

поправки $\delta z_1, \dots, \delta z_N$ к приближенным координатам $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_N$ определяемых точек

$$\begin{pmatrix} \delta z_1 \\ \delta z_2 \\ \dots \\ \delta z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1N} \\ Q_{12} & Q_{22} & \dots & Q_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{1N} & Q_{2N} & \dots & Q_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [pa_1 l] \\ [pa_2 l] \\ \dots \\ [pa_N l] \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Оценка точности уравновешенных величин заключается в определении значения μ по результатам измерений

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{n - N}},$$

где

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta z_1 \\ \delta z_2 \\ \dots \\ \delta z_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Примеры. 1. Рассмотрим пример подсчета точности положения (по высоте) точек простейшей нивелирной сети (рис. 1). От исходных пунктов A, B, C, D нивелирования III класса, для которых

$$M_{A, B, C, D}^2 = (11,6)^2 \begin{pmatrix} 0,30 & -0,10 & 0,15 & 0,22 \\ -0,10 & 0,42 & 0,25 & -0,12 \\ 0,15 & 0,25 & 0,29 & 0,06 \\ 0,22 & -0,12 & 0,06 & 0,33 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

проектируем проложить сеть нивелирования IV класса (пять ходов с узловыми точками I, II ; $m_i = \pm 10\sqrt{L_i} 10^{-6}$ мм). В соответствии со схемой сети имеем следующие данные, полученные графически (коэффициент изгиба проектируемых ходов равен 1,3):

Пункты и точки	A-I	B-I	I-II	C-II	D-II
L, км	7,0	6,2	6,0	8,3	7,3

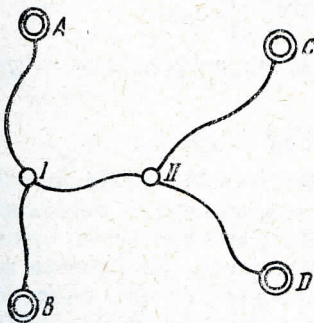


Рис. 1. Схема нивелирной сети с двумя узловыми точками.



Рис. 2. Схема нивелирного хода.

На основании этих данных напишем матрицу коэффициентов уравнений поправок с дополнительными столбцами для учета ошибок исходных пунктов и матрицу весов измерений ($c = m_{AI}^2 = (26,4)^2$).

$$\begin{matrix} & I & II & A & B & C & D \\ \begin{matrix} A-I \\ B-I \\ I-II \\ C-II \\ D-II \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 1 & & & & & & \\ -1 & 1 & & & & & \\ 1 & & & & & & \\ 1 & & & & & & \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix} & ; & \|P\| = \begin{pmatrix} 1,00 & & & & \\ & 1,13 & & & \\ & & 1,17 & & \\ & & & 0,84 & \\ & & & & 0,96 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

После составления по этим матрицам соответствующей матрицы коэффициентов нормальных уравнений с дополнительными столбцами

$$\begin{vmatrix} 3,29 & -1,17 & -1,00 & -1,13 \\ -1,17 & 2,97 & & \\ & & -0,84 & -0,96 \end{vmatrix} \quad (13)$$

решаем ее по схеме Гаусса

I	II	I	II	A	B	C	D
3,29	-1,17	1		-1,00	-1,13		
	2,97		1			-0,84	-0,96
	-0,42	0,36		-0,36	-0,41		
	2,55	0,36	1	-0,36	-0,41	-0,84	-0,96
		-0,30		0,30	0,34	0,12	0,13
		-0,05	-0,14	0,05	0,06		
		-0,35	-0,14	0,35	0,40	0,12	0,13
			-0,39	0,14	0,16	0,33	0,37

Таким образом,

$$\|Q\| = \begin{vmatrix} 0,35 & 0,14 \\ 0,14 & 0,39 \end{vmatrix}, \quad (14)$$

$$\|Q\| = \begin{vmatrix} -0,35 & -0,40 & -0,12 & -0,13 \\ -0,14 & -0,16 & -0,33 & -0,37 \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Поскольку $\mu = \pm 26,4 \sqrt{1,00} = \pm 24,9 \sqrt{1,13} = \dots = \pm 26,4$, то на основании (5) имеем

$$M_{I, II}^2 = (26,4)^2 \begin{vmatrix} 0,35 & 0,14 \\ 0,14 & 0,39 \end{vmatrix}. \quad (16)$$

С учетом $k = \frac{(11,6)^2}{(26,4)^2} = 0,19$ путем последовательного перемножения матриц (15), (12) и транспонированной матрицы (15) находим

$$\begin{aligned} \|Q\| \cdot M_{A, B, C, D}^2 \cdot \|Q^T\| &= \begin{vmatrix} -0,35 & -0,40 & -0,12 & -0,13 \\ -0,14 & -0,16 & -0,33 & -0,37 \end{vmatrix} \times \\ &\times \begin{vmatrix} 0,30 & -0,10 & 0,15 & 0,22 \\ -0,10 & 0,42 & 0,25 & -0,12 \\ 0,15 & 0,25 & 0,29 & 0,06 \\ 0,22 & -0,12 & 0,06 & 0,33 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0,35 & -0,14 \\ -0,40 & -0,16 \\ -0,12 & -0,33 \\ -0,13 & -0,37 \end{vmatrix} = \\ &= (11,6)^2 \begin{vmatrix} 0,14 & 0,13 \\ 0,13 & 0,15 \end{vmatrix} = (26,4)^2 \begin{vmatrix} 0,03 & 0,02 \\ 0,02 & 0,03 \end{vmatrix}. \quad (17) \end{aligned}$$

Таким образом, совокупная матрица ошибок положения (по высоте) точек I, II, полученных от исходных пунктов A, B, C, D, установленная путем сложения матриц (16) и (17), имеет вид

$$M_{I, II(A, B, C, D)}^2 = (26,4)^2 \begin{vmatrix} 0,38 & 0,16 \\ 0,16 & 0,42 \end{vmatrix}. \quad (18)$$

По формулам (8), (9), исходя из (18), определяем

$$M_{I(A, B, C, D)}^2 = \pm 26,4 \sqrt{0,38} = \pm 16,3 \text{ мм}, \quad M_{II(A, B, C, D)}^2 = \pm 26,4 \sqrt{0,42} = \pm 17,1 \text{ мм},$$

$$M_{I-II(A, B, C, D)}^2 = \pm 26,4 \sqrt{0,38 + 0,42 - 2 \cdot 0,16} = \pm 18,3 \text{ мм}.$$

2. Аналогичным образом осуществляется предрасчет точности положения (по высоте) любых (не узловых) точек нивелирной сети или отдельного хода. Пусть, например, требуется выполнить предрасчет точности положения точек 1, 2 (рис. 2) хода технического нивелирования, проложенного между пунктами I, II нивелирования IV класса ($m_i = \pm 25\sqrt{L_i} \cdot 10^{-6}$ мм). Из предыдущего примера в соответствии с (18) имеем

$$M_{I,II}^2 = (26,4)^2 \begin{vmatrix} 0,38 & 0,16 \\ 0,16 & 0,42 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

(здесь индексы A, B, C, D опущены).

По схеме сети получаем следующие данные (коэффициент изгиба ходов равен 1,3):

Пункты и точки	I-1	I-2	2-II
L, км	2,3	3,5	2,1

Установим матрицу коэффициентов поправок с дополнительными столбцами и матрицу весов измерений ($c = m_{I1}^2 = (37,9)^2$)

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & I & II \\ I-1 & \parallel 1 & \dots & -1 & \parallel \\ I-2 & \parallel 1 & -1 & \dots & \parallel \\ 2-II & \parallel & -1 & \dots & 1 \parallel \end{matrix}; \quad \parallel p \parallel = \begin{vmatrix} 1,00 & & \\ & 0,66 & \\ & & 1,10 \end{vmatrix}.$$

Составляем далее соответствующую матрицу коэффициентов нормальных уравнений

$$\begin{vmatrix} 1,66 & -0,66 & -1,00 \\ -0,66 & 1,76 & -1,10 \end{vmatrix}. \quad (20)$$

На основании (2), (3) и (20) находим

$$\parallel Q \parallel = \begin{vmatrix} 1,66 & -0,66 \\ -0,66 & 1,76 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 0,71 & 0,27 \\ 0,27 & 0,67 \end{vmatrix}, \quad (21)$$

$$\parallel \Omega \parallel = \begin{vmatrix} 0,71 & 0,27 \\ 0,27 & 0,67 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1,00 \\ -1,10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,71 & -0,30 \\ -0,27 & -0,74 \end{vmatrix}. \quad (22)$$

Учитывая, что $k = \frac{(26,4)^2}{(37,9)^2} = 0,49$, в соответствии с (5), (6), (7), (19), (21), (22) получаем:

$$M_{1,2(I,II)}^2 = (37,9)^2 \begin{vmatrix} 0,71 + 0,15 & 0,27 + 0,13 \\ 0,27 + 0,13 & 0,67 + 0,16 \end{vmatrix} = (37,9)^2 \begin{vmatrix} 0,86 & 0,40 \\ 0,40 & 0,83 \end{vmatrix}. \quad (23)$$

значит, $M_{1(I,II)} = \pm 37,9\sqrt{0,86} = \pm 35,1$ мм, $M_{2(I,II)} = \pm 37,9\sqrt{0,83} = \pm 34,5$ мм, $M_{1-2(I,II)} = \pm 37,9\sqrt{0,86+0,83-2 \cdot 0,40} = \pm 35,7$ мм.

При большом объеме вычислительных работ предрасчет точности целесообразно осуществлять с помощью ЭВМ. С этой целью можно, например, использовать готовые стандартные подпрограммы по линейной алгебре, составленные для ЭВМ «Урал-2», «Урал-3», «Урал-4» с библиотечными номерами: 147.004, 147.005, 147.006-ИП, 147.011-ИП, 147.014-ИП, 147.023-ИП [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гавриленко Е. Т. Автоматизация программирования и стандартные подпрограммы для вычислительных машин «Урал-2», «Урал-3» и «Урал-4». «Мишиностроение», М., 1966.
2. Гайдаев П. А., Большаков В. Д. Теория математической обработки геодезических измерений. «Недра», М., 1969.
3. Гордеев Ю. А. Обобщение приемов оценки точности положения пунктов плановых опорных геодезических сетей. Ученые записки ЛВИМУ, вып. 15, Л., 1959.