1, 2, 3] создал теорию регуляризированного геоида. Применяя аппарат эллиптических функций Лямэ и выполняя оригинальные математические преобразования, он впервые получил формулу, по которой можно вычислять ондуляции геоида с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли для случая эллипсоидальной уровенной поверхности. Им же наиболее полно исследована знаменитая формула Стокса в теории фигуры Земли.

Формула Д. В. Загребина имеет следующий вид:

$$\zeta = \zeta_0 + \alpha \zeta_1, \quad (1)$$

$$\text{где } \zeta_0 = \frac{a}{4\pi\gamma} \int \Delta g V \sqrt{1 + i^2 \sin^2 u} \cdot Z(\psi) d\sigma; \quad \zeta_1 = \frac{1}{2\pi} \int \zeta_0 \cos^2 u S(\psi) d\sigma;$$

$$Z(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) + i^2 \left\{ 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2(2n+3)} P_n(\cos \psi) - \right.$$

$$- \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n+1)n^2}{(n-1)^2(2n+3)} P_n(\cos \psi) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2(2n+3)} \times$$

$$\left. \times \frac{\partial^2}{\partial \lambda_0^2} P_n(\cos \psi) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} P_n(\cos \psi) \right\} + 2q \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} P_n(\cos \psi),$$

где ζ — ондуляция геоида (или расстояние между геоидом и эллипсоидальной поверхностью); Δg — аномалия силы тяжести; a — большая полуось эллипсоида, a — сжатие эллипсоида по меридиану; γ — нормальное значение силы тяжести;

$$i^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}; \quad q = \frac{\omega^2 a}{g_e}; \quad \alpha = \frac{a - b}{a};$$

b — малая полуось эллипсоида; ω — угловая скорость вращения Земли; g_e — экваториальная постоянная нормальной силы тяжести; $P_n(\cos \psi)$ — полином Лежандра n -го порядка; ψ — угловое расстояние между фиксированной и текущей точками эллипсоида (начало координат принято в центре земного эллипсоида); u — приведенная широта; $S(\psi)$ — функция Стокса; $d\sigma$ — элемент поверхности сферы единичного радиуса; λ_0 — долгота фиксированной точки.

Д. В. Загребин выполнил также суммирование рядов, входящих в функцию $Z(\psi)$. Окончательную формулу для этой функции мы не приводим из-за ее громоздкости.

Теория Д. В. Загребина построена для частного случая, когда масса уровенного эллипсоида и гравитационный потенциал на его поверхности соответственно равны массе и потенциалу геоида, центры эллипсоида и геоида совпадают, а вращение их происходит около общей оси. Эти условия соблюдаются и при выводе формулы Стокса. Их называют «условиями применимости формулы Стокса».

Формула (1) была проверена на специальной модели. Как показано в статье [4], при практическом применении формулы (1) к модели после интегрирования и последующих вычислений появляется постоянная часть (вследствие несоблюдения условий Стокса в модели), которую приходится отбрасывать. Для геоида условия Стокса тоже не удовлетворяются. В связи с этим уточним формулу (1) и добьемся, чтобы она учитывала различия массы и гравитационного потенциала геоида и уровенного отсчетного эллипсоида.

Пусть W_0 — потенциал силы тяжести на геоиде; U_0 — нормальный потенциал на уровенном эллипсоиде; ν — внешняя нормаль к эллипсоиду; g — сила тяжести на геоиде; γ — нормальная сила тяжести на эллипсоиде; T — возмущающий потенциал; Δg — аномалия силы тяжести.

Тогда на геоиде легко составить [4] граничное условие

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} - \frac{T}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} = -\Delta g - \frac{W_0 - U_0}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \nu}. \quad (2)$$

Как и Д. В. Загребин [1], перейдем в уравнении (2) от производной по ν к производной по эллиптической координате ρ . Разложив $\partial \gamma / \partial \nu$ в ряд по степеням сжатия a и зная, что $W_0 - U_0$ и T , Δg — малые величины второго порядка ($a^2 W$, $a^2 g$), из формулы (2) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \rho} + (1 + q + \alpha \cos^2 \Phi) \frac{2T}{\rho} = \\ = -\Delta g (1 + \alpha \sin^2 \Phi) + \frac{2}{a} (W_0 - U_0) (1 + q + \alpha \cos^2 \Phi). \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку в рассматриваемом случае

$$T = \gamma \zeta + W_0 - U_0, \quad (4)$$

то, полагая, что $T = T_0 + \alpha T_1$, $\zeta = \zeta_0 + \alpha \zeta_1$, из формул (3) и (4) находим:

$$\frac{\partial T_0}{\partial \rho} + (1 + q) \frac{2T_0}{\rho} = -\Delta g + \frac{2}{a} (1 + q) (W_0 - U_0);$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \rho} + \frac{2T_1}{\rho} = -\Delta g \sin^2 \Phi - \frac{2\zeta_0}{a} \gamma \cos^2 \Phi;$$

$$T_0 = \gamma \zeta_0 + W_0 - U_0, \quad T_1 = \gamma_e \zeta_1,$$

где Φ — геоцентрическая широта.

Далее, точно так же, как это делает Д. В. Загребин, разложим T_0 в бесконечный ряд эллиптических функций Лямэ. Причем будем учитывать функции нулевого порядка в разложении T_0 . Легко установить, что в данном случае

$$T_0 = \frac{a}{4\pi} \int \Delta g^* Z^*(\psi) d\sigma; \quad \Delta g^* = \Delta g - \frac{2}{a} (W_0 - U_0)(1 + q);$$

$$Z^*(\psi) = Z(\psi) - 1 - \frac{2}{3}\alpha + 2q, \quad (5)$$

или окончательно

$$\gamma_{\zeta_0} = \frac{a}{4\pi} \int \Delta g Z(\psi) d\sigma - \frac{a}{4\pi} \left(1 + \frac{2}{3}\alpha - 2q \right) \int \Delta g d\sigma +$$

$$+ \left(1 + \frac{4}{3}\alpha - 2q \right) (W_0 - U_0); \quad (6)$$

$$g_e \zeta_1 = \frac{a}{4\pi} \int \left(\Delta g \sin^2 \Phi + \frac{2\zeta_0}{a} \gamma \cos^2 \Phi \right) [S(\psi) - 1] d\sigma. \quad (7)$$

Таким образом, формулы (6) и (7) уточняют теорию регуляризированного геоида в том случае, когда условия Стокса не соблюдаются.

Проверим формулы (6) и (7) на модели, взятой из статьи [4]. Напомним, что в этой модели в качестве геоида принят уровненный эллипсоид Красовского со следующими гравиметрическими характеристиками:

$$g = g_e (1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B - \beta_2 \sin^2 B \sin^2 2B);$$

$$e^2 = 0,006\,693\,422; \quad \beta = 0,005\,302\,925; \quad \beta_1 = 0,000\,005\,849;$$

$$\beta_2 = 0,000\,000\,032; \quad \alpha = 0,003\,352\,330; \quad g_e = 978\,049 \text{ мгл};$$

$$q = 0,003\,467\,749; \quad a = 6\,378\,245 \text{ м.}$$

Здесь B — геодезическая широта.

За отсчетную поверхность модели возьмем уровненный эллипсоид вращения, у которого большая полуось такая же, а малая — на 100 м больше, чем в эллипсоиде Красовского. Коэффициенты нормальной формулы и другие характеристики отсчетного эллипсоида определяются так:

$$\gamma_e = 978\,049 \text{ мгл}; \quad \beta' = 0,005\,318\,670; \quad \beta_1' = 0,000\,005\,828;$$

$$\beta_2 = 0,000\,000\,032; \quad e'^2 = 0,006\,662\,170; \quad \alpha' = 0,003\,336\,652;$$

$$\zeta_{\text{geom}} = -a \left[(\alpha_r - \alpha_e) + \frac{2}{3} (\alpha_r^2 - \alpha_e^2) + 2 (\alpha_r^3 - \alpha_e^3) \right] \sin^2 \Phi +$$

$$+ a \left[\frac{3}{2} (\alpha_r^2 - \alpha_e^2) + \frac{9}{2} (\alpha_r^3 - \alpha_e^3) \right] \sin^4 \Phi - \frac{5}{2} a (\alpha_r^3 - \alpha_e^3) \sin^6 \Phi; \quad (8)$$

$$\Delta g = g_e (\delta_1 \sin^2 \Phi + \delta \sin 2\Phi), \quad \delta_1 = \beta - \beta';$$

$$\delta = \frac{e^2}{2} \delta_1 - \delta_2 + \beta \Delta \alpha; \quad \delta_2 = \beta_1 - \beta_1'; \quad \Delta \alpha = \alpha_r - \alpha_e, \quad (9)$$

α_r, α_e — сжатия геоида и эллипсоида.

Воспользовавшись известными формулами для уровенного эллипсоида

$$fM = a^2 \gamma_e \left(1 - \alpha + \frac{3}{2} q - \frac{15}{14} q \gamma - \frac{1}{294} q \alpha^2 + \dots \right);$$

$$W = a \gamma_e \left(1 - \frac{2}{3} \alpha + \frac{11}{6} q - \frac{1}{5} \alpha^2 - \frac{8}{105} \alpha^3 - \frac{4}{7} \alpha q - \frac{118}{735} \alpha^2 q + \dots \right),$$

найдем разность масс и потенциалов геоида и отсчетного уровняного эллипсоида модели:

$$f(M_r - M_e) = -\gamma_e a^2 \left(1 + \frac{15}{14} q \right) \Delta \alpha; \quad (10)$$

$$W_r - W_e = -\gamma_e a \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{5} (\alpha_r - \alpha_e) + \frac{4}{7} q \right] \Delta \alpha, \quad (11)$$

где f — гравитационная постоянная; M_r, M_e — масса геоида и эллипсоида; W_r, W_e — их гравитационные потенциалы.

Принимая во внимание следующие интегралы:

$$\int S(\psi) d\sigma = 0, \quad \int S(\psi) \sin^2 \Phi' d\sigma = 4\pi \left(\sin^2 \Phi - \frac{1}{3} \right);$$

$$\int S(\psi) \sin^4 \Phi' d\sigma = -\frac{36}{35} \pi + \frac{16}{7} \pi \sin^2 \Phi_0 + \frac{4}{3} \pi \sin^4 \Phi;$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2(2n+3)} \int P_n(\cos \psi) \sin^2 \Phi' d\sigma = \frac{4}{7} \pi \left(\sin^2 \Phi - \frac{1}{3} \right);$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n+1)n^2}{(n-1)^2(2n+3)} \int P_n(\cos \psi) \sin^2 \Phi' d\sigma = \frac{16}{7} \left(\sin^2 \Phi - \frac{1}{3} \right) \pi;$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2(2n+3)} \int \sin^2 \Phi' \frac{\partial^2}{\partial \lambda_0^2} P_n(\cos \psi) d\sigma = 0;$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} \int P_n(\cos \psi) \sin^2 \Phi' d\sigma = 4\pi \left(\sin^2 \Phi - \frac{1}{3} \right),$$

из формул (6) и (7) после подстановки в них аномалий силы тяжести (9) получаем:

$$\gamma \zeta_0 = ag_e \left\{ -\frac{\delta_1}{3} - \frac{32}{105} \delta + \frac{3}{7} e^2 \delta_1 - \frac{2}{3} q \delta_1 + \left(\delta_1 + \frac{12}{7} \delta - \frac{9}{7} e^2 \delta_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2q \delta_1 \right) \sin^2 \Phi - \frac{4}{3} \delta \sin^4 \Phi \right\} + (W_0 - U_0) \left(1 + \frac{4}{3} \alpha - 2q \right) - \\ - ag_e \left(1 + \frac{2}{3} \alpha - 2q \right) \left(\frac{1}{3} \delta_1 + \frac{18}{15} \delta \right); \quad (12)$$

$$\gamma_e \zeta_1 = ag_e \left\{ -\frac{92}{105} \delta_1 + \frac{10}{7} \delta_1 \sin^2 \Phi - \frac{\delta_1}{3} \sin^4 \Phi \right\} + \\ + \left(W_0 - U_0 - \frac{2}{3} ag_e \delta_1 \right) \left(-\frac{2}{3} - 2 \sin^2 \Phi \right). \quad (13)$$

После этого легко найти окончательную высоту геоида

$$\zeta = a \left\{ \left(\delta_1 + \frac{12}{7} \delta + 2q \delta_1 - \frac{4}{7} e^2 \delta_1 \right) \sin^2 \Phi - \left(\frac{e^2}{6} \delta_1 + \beta' \delta_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4}{3} \delta \right) \sin^4 \Phi \right\} + \frac{W_0 - U_0}{g_e} - a \left(\frac{2}{3} \delta_1 + \frac{88}{105} \delta + \frac{4}{3} q \delta_1 - \frac{34}{105} e^2 \delta_1 \right). \quad (14)$$

Для данной модели при $\Phi=0$, $\zeta=0$. Поэтому разность потенциалов, вычисленная по формуле (14), $W_0 - U_0 = -0,000\,010\,517\,g_e a$. Следовательно, погрешность в высоте геоида ζ за счет несовпадения этой разности с действительной, вычисленной по формуле (11), равна 0,083 м. Отсюда расчетная формула для высот геоида модели примет вид

$$\xi = a \left\{ \left(\delta_1 + \frac{12}{7} \delta + 2q \delta_1 - \frac{4}{7} e^2 \delta_1 \right) \sin^2 \Phi - \right. \\ \left. - \left(\frac{e^2}{6} \delta_1 + \beta' \delta_1 + \frac{4}{3} \delta \right) \sin^4 \Phi \right\}. \quad (15)$$

Ниже приведены результаты вычислений высот геоида по формулам (15), (8) и их разности $\Delta \zeta$:

ζ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
(15)	0	3,033	11,763	25,122	41,482	58,859	75,156	88,420	97,067	100,069
(8)	0	3,045	11,804	25,191	41,563	58,926	75,188	88,405	96,988	99,999
$\Delta \zeta$	0	0,012	0,041	0,069	0,081	0,067	0,032	-0,015	-0,079	-0,070

Сравнение значений высот геоида, полученных гравиметрическим методом, со значениями, определенными по формуле (8), которая выведена геометрическим путем, позволяет судить о точности формул (6) и (7). Как и следовало ожидать, точность этих формул порядка квадрата сжатия Земли.

В заключение уточним вычисления, приведенные в работе [3]. Д. В. Загребин, получая формулу для аномалий силы тяжести модели, не учел различие широт на геоиде и эллипсоиде, которое имеет второй порядок малости. В связи с этим аномалии силы тяжести получат некоторую поправку. Найдем ее. Сила тяжести на геоиде в отдельных точках направлена по отвесной линии, а нормальная сила — по нормали к эллипсоиду. Угол между ними есть уклонение отвеса.

Следовательно,

$$g(B + \Delta B) = g(B) + \Delta B \frac{\partial g}{\partial B} + \dots,$$

где ΔB — уклонение отвеса в плоскости меридiana. Высоты геоида в модели, которую принимал Д. В. Загребин, можно определять по формуле [4]

$$\zeta = \frac{a}{2} \alpha_t' \left(1 - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \Phi \right) \cos^2 \Phi \cos 2\lambda.$$

Здесь α_t' — сжатие экватора трехосного эллипсоида, равное 1 : 30000. Таким образом, по определению уклонения отвеса:

$$\begin{aligned} \Delta B &= -\frac{\partial \zeta}{M \partial B} \approx -\left(1 + e^2 \frac{\sin^2 \Phi}{2} \right) \frac{\partial \zeta}{a \partial \Phi}; \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \Phi} &= -\frac{a}{2} \alpha_t' \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \cos 2\Phi \right) \sin 2\Phi \cos 2\lambda; \\ \frac{\partial g}{\partial B} &= g_e A_t \sin 2B + \dots; \\ \Delta B \frac{\partial g}{\partial B} &\approx \frac{g_e}{2} \alpha_t' A_t \sin^2 2\Phi \cos 2\lambda, \end{aligned} \quad (16)$$

где M — радиус кривизны меридиана эллипсоида; A_t — коэффициент нормальной формулы для силы тяжести на уровненном трехосном эллипсоиде, равный 0,005302925.

Следовательно, к аномалиям силы тяжести модели в работах Д. В. Загребина [1, 3] должна быть прибавлена поправка, определяемая по формуле (16). Высота геоида при этом увеличится на величину, получаемую после интегрирования

$$\Delta \zeta = a A_t \alpha_t' \left(\frac{4}{21} + \frac{2}{3} \sin^2 \Phi \right) \cos^2 \Phi \cos 2\lambda, \quad (17)$$

которая, например для $\Phi = 0, \lambda = 0$, принимает значение

$$\Delta \zeta = \frac{4}{21} a A_t \alpha_t' = \frac{4}{21} \cdot 6378245 \cdot 0,005302925 \frac{1}{30000} \approx 0,214 \text{ м.}$$

Тогда погрешность в высоте геоида для этой точки модели в работе Д. В. Загребина будет равна всего 4 мм, а не 0,210 м.

Список литературы: 1. Загребин Д. В. Теория регуляризированного геоида. — «Труды института теоретической астрономии АН СССР», 1952, вып. 2. 2. Загребин Д. В. О формуле Стокса для случая эллипсоидальной поверхности. — «Научные записки Львовского политехнического института, серия геодезическая», 1962, вып. 85, № 9. 3. Загребин Д. В. Об уточнении теории регуляризированного геоида. — «Бюллетень института теоретической астрономии АН УССР», 1972, т. 13, № 2 (145). 4. Монин И. Ф. К определению фигуры Земли с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия земного эллипсоида. — «Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1962, вып. 4.

Работа поступила 3 марта 1977 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.