УДК 528.34

А. Е. ФИЛИППОВ

О ВЫЧИСЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОПРАВОК ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И АСТРОНОМИЧЕСКИХ КООРДИНАТ И АЗИМУТОВ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

В некоторых случаях перевычисления пространственной триангуляции, например, при изменении исходных данных (геодезических B, L, H и астрономических φ, λ координат одного из пунктов, астрономического азимута α и длины выходной стороны s), при переуравнивании или каких-либо расчетах, может оказаться целесообразным введение дифференциальных поправок в вычисленные и геодезические координаты пунктов и азимуты направлений вместо повторного решения геодезических задач с новыми значениями геометрических элементов сети. Введение этих поправок можно осуществить последовательно по сторонам выбранной ходовой линии примерно так же, как это делается в обычной триангуляции, редуцированной на референц-эллипсоид.

Остановимся на необходимых формулах и порядке их применения для случая, когда изменились не только исходные данные, но и угловые и линейные элементы триангуляции.

В работе [2] были получены формулы, необходимые для составления условных уравнений геодезических широт, долгот и высот в пространственной триангуляционной сети. Рассматривая два смежных пункта $P_1(B_1, L_1, H_1)$ и $P_2(B_2, L_2, H_2)$ подобной сети, расстояние P_1P_2 между которыми равно s_{12}, принимаем в этих формулах $\varphi_i=B_i$, $\lambda_i=L_i$, $n=k=2$, $i=1$. Тогда $\alpha_{ik}=\alpha_{12}=A_{12}$, $z_{ik}=z_{12}=Z_{12}$ и выражения $\frac{\partial\Phi_n}{\partial\alpha_{i,k}}$, Q_{ik}, $\frac{\partial\Phi_n}{\partial S_{i,k}}$, где $\Phi_n=B_n$, L_n, H_n, превращаются в частные производные от геодезических координат B_2, L_2, H_2 точки P_2 по геодезическому азимуту A_{12}, геодезическому зенитному расстоянию Z_{12} направления P_1P_2 в точке P_1 и по длине s_{12} прямой P_1P_2. Эти частные производные можно представить так:

$$\frac{\partial B_2}{\partial A_{12}} = -\frac{N_2+H_2}{M_2+H_2}\cos B_1 \sin(L_2-L_1)\left(1-\frac{\varepsilon \sin B_2}{N_2+H_2}\right),$$

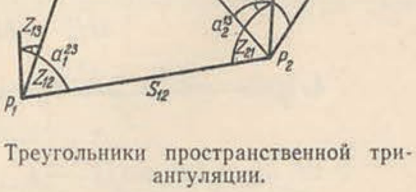
$$\frac{\partial L_2}{\partial A_{12}} = \left[\cos B_1 \sin B_2 \cos(L_2-L_1) - \sin B_1 \sec B_2 - \frac{\varepsilon \cos B_1 \cos(L_2-L_1)}{N_2+H_2}\right]\sec B_2,$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial A_{12}} = -\varepsilon \cos B_1 \cos B_2 \sin(L_2-L_1), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial Z_{12}} = \frac{N_2+H_2}{M_2+H_2}[\cos A_{12}\cos(L_2-L_1) - \sin B_1 \sin A_{12} \sin(L_2-L_1)] \times$$
$$\times\left(1-\frac{\varepsilon \sin B_2}{N_2+H_2}\right) - \frac{N_1+H_1}{M_2+H_2}[\sin B_1 \sin B_2 \cos A_{12} \cos(L_2-L_1) +$$
$$+\cos A_{12}\cos B_1 \cos B_2 - \sin A_{12} \sin B_2 \sin(L_2-L_1)],$$
$$\frac{\partial L_2}{\partial Z_{12}} = [\cos A_{12} \sin(L_2-L_1) + \sin B_1 \sin A_{12} \cos(L_2-L_1)]\times$$
$$\times\left[\sin B_2 - \frac{N_1+H_1}{N_2+H_2}\sin B_1 - \frac{\varepsilon}{N_2+H_2}\right]\sec B_2 +$$
$$+\cos B_1 \sin A_{12}\left[\cos B_2 - \frac{N_1+H_1}{N_2+H_2}\cos B_1 \cos(L_2-L_1)\right]\sec B_2, \qquad (2)$$
$$\frac{\partial H_2}{\partial Z_{12}} = -(N_1+H_1)[\cos A_{12}\cos B_1 \sin B_2 - \sin B_1 \cos B_2 \cos A_{12} \cos(L_2-L_1) +$$
$$+\sin A_{12} \cos B_2 \sin(L_2-L_1)] + \varepsilon \cos B_2 [\cos A_{12} \cos(L_2-L_1) -$$
$$-\sin B_1 \sin A_{12} \sin(L_2-L_1)],$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial s_{12}} = \frac{N_1+H_1}{(M_2+H_2)s_{12}}\left[\sin B_2 \cos B_1 \cos(L_2-L_1) - \cos B_2 \sin B_1 - \frac{\varepsilon \cos B_2}{N_1+H_1}\right].$$
$$\frac{\partial L_2}{\partial s_{12}} = \frac{N_1+H_1}{(N_2+H_2)s_{12}}\cos B_1 \sin(L_2-L_1)\sec B_2, \qquad (3)$$
$$\frac{\partial H_2}{\partial s_{12}} = \frac{N_2+H_2}{s_{12}} - \frac{N_1+H_1}{s_{12}}[\cos B_1 \cos B_2 \cos(L_2-L_1) +$$
$$+\sin B_1 \sin B_2] - \frac{\varepsilon \sin B_2}{s_{12}},$$
$$\varepsilon = e^2(N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1).$$

В комбинации с известными формулами (см., например, [1]), выражающими поправки геодезических координат точки P_2 в зависимости от изменения геодезических координат точки P_1 (поступательный сдвиг триангуляции), формулы (1), (2), (3) позволяют последовательно вычислять поправки геодезических координат вершин ходовой линии с учетом изменений астрономических данных в этих вершинах и изменений вертикальных углов.



Треугольники пространственной триангуляции.

Пусть геодезические координаты вершины P_1 треугольника P_1, P_2, P_3 угловой пространственной сети (см. рисунок) получили поправки δB_1, δL_1, δH_1, астрономические координаты и астрономический азимут направления P_1P_2 — поправки $\delta\varphi_1$, $\delta\lambda_1$, $\delta\alpha_{12}$, длина стороны P_1P_2 изменилась на δs_{12}, а горизонтальные и вертикальные углы треугольника, принимающие участие в передаче астрономических координат и азимута по линии P_1P_2, исправлены на величины δz_{12}, δz_{21}, δz_{13}, δz_{23}, δa_1^{23}, δa_2^{13}. Предполагаем все поправки малыми величинами, квадратами и произведениями которых можно пренебречь. Прямая P_1P_2 является одной из сторон ходовой линии, выбранной для последовательного вычисления дифференциальных поправок геодезических и астрономических координат и азимутов в ее вершинах.

Для вычисления поправок геодезических координат точки P_2 используем следующие выражения:

$$\delta B_2 = \delta B_2^{B_1} + \delta B_2^{L_1} + \delta B_2^{H_1} + \delta B_2^{A_{12}} + \delta B_2^{Z_{12}} + \delta B_2^{s_{12}},$$

$$\delta L_2 = \delta L_2^{B_1} + \delta L_2^{L_1} + \delta L_2^{H_1} + \delta L_2^{A_{12}} + \delta L_2^{Z_{12}} + \delta L_2^{s_{12}},$$

$$\delta H_2 = \delta H_2^{B_1} + \delta H_2^{L_1} + \delta H_2^{H_1} + \delta H_2^{A_{12}} + \delta H_2^{Z_{12}} + \delta H_2^{s_{12}}. \qquad (4)$$

При расстояниях $s<40$ *км*, допуская в экваториальных и средних широтах в коэффициентах при поправках ошибку, не превышающую $5 \cdot 10^{-5}$, в формулах работы [1] и формулах (1), (2), (3) можно пренебречь членами, содержащими произведения и квадраты величин $(B_2 - B_1)$, $(L_2 - L_1)$ H/M, H/N, e^2, и тогда выражения поправок $\delta B_2^{B_1}$, $\delta B_2^{L_1}$, $\delta B_2^{H_1}$ и т. д. принимают вид:

$$\delta B_2^{B_1} = \frac{M_1 + H_1}{M_2 + H_2} \delta B_1, \quad \delta B_2^{L_1} = -\sin B_1 \cos B_1 \sin (L_2 - L_1) \delta L_1,$$

$$\delta B_2^{H_1} = -\frac{\rho''}{M_2} \sin (B_2 - B_1) \delta H_1,$$

$$\delta B_2^{A_{12}} = -\cos B_1 \sin (L_2 - L_1) \delta A_{12}, \quad \delta B_2^{Z_{12}} = \frac{H_2 - H_1}{M_2} \cos A_{12} \delta Z_{12},$$

$$\delta B_2^{s_{12}} = \frac{N_1 + H_1}{M_2 + H_2} [\sin B_2 \cos B_1 \cos (L_2 - L_1) - \cos B_2 \sin B_1 -$$

$$- e^2 \sin (B_2 - B_1) \cos^2 B_1] \frac{\rho''}{s_{12}} \delta s_{12}, \qquad (5)$$

$$\delta L_2^{B_1} - \sec B_2 \sin B_1 \sin (L_2 - L_1) \delta B_1, \quad \delta L_2^{L_1} = \frac{N_1 + H_1}{N_2 + H_2} \sec B_2 \cos B_1 \delta L_1,$$

$$\delta L_2^{H_1} = -\frac{\rho''}{N_2} \sin (L_2 - L_1) \delta H_1,$$

$$\delta L_2^{A_{12}} = \sec B_2 \sin (B_2 - B_1) \delta A_{12}, \quad \delta L_2^{Z_{12}} = \sec B_2 \sin A_{12} \frac{H_2 - H_1}{N_2} \delta Z_{12},$$

$$\delta L_2^{s_{12}} = \frac{N_1 + H_1}{N_2 + H_2} \sec B_2 \cos B_1 \sin (L_2 - L_1) \frac{\rho''}{s_{12}} \delta s_{12}, \qquad (6)$$

$$\delta H_2^{B_1} = \frac{M_2}{\rho''} \sin (B_2 - B_1) \delta B_1, \quad \delta H_2^{L_1} = \frac{N_1}{\rho''} \cos^2 B_1 \sin (L_2 - L_1) \delta L^2,$$

$$\delta H_2^{H_1} = \delta H_1. \qquad \delta H_2^{A_{12}} = 0,$$

$$\delta H_2^{Z_{12}} = -\frac{(N_1 + H_1)}{\rho''} \Big[\cos A_{12} (1 - e^2 \cos B_1) \sin (B_2 - B_1) +$$

$$+ \sin A_{12} \cos B_2 \sin (L_2 - L_1) + \frac{1}{2} \sin B_1 \cos B_2 \sin^2 (L_2 - L_1) \Big] \delta Z_{12},$$

$$\delta H_2^{s_{12}} = \left[\frac{H_2 - H_1}{s_{12}} + \frac{N_1}{2s_{12}} \cos^2 B_1 \sin^2 (L_2 - L_1) + \frac{N_1}{2s_{12}} \sin^2 (B_2 - B_1) \right] \delta s_{12}, \qquad (7)$$

Под величинами δA_{12} и δZ_{12} следует в данном случае понимать соответственно поправку геодезического азимута A_{12} и поправку геодезического зенитного расстояния Z_{12} направления P_1P_2, связанные с изменением астрономических данных φ_1, λ_1, α_{12}, в пункте P_1 и изменением вертикального угла z_{12}. Величины δA_{12} и δZ_{12} с достаточной точностью определяются формулами

$$\delta A_{12} = \delta\alpha_{12} - \sin\varphi_1\,\delta\lambda_1 + (\cos\varphi_1\cos\alpha_{12}\,\delta\lambda_1 - \sin\alpha_{12}\,\delta\varphi_1\operatorname{ctg} z_{12},$$

$$\delta z_{12} = \delta z_{12} + \cos\alpha_{12}\,\delta\varphi_1 + \cos\varphi_1\sin\alpha_{12}\,\delta\lambda_1. \qquad (8)$$

Что касается поправок $\delta\varphi_2$, $\delta\lambda_2$, $\delta\alpha_{21}$ астрономических координат точки P_2 и астрономического азимута направления P_2P_1 в этой точке, то они вычисляются по формулам

$$\delta F_2 = \frac{\partial F_2}{\partial\varphi_1}\delta\varphi_1 + \frac{\partial F_2}{\partial\lambda_1}\delta\lambda_1 + \frac{\partial F_2}{\partial\alpha_{12}}\delta\alpha_{12} + \frac{\partial F_2}{\partial z_{12}}\delta z_{12} + \frac{\partial F_2}{\partial z_{21}}\partial z_{21} +$$

$$+ \frac{\partial F_2}{\partial z_{13}}dz_{13} + \frac{\partial F_2}{\partial z_{23}}\partial z_{23} + \frac{\partial F_2}{\partial a_1^{23}}\delta a_1^{23} + \frac{\partial F_2}{\partial a_2^{13}}\delta a_2^{13}, \qquad (9)$$

или же по формулам

$$\delta F_2 = \frac{\partial F_2}{\partial\varphi_1}\partial\varphi_1 + \frac{\partial F_2}{\partial\lambda_1}\delta\lambda_1 + \frac{\partial F_2}{\partial\alpha_{12}}\delta\alpha_{12} + \frac{\partial F_2}{\partial z_{13}}\delta z_{12} + \frac{\partial F_2}{\partial z_{21}}\delta z_{21} +$$

$$+ \frac{\partial F_2}{\partial z_{13}}\delta z_{13} + \frac{\partial F_2}{\partial z_{23}}\delta z_{23} + \frac{\partial F_2}{\partial s_{12}}\delta s_{12} + \frac{\partial F_2}{\partial s_{23}}\delta s_{23} + \frac{\partial F_2}{\partial s_{13}}\delta s_{13}, \qquad (10)$$

где $F_2 = \varphi_2$, λ_2, α_{21}.

Формулы (9) следует применять, если в сети совместно с вертикальными углами z_{ij} измерялись горизонтальные углы a_i^{jk} и известны поправки δz_{ij}, δa_i^{jk} этих элементов. Тогда для вычисления величин $\delta B_j^{s_{ij}}$, $\delta L_j^{s_{ij}}$, $\delta H_j^{s_{ij}}$ нужно предварительно рассчитать поправки δs_{ij} длин сторон ходовой линии.

Формулы (10) применяются, если вместо горизонтальных углов a_i^{jk} измерялись наклонные дальности s_{ij} и известны поправки σs_{ij}. В указанном случае должны быть вычислены новые значения горизонтальных углов a_i^{jk} (или их поправки), необходимые для перехода от астрономического азимута направления на предыдущий пункт в какой-либо вершине ходовой линии к астрономическому азимуту направления на последующий пункт.

В раскрытом виде формулы (9) и (10) приведены в работах [3] и [4].

Получив величины $\delta\varphi_2$, $\delta\lambda_2$, $\delta\alpha_{21}$, δB_2, δL_2, нетрудно найти поправки δA_{21} и δZ_{21} геодезического азимута и геодезического зенитного расстояния направления P_2P_1 в точке P_2:

$$\delta A_{21} = \delta\alpha_{21} - (\delta\lambda_2 - \delta L_2)\sin\varphi_2 + [\cos\varphi_2\cos\alpha_{21}(\delta\lambda_2 - \delta L_2) -$$

$$- \sin\alpha_{21}(\delta\varphi_2 - \delta B_2)]\operatorname{ctg} z_{21},$$

$$\delta Z_{21} = \delta z_{21} + (\delta\varphi_2 - \delta B_2)\cos\alpha_{21} + (\delta\lambda_2 - \delta L_2)\cos\varphi_2\sin\alpha_{21}.$$

Аналогичным образом вычисляются дифференциальные поправки по линии P_2P_3 или же по любой другой линии, выходящей из пункта P_2.

Исходные астрономические азимуты направлений P_2P_3 или P_2P_4 получаем по формулам

$$(\alpha_{21}) = \alpha_{21} + \delta\alpha_{21}, \quad (a_2^{13}) = a_2^{13} + \delta a_2^{13}, \quad (a_2^{14}) = a_2^{14} + \delta a_2^{13} + \delta a_2^{34},$$

$$(\alpha_{23}) = (\alpha_{21}) + (a_2^{13}), \qquad (\alpha_{24}) = (\alpha_{21}) + (a_2^{14}),$$

где (a_2^{13}) и (a_2^{14}) — левые по ходовой линии горизонтальные углы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Меллер И. Введение в спутниковую геодезию. М., 1967.
2. Филиппов А. Е. О координатных условных уравнениях в сети пространственной триангуляции. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 8, Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1969.
3. Филиппов А. Е. Условные уравнения широты, долготы и азимута в сети пространственной триангуляции. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 6, Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1967.
4. Филиппов А. Е. Условные уравнения в сети пространственной трилатерации. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 9, Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1969.

Работа поступила
4 ноября 1969 года.