РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1971 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 13

УДК 528.22:531.26

Л. П. ПЕЛЛИНЕН

СОГЛАСОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФОРМУЛ ВТОРОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ВОЗМУЩАЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА И УКЛОНЕНИЙ ОТВЕСА

В ряде работ М. И. Марыч (см., например [6]) защищает тезис о возможности представить решение краевой задачи Молоденского путем преобразования формулы

$$T = \frac{R}{4\pi} \int\limits_{\omega} \left[G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n G_0}{d\rho^n} H^n \right] [S(\psi) - 1] \, d\omega + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \frac{d^n T}{d\rho^n} H^n, \tag{1}$$

которая соответствует аналитическому продолжению аномалий силы тяжести G_0 с физической поверхности (точнее поверхности Земли первого приближения) на отсчетную, вычислению возмущающего потенциала на этой поверхности, пользуясь формулой Стокса, и снова аналитическому продолжению уже найденных величин на физическую поверхность Земли. Через H в (1) обозначены нормальные высоты, через R — радиус отсчетной поверхности, которая принята за сферу.

Недостатком формулы (1) является то, что входящие в нее два ряда в общем случае будут расходящимися. Это ставит под сомнение возможность использования формулы (1) даже как приближенной, когда ограничиваются членами некоторого порядка n.

Заслуга М. И. Марыча состоит в том, что он предложил представить (1) не в виде ряда по степеням H, а, по аналогии с известным решением М. С. Молоденского, — в виде ряда по степеням вспомогательного параметра k, который входит в формулу радиуса-вектора $\bar{\rho}$ сглаженной физической поверхности

$$\bar{\rho} = R + kH. \tag{2}$$

При $k=1$ вектор $\bar{\rho}$ переходит в радиус-вектор ρ поверхности Земли первого приближения. Для перехода к новой формуле необходимо представить в (1) в виде разложения в ряд по степеням k возмущающий потенциал

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} k^n T_n, \tag{3}$$

и производные аномалий силы тяжести и возмущающего потенциала

$$\frac{d^n G_0}{d\rho^n} = \sum_{m=0}^{\infty} k^m \left(\frac{d^n G_0}{d\rho^n}\right)_m,$$
$$\frac{d^n T}{d\rho^n} = \sum_{m=0}^{\infty} k^m \left(\frac{d^n T}{d\rho^n}\right)_m. \tag{4}$$

Величины H^n нужно заменить на $k^n H^n$.

Собирая все члены с одной степенью k, М. И. Марыч получает следующую формулу для n-члена разложения по этому параметру $(n>0)$:

$$T_n = \frac{R}{4\pi}\int_{\omega} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{d^m G_0}{d\rho^m}\right)_{n-m} H^m [S(\psi)-1]\, d\omega +$$
$$+ \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m!}\left(\frac{d^m T}{d\rho^m}\right)_{n-m} H^m. \tag{5}$$

Для T_0 действительна формула Стокса

$$T_0 = \frac{R}{4\pi}\int_{\omega} G_0 [S(\psi)-1]\, d\omega. \tag{6}$$

Искомое решение для Земли первого приближения имеет вид

$$T = \lim_{k\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} k^n T_n = \sum_{n=0}^{\infty} T_n. \tag{7}$$

Несомненно, что результат вычисления T_n по формуле (5) должен быть тем же, что и в любых других формулах, в которых используется разложение решения по параметру k вида (3), иначе какая-либо из формул неверна. Таким образом, М. И. Марычем предложен новый путь определения T_n, который должен принципиально давать тот же результат, что и другие формулы, но отличается простотой записи и поэтому заслуживает внимания.

Следует подчеркнуть, что нахождение T по формулам (5) и (7) нельзя трактовать как использование операций по аналитическому продолжению аномалий и возмущающего потенциала в обычном понимании. Результат только ухудшится, если вместо членов рядов (4) взять точные значения производных аномалий и возмущающего потенциала. Нельзя также, получив в каком-то приближении аномалии силы тяжести, «приведенные» к отсчетной поверхности, использовать их для вычисления T в точках физической поверхности по обобщенной формуле Стокса. Обязательно надо применить тот путь перехода к физической поверхности, который соответствует формуле (5).

Наконец, следует указать, что переход к ряду по степеням k полностью не избавляет от недостатков аналитического продолжения. Можно ожидать, что из-за расходимости рядов, входящих в формулу (1), будут значительны отдельные слагаемые в суммах, входящих в (5), хотя и величины T_n будут невелики. Однако подобный недостаток присущ и другим методам вычисления T_n, так что только опыт численного решения задачи Молоденского разными путями позволит выбрать наиболее целесообразный метод вычисления в различных случаях.

Я подробно остановился на принципах метода, предложенного М. И. Марычем, поскольку они до сих пор встречают возражения. Лучшее средство снять их — показать аналитически идентичность формул для T_n, полученных М. И. Марычем и другими исследователями. Сам Марыч показал идентичность его формул для нулевого и первого приближения с формулами М. С. Молоденского [4] и В. В. Бровара [5]. В дальнейшем сопоставлением различных формул первого приближения занимался ряд авторов, в том числе и автор статьи [10]. Наиболее обстоятельные выкладки сделаны Х. Морицем [12]. Однако дальше первого приближения пока никому пойти не удалось. Такая попытка предпринята в данной статье для второго приближения.

СВОДКА ФОРМУЛ ВТОРОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ВОЗМУЩАЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА

Ограничимся сравнением с формулами Марыча и между собой формул для поправок второго приближения T_2, данных М. С. Молоденским [7] и В. В. Броваром (вариант II) [1]. Из-за трудности выкладок другими формулами второго приближения заниматься не будем. Как показали Марыч и Бровар, при сравнении формул первого приближения в оригинальные результаты Молоденского и Бровара должна войти поправка $-\dfrac{2H}{R}T_0$, которой можно пренебречь при вычислении T, но которая важна при получении производных от T. Аналогичная поправка вида $-\dfrac{2H}{R}T_1$ войдет во второе приближение. Чтобы не делать дополнительных выкладок и сохранить написание формул Молоденского и Бровара в оригинальном виде, примем, что отсчетная поверхность проходит через точку, для которой определяют возмущающий потенциал T, и соответственно изменим написание формул Марыча. Возможность такого перехода без нарушения общности выводов еще раз подтвердил М. И. Марыч в [6], где он показал неизменность результатов вычислений по своим формулам при изменении всех высот H на постоянную величину.

Используемые формулы второго приближения приведены ниже. Нам пришлось в связи с переходом к новой отсчетной поверхности заменить в формулах Молоденского и Бровара высоты H на разности h нормальных высот H в текущей точке и H_c в точке, в которой ищут возмущающий потенциал. Однако такой переход не приводит к изменению каких-либо поправочных членов в указанных формулах, так что практически их всегда можно вычислить, используя полные нормальные высоты.

1. Формулы М. С. Молоденского

$$T_2 = \frac{R}{4\pi}\int\limits_{\omega} G_2[S(\psi)-1]\,d\omega - \frac{R^2}{2}\int\limits_{\omega}\frac{(h-\bar{h})^2}{r_0^3}\chi_0\,d\omega, \tag{8}$$

$$G_2 = R^2\int\limits_{\omega}\frac{\chi_1(h-\bar{h})}{r_0^3}\,d\omega - \frac{R}{4}\int\limits_{\omega}\frac{(h-\bar{h})^2}{r_0^3}\chi_0\,d\omega + 2\pi\chi_0\,\mathrm{tg}^2\,\alpha, \tag{9}$$

$$2\pi\chi_0 = G_0 + \frac{3}{2}\frac{T_0}{R}, \tag{10}$$

$$2\pi\chi_1 = G_1 + \frac{3}{2}\frac{T_1}{R}, \tag{11}$$

$$G_1 = R^2\int\limits_{\omega}\frac{(h-\bar{h})\chi_0}{r_0^3}\,d\omega. \tag{12}$$

2. Формулы В. В. Бровара

$$T_2=\frac{R}{4\pi}\int\limits_{\omega}\mu_2[S(\psi)-1]\,d\omega-\frac{R^2}{4\pi}\int\limits_{\omega}\frac{(h-\bar h)^2}{r_0^3}\mu_0\,d\omega, \tag{13}$$

$$\mu_2=\frac{R^2}{2\pi}\int\limits_{\omega}\frac{\mu_1(h-\bar h)}{r_0^3}d\omega+\mu_0\operatorname{tg}^2\alpha, \tag{14}$$

$$\mu_0=G_0, \tag{15}$$

$$\mu_1=\frac{R^2}{2\pi}\int\limits_{\omega}\frac{(h-\bar h)\mu_0}{r_0^3}d\omega. \tag{16}$$

3. Формула М. И. Марыча

$$T_2=\frac{R}{4\pi}\int\limits_{\omega}\left[-\left(\frac{\partial G_0}{\partial\rho}\right)_1 h-\left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial\rho^2}\right)_0\frac{h^2}{2}\right][S(\psi)-1]. \tag{17}$$

Вопросы вычисления производных $\left(\frac{\partial G_0}{d\rho}\right)_1$ и $\left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial\rho^2}\right)_0$ рассмотрены в разделе 3.

В формулах (8)—(17) используются обозначения (кроме общепринятых и указанных ранее):

α — угол наклона физической поверхности; $r_0=2R\sin\frac{\psi}{2}$ — расстояние между проекциями фиксированной и текущей точек на отсчетную сферу.

Величины, относящиеся к фиксированным точкам, отмечены черточкой сверху.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА СФЕРЕ

В дальнейшем изложении понадобятся некоторые типовые формулы, которые приводятся ниже. Рассмотрены преобразования гармонических функций, которые принимают на отсчетной сфере заданные значения. К указанным значениям предъявляются легко выполнимые требования — они должны иметь непрерывные и ограниченные значения первых и вторых производных по координатам на поверхности отсчетной сферы.

1. Некоторые формулы для сферической Земли

$$\frac{\partial U}{\partial\rho}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega}\frac{U-\bar U}{r_0^3}d\omega-\frac{U}{R}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega}\frac{\frac{dU}{d\rho}-\frac{d\bar U}{d\rho}}{r_0^3}d\omega-\frac{2}{R}\frac{dU}{d\rho}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = -\Delta_2 U = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right), \tag{20}$$

$$D(U, V) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}. \tag{21}$$

Формулы взяты из [7].

Через x и y обозначены взаимно перпендикулярные координаты на поверхности отсчетной сферы.

$$U = -\frac{R}{4\pi}\int\limits_{\omega}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{2U}{R}\right)(S(\psi) - 1)\, d\omega \tag{22}$$

есть аналог формулы Стокса.

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{R}{4\pi}\int\limits_{\omega}\left(\frac{\partial U}{d\rho} + \frac{2U}{R}\right)\frac{dS(\psi)}{d\psi}\cos A\, d\omega \tag{23}$$

есть аналог формулы Венинг-Мейнеса. Через A обозначен полярный угол от направления x. Формулы указаны в [10] и [13].

2. Формулы, содержащие функцию $\nu_U = Uh$

$$\frac{R^2}{2\pi}\int\limits_{\omega}\frac{U(h-\bar{h})}{r_0^3}\, d\omega = \frac{\partial \nu_U}{\partial \rho} - h\frac{\partial U}{\partial \rho}, \tag{24}$$ (см. [8])

$$\Delta_2 \nu_U = U\Delta_2 h + 2D(U, h) + h\Delta_2 U. \tag{25}$$

3. Формулы, содержащие функцию $\lambda_U = U\dfrac{h^2}{2}$

$$\Delta_2 \lambda_U = U \operatorname{tg}^2\alpha + Uh\Delta_2 h + 2hD(U, h) + \frac{h^2}{2}\Delta_2 U, \tag{26}$$

где $\operatorname{tg}^2\alpha = D(h, h)$.

$$\frac{R^2}{4\pi}\int\limits_{\omega}\frac{U(h-\bar{h})^2}{r_0^3}\, d\omega = \frac{\partial \lambda_U}{\partial \rho} - \frac{R^2}{2\pi}h\int\limits_{\omega}\frac{U(h-\bar{h})}{r_0^3}\, d\omega - \frac{\lambda_U}{2R}. \tag{27}$$

При получении формул (25) и (26) использовано уравнение (20).

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

В формулу Марыча входят члены разложения производных аномалий по параметру k. Для $\left(\dfrac{dG_0}{d\rho}\right)_1$ получены независимо формулы О. М. Остачем [9]

$$\left(\frac{dG_0}{d\rho}\right)_1 = -\frac{R^2}{2\pi}\int\limits_{\omega}\left(\frac{dG_0}{d\rho}\right)_0\frac{h-\bar{h}}{r_0^3}\, d\omega + \frac{R}{4\pi}\int\limits_{\omega}\frac{(G_0+\bar{G_0})(h-\bar{h})}{r_0^3}\, d\omega \tag{28}$$

и М. И. Юркиной [11]

$$\left(\frac{dG_0}{d\rho}\right)_1 = \frac{R^2}{2\pi}\int\limits_{\omega}\frac{\mu_1 - \bar{\mu_1}}{r_0^3}\, d\omega + 2D(G_0, h) + G_0\Delta_2 h. \tag{29}$$

В этих формулах

$$\left(\frac{dG_0}{d\rho}\right)_0=\frac{R^2}{2\pi}\int\limits_{\omega}\frac{G_0-\overline{G}_0}{r_0^3}\,d\omega-2\frac{G_0}{R} \tag{30}$$

есть производная аномалии в нулевом приближении (развитие формулы Нумероза, полученное для сферической отсчетной поверхности); μ_1 — поправка первого приближения в решении Бровара (см. (16)). Последний член в (28) можно опустить, так как после подстановки (28) в (17) он даст пренебрегаемый член порядка $\mu_1\frac{h}{R}$.

Покажем идентичность формул Остача и Юркиной. Для этого преобразуем первый член в (29). В соответствии с (24) представим

$$\mu_1=\frac{d\nu_{G_0}}{d\rho}-h\frac{dG_0}{d\rho}.$$

Если для вычисления $\frac{dG_0}{d\rho}$ вместо формулы (14), которая соответствует дифференцированию гармонической функции, принимающей на отсчетной сфере значения G_0, использовать формулу (30), то

$$\mu_1=\frac{d\nu_{G_0}}{d\rho}-h\left(\frac{dG_0}{d\rho}\right)_0-\frac{h}{R}G_0. \tag{31}$$

Последним членом можно пренебречь. Подставим (31) в интегральный член в (29) и выполним некоторые преобразования:

$$\frac{R^2}{2\pi}\int\limits_{\omega}\frac{\mu_1-\overline{\mu}_1}{r_0^3}\,d\omega=-\frac{R^2}{2\pi}\int\limits_{\omega}\left(\frac{dG_0}{d\rho}\right)_0\frac{h-\overline{h}}{r_0^3}\,d\omega-$$

$$-\frac{R^2}{2\pi}h\int\limits_{\omega}\frac{\left(\frac{dG_0}{d\rho}\right)_0-\left(\frac{d\overline{G}_0}{d\rho}\right)_0}{r_0^3}\,d\omega+\frac{R^2}{2\pi}\int\limits_{\omega}\frac{\frac{\partial\nu_{G_0}}{\partial\rho}-\frac{\partial\overline{\nu}_{G_0}}{\partial\rho}}{r_0^3}\,d\omega. \tag{32}$$

С принятой точностью имеем, используя (16), (19), (24) и (25)

$$-\frac{R^2}{2\pi}h\int\limits_{\omega}\frac{\left(\frac{dG_0}{d\rho}\right)_0-\left(\frac{d\overline{G}_0}{d\rho}\right)_0}{r_0^3}\,d\omega=-h\frac{d^2G_0}{d\rho^2}=h\Delta_2G_0;$$

$$\frac{R^2}{2\pi}\int\limits_{\omega}\frac{\frac{\partial\nu_{G_0}}{\partial\rho}-\frac{\partial\overline{\nu}_{G_0}}{\partial\rho}}{r_0^3}\,d\omega=\frac{\partial^2\nu_{G_0}}{\partial\rho^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial\nu_{G_0}}{\partial\rho}=-G_0\Delta_2h-2D(G_0,h)-h\Delta_2G_0+$$

$$+\frac{2\mu_1}{R}+2\frac{h}{R}\frac{dG_0}{d\rho}\approx-G_0\Delta_2h-2D(G_0,h)-h\Delta_2G_0.$$

Таким образом, (32) получает вид

$$\frac{R^2}{2\pi}\int\limits_{\omega}\frac{\mu_1-\overline{\mu}_1}{r_0^3}\,d\omega=-\frac{R^2}{2\pi}\int\limits_{\omega}\left(\frac{dG_0}{d\rho}\right)_0\frac{h-\overline{h}}{r_0^3}\,d\omega-G_0\Delta_2h-2D(G_0,h). \tag{33}$$

Подставив (33) в (29), убеждаемся в идентичности формул Остача и Юркиной. Практически при расчетах по формулам Марыча выгоднее формула О. М. Остача, однако в последующих выкладках по преобразованию выводов различных авторов лучше пользоваться формулой (29).

При вычислении $\left(\frac{d^2G_0}{d\rho^2}\right)_0$ достаточную точность дает формула для плоской отсчетной поверхности

$$\left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial \rho^2}\right)_0 = \frac{R^2}{2\pi}\int\limits_{\omega} \frac{\left(\frac{dG_0}{d\rho}\right)_0 - \left(\frac{d\overline{G}_0}{d\rho}\right)_0}{r_0^3}\,d\omega, \tag{34}$$

причем во всех последующих выкладках можно положить

$$\left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial \rho^2}\right)_0 = -\Delta_2 G_0. \tag{35}$$

СРАВНЕНИЕ ФОРМУЛ МАРЫЧА И БРОВАРА

С учетом (27) и (16) формула Бровара (13) для возмущающего потенциала принимает вид

$$T_2 = \frac{R}{2\pi}\int \mu_2 [S(\psi) - 1]\,d\omega - \frac{\partial\lambda_{G_0}}{d\rho} + h\mu_1 + \frac{h^2}{2R} G_0. \tag{36}$$

Последние два члена равны нулю, поскольку в исследуемой точке $h=0$. Приведем (36) к виду (17).

В соответствии с (15) и (24) запишем μ_2 (формула (14)) в виде

$$\mu_2 = \frac{\partial \nu_{\mu_1}}{\partial \rho} - h\frac{\partial \mu_1}{\partial \rho} + G_0 \operatorname{tg}^2 \alpha. \tag{37}$$

По формуле Юркиной (29) с учетом (18) имеем с точностью $\mu_1 \frac{h}{R}$

$$h\left(\frac{dG_0}{d\rho}\right)_1 = h\frac{\partial \mu_1}{\partial \rho} + 2hD(G_0, h) + G_0 h \Delta_2 h. \tag{38}$$

Исходя из (20), (26) и (35), получаем

$$\frac{\partial^2 \lambda_{G_0}}{\partial \rho^2} = -\Delta_2 \lambda_{G_0} = -G_0 \operatorname{tg}^2 \alpha - G_0 h \Delta_2 h - 2hD(G_0, h) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2 G_0}{d\rho^2}\right)_0. \tag{39}$$

Определив из (38) $h\frac{\partial \mu_1}{\partial \rho}$, а из (39) — $G_0 \operatorname{tg}^2 \alpha$ и подставив в (37), находим

$$\mu_2 = -h\left(\frac{dG_0}{d\rho}\right)_1 + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2 G_0}{d\rho^2}\right)_0 - \frac{d^2 \lambda_{G_0}}{d\rho^2} + \frac{\partial \nu_{\mu_1}}{\partial \rho}. \tag{40}$$

Представим

$$\mu_2 = -h\left(\frac{dG_0}{d\rho}\right)_1 + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2 G_0}{d\rho^2}\right)_0 - \left[\left(\frac{\partial^2 \lambda_{G_0}}{\partial \rho^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \lambda_{G_0}}{\partial \rho}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{R}\left(\frac{\partial \lambda_{G_0}}{\partial \rho} + \frac{2\lambda_{G_0}}{R}\right) - \left(\frac{d\nu_{\mu_1}}{d\rho} + \frac{2\nu_{\mu_1}}{R}\right)\right] - \frac{2h^2}{R^2} G_0 - \frac{2h}{R}\mu_1. \tag{41}$$

Последними двумя членами можно пренебречь. Три члена, заключенные в квадратные скобки, после подстановки μ_2 в (36) и интегрирования в соответствии с (22) дают

$$\frac{\partial\lambda_{G_0}}{\partial\rho}-\frac{2\lambda_{G_0}}{R}-\nu_{\mu_1}=\frac{\partial\lambda_{G_0}}{\partial\rho}-\frac{h^2 G_0}{R}-h\mu_1.$$

Эти члены компенсируют неинтегральные члены в (36), если учесть, что в исследуемой точке $h=0$. Таким образом, приходим к формуле Марыча (17), то есть идентичность формул Бровара и Марыча доказана.

СРАВНЕНИЕ ФОРМУЛ МОЛОДЕНСКОГО И БРОВАРА

Возьмем разность величин T_2 в формулах (8) Молоденского и (13) Бровара. Покажем, что полученное равенство

$$\frac{R}{4\pi}\int\limits_{\omega}(G_2-\mu_2)[S(\psi)-1]\,d\omega-\frac{R^2}{4\pi}\int\limits_{\omega}\frac{(h-\bar{h})^2}{r_0^3}(2\pi\chi_0-\mu_0)\,d\omega=0 \quad (42)$$

является тождеством.

Имеем из (10) и (15)

$$2\pi\chi_0-\mu_0=\frac{3}{2}\frac{T_0}{R}. \quad (43)$$

Как замечено В. Ф. Еремеевым [3], в формуле для G_2 можно при выводах с точностью $\frac{h}{R}$ пренебречь вторым членом. Тогда из (9)—(13) и (14)—(16) находим

$$G_2-\mu_2=\frac{R^2}{2\pi}\int\limits_{\omega}\frac{\Phi(h-\bar{h})}{r_0^3}\,d\omega+\frac{3}{2}\frac{T_0}{R}\operatorname{tg}^2\alpha, \quad (44)$$

где

$$\Phi=\frac{3}{2R}\left[T_1+\frac{R^2}{2\pi}\int\limits_{\omega}\frac{T_0(h-\bar{h})}{r_0^3}\,d\omega\right]. \quad (45)$$

Представим, пользуясь (24),

$$\Phi=\frac{3}{2R}\left[T_1+\frac{\partial\nu_{T_0}}{\partial\rho}-h\frac{\partial T_0}{\partial\rho}\right];\qquad \frac{R^2}{2\pi}\int\limits_{\omega}\frac{\Phi(h-\bar{h})}{r_0^3}\,d\omega=\frac{\partial\nu_\Phi}{\partial\rho}-h\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}=$$

$$=\frac{3}{2R}\left[\frac{\partial\nu_{T_1}}{\partial\rho}+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(h\frac{\partial\nu_{T_0}}{\partial\rho}\right)-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(h^2\frac{\partial T_0}{\partial\rho}\right)\right]-$$

$$-\frac{3}{2R}\left[h\frac{\partial T_1}{\partial\rho}+h\frac{\partial^2\nu_{T_0}}{\partial\rho^2}-h^2\frac{\partial^2 T_0}{\partial\rho^2}\right]. \quad (46)$$

Из (20) и (25) имеем

$$h\frac{\partial^2\nu_{T_0}}{\partial\rho^2}-h^2\frac{\partial^2 T_0}{\partial\rho^2}=-hT_0\Delta_2 h-2hD(T_0,h). \quad (47)$$

Учитывая (47), получаем

$$G_2-\mu_2=\frac{3}{2R}\left[\frac{\partial\nu_{T_1}}{\partial\rho}+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(h\frac{\partial\nu_{T_0}}{\partial\rho}\right)-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(h^2\frac{\partial T_0}{\partial\rho}\right)-h\frac{\partial T_1}{\partial\rho}+\right.$$
$$\left.+hT_0\Delta_2 h+2hD(T_0,h)+T_0\operatorname{tg}^2\alpha\right],$$

или, с использованием (26) и (20), находим

$$G_2-\mu_2=\frac{3}{2R}\left[-\frac{\partial^2\lambda_{T_0}}{\partial\rho^2}+\frac{\partial\nu_{T_1}}{\partial\rho}+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(h\frac{\partial\nu_{T}}{\partial\rho}\right)-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(h^2\frac{\partial T_0}{\partial\rho}\right)\right]. \tag{48}$$

В (48) отброшен, как пренебрегаемый, член $h\dfrac{\partial T_1}{\partial\rho}$.

Представим (48) в виде

$$G_2-\mu_2=\frac{3}{2R}\left\{-\left[\frac{\partial^2\lambda_{T_0}}{\partial\rho^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial\lambda_{T_0}}{\partial\rho}\right]+\left[\frac{2}{R}\frac{\partial\lambda_{T_0}}{\partial\rho}+\frac{4\lambda_{T_0}}{R^2}\right]+\left[\frac{\partial\nu_{T_1}}{\partial\rho}+\frac{2\nu_{T_1}}{R}\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(h\frac{\partial\nu_{T_0}}{\partial\rho}\right)+\frac{2h}{R}\frac{\partial\nu_{T_0}}{\partial\rho}\right]-\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(h^2\frac{\partial T_0}{\partial\rho}\right)+\frac{2h^2}{R}\frac{\partial\nu_{T_0}}{\partial\rho}\right]\right\}-$$
$$-3\left[\frac{h^2T_0}{R^2}+\frac{hT_1}{R^2}+\frac{h}{R^2}\frac{\partial(hT_0)}{\partial\rho}-\frac{h^2}{R^2}\frac{\partial T_0}{\partial\rho}\right]. \tag{49}$$

Всеми членами в последней квадратной скобке можно пренебречь. В то же время каждый член в фигурной скобке можно после подстановки (49) в (42) проинтегрировать по формуле (22). В результате имеем:

$$\frac{R}{4\pi}\int_\omega(G_2-\mu_2)[S(\psi)-1]\,d\omega=\frac{3}{2R}\left[\frac{\partial\lambda_{T_0}}{\partial\rho}-2\frac{\lambda_{T_0}}{R}-\nu_{T_1}-h\frac{\partial\nu_{T_0}}{\partial\rho}+\right.$$
$$\left.+h^2\frac{\partial T_0}{\partial\rho}\right]=\frac{3}{2R}\left[\frac{\partial\lambda_{T_0}}{\partial\rho}-\frac{h^2T_0}{R}-hT_1-h\frac{\partial\nu_{T_0}}{\partial\rho}-h^2G_0\right]. \tag{50}$$

В последнем выражении все члены, кроме первого, в исследуемой точке обращаются в нуль. Таким образом,

$$\frac{R}{4\pi}\int_\omega(G_2-\mu_2)[S(\psi)-1]\,d\omega=\frac{3}{2R}\frac{\partial\lambda_{T_0}}{\partial\rho}. \tag{51}$$

Из (27) и (43) следует, что той же величине, но с обратным знаком, равен в исследуемой точке второй член в (42). Итак, доказано, что формула (42) есть тождество, то есть что формулы Молоденского и Бровара идентичны.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ УКЛОНЕНИЙ ОТВЕСА

Сравним различные формулы поправок второго приближения ϑ_2 компоненты уклонения отвеса в некотором направлении x. Формула для ϑ_2, по Молоденскому, получена в исправленном виде В. В. Броваром [2]:

$$\vartheta_2=\frac{1}{4\pi\gamma}\int_\omega G_2\frac{ds}{d\psi}\cos A\,d\omega+\frac{3R^2}{2\gamma}\int_\omega\frac{(h-\bar{h})^2}{r_0^4}\chi_0\cos\frac{\psi}{2}\cos A\,d\omega-\chi_1\frac{dh}{dx}. \tag{52}$$

Дифференцируя (13), находим ϑ_2 по методу Бровара

$$\vartheta_2 = \frac{1}{4\pi\gamma}\int\limits_\omega \mu_2 \frac{ds}{d\psi}\cos A d\omega + \frac{3R^2}{4\pi\gamma}\int \frac{(h-\bar{h})^2}{r_0^4} G_0 \cos\frac{\psi}{2}\cos A d\omega - \frac{\mu_1}{\gamma}\frac{\partial h}{\partial x}. \quad (53)$$

Дифференцируя (17), определяем ϑ_2 по методу Марыча

$$\vartheta_2 = \frac{1}{4\pi\gamma}\int\limits_\omega \left[-\left(\frac{\partial G_0}{\partial \rho_1}\right)_1 h + \left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial \rho^2}\right)_0 \frac{h^2}{2}\right]\frac{ds}{d\psi}\cos A d\omega. \quad (54)$$

Чтобы привести (53) к (54), следует подставить в (53) вместо μ_2 формулу (46) и применить преобразование (23) к членам в квадратной скобке. Получим в исследуемой точке, где $h=0$,

$$\frac{1}{4\pi\gamma}\int\limits_\omega \mu^2 \frac{ds}{d\psi}\cos A d\omega = \frac{1}{4\pi\gamma}\int\limits_\omega\left[-\left(\frac{\partial G_0}{\partial \rho}\right)_1 h + \left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial \rho^2}\right)_0 \frac{h^2}{2}\right]\times$$

$$\times\frac{ds}{d\psi}\cos A d\omega - \frac{\partial^2 \lambda_{G_0}}{\partial \rho\, \partial x} + \frac{\mu_1}{\gamma}\frac{dh}{dx}. \quad (55)$$

Нетрудно убедиться, что

$$-\frac{\partial^2 \lambda_{G_0}}{\partial \rho\, \partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \lambda_{G_0}}{\partial \rho}\right) = -\frac{3R^2}{4\pi\gamma}\int\limits_\omega \frac{h^2-\bar{h}^2}{r_0^4} G_0 \cos\frac{\psi}{2}\cos A d\omega. \quad (56)$$

При $\bar{h}=0$ член $-\frac{\partial^2 \lambda_{G_0}}{\partial \rho\, \partial x}$ равен по величине и противоположен по знаку второму члену в (53). Таким образом, при подстановке (55) в формулу Бровара приходим к формуле для метода Марыча.

Идентичности формул Молоденского и Бровара соответствует тождество

$$\frac{1}{4\pi\gamma}\int\limits_\omega (G_2-\mu_2)\frac{ds}{d\psi}\cos A d\omega = -\frac{3R}{4\pi\gamma}\int\limits_\omega \frac{(h-\bar{h})^2}{r_0^4}\frac{3}{2}\frac{T_0}{R} d\omega + (2\pi\chi_1 - \mu_1)\frac{\partial h}{\partial x}. \quad (57)$$

Левую часть его можно получить, продифференцировав по x формулу (50). Имеем

$$\frac{1}{4\pi\gamma}\int\limits_\omega (G_2-\mu_2)\frac{ds}{d\psi}\cos A d\omega = -\frac{3}{2R\gamma}\left[\frac{\partial^2 \lambda_{T_0}}{\partial \rho\, \partial x} - T_1\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \nu_{T_0}}{\partial \rho}\frac{\partial h}{\partial x}\right].$$

Заменив в (56) G_0 на $\frac{3T_0}{2R}$ и учитывая, что при $\bar{h}=0$ можно записать

$$(h-\bar{h})^2 = h^2 - \bar{h}^2,$$

находим

$$-\frac{3R}{4\pi\gamma}\int\limits_\omega \frac{(h-\bar{h})^2}{r_0^4}\frac{3}{2}\frac{T_0}{R} d\omega = -\frac{3}{2R\gamma}\frac{\partial^2 \lambda_{T_0}}{\partial \rho\, \partial x}. \quad (58)$$

Остается доказать, что

$$\frac{3}{2R}\left(T_1 + \frac{\partial \nu_{T_0}}{\partial \rho}\right) = 2\pi\chi_1 - \mu_1. \quad (59)$$

Из (10), (11), (12) и (16) получаем

$$2\pi\chi_1 - \mu_1 = \frac{3}{2R}\left(T_1 + \frac{R^2}{2\pi}\int\limits_{\omega} \frac{T_0(h-\bar{h})}{r_0^3}\,d\omega\right).$$

Применив (24), приходим к формуле

$$2\pi\chi_1 - \mu_1 = \frac{3}{2R}\left(T_1 + \frac{\partial \nu_{T_0}}{\partial\rho} - h\frac{\partial T_0}{\partial\rho}\right).$$

Последний член в исследуемой точке равен нулю. Таким образом, тождество (59) справедливо и идентичность формул Молоденского и Бровара для уклонений отвеса подтвердилась.

Формулы Марыча для второго приближения в сочетании с формулами Остача для $\left(\frac{\partial G_0}{\partial\rho}\right)_1$ наиболее удобны с точки зрения организации вычислений. Однако необходимо провести численное испытание различных формул, прежде чем делать какие-либо рекомендации по их применению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бровар В. В. О решении краевой задачи Молоденского. Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 4, 1963.
2. Бровар В. В. О формулах для вычисления возмущающего потенциала и составляющих отклонения отвеса на земной поверхности. Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 4, 1963.
3. Еремеев В. Ф. К вопрсcу о численном решении интегрального уравнения Молоденского для плотности слоя. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 176, «Недра», 1969.
4. Марыч М. И. Об определении отклонений отвеса на физической поверхности Земли. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 3, Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1965.
5. Марыч М. И. Приведение формулы В. В. Бровара, определяющей фигуру Земли, к ряду Тейлора. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 6, Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1967.
6. Марыч М. И. О втором приближении М. С. Молоденского для возмущающего потенциала. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 10, Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1969.
7. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 131, Изд-во геодезической литературы, М., 1960.
8. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Оценка точности ряда Стокса и некоторые попытки уточнения его теории. Тр. ЦНИИГАиК, Изд-во геодезической литературы, вып. 145, М., 1962.
9. Остач О. М. Об определении вертикального градиента аномалий силы тяжести на физической поверхности. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 176, «Недра», М., 1969.
10. Пеллинен Л. П. О вычислении уклонений отвеса и высот квазигеоида в горах. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 176, «Недра», М., 1969.
11. Юркина М. И. Вычисление первой и второй производных силы тяжести по картам ее аномалий. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 157, «Недра», М., 1965.
12. Moritz H. Linear Solutions of the Geodetic boundary—Value problem. Deutsche Geodätische Komission. Reihe A. Höhere Geodäsie N 58. München, 1968.
13. Moritz H. Über die Verwendung der Geländekorrektion zur Lösung des Problems von Molodenski. Deutsche Geodätische Komission. Reihe A. Höhere Geodäsie, N 163, München, 1969.

Работа поступила
14 октября 1969 года