РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 15

ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.26.14

В. Н. БАЛАНДИН

ПРЕДРАСЧЕТ ТОЧНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧЕК НИВЕЛИРНЫХ СЕТЕЙ

Нами рассматривается строгий способ предрасчета точности положения (по высоте) точек нивелирных сетей, основанный на известной оценке точности положения точек при уравновешивании избыточных измерений методом косвенных определений [3].

Предлагаемый способ предрасчета точности сводится к следующему. Схема запроектированной сети, состоящей из n нивелирных ходов, проложенных между узловыми точками $1, \ldots, N$ и опорными пунктами $A, \ldots, E$, позволяет составить матрицу $\|a, a_0\|$ коэффициентов уравнений поправок с дополнительными столбцами для учета исходных данных. Элементы этой матрицы устанавливают известным образом: $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial z_j}$; $j=1, \ldots, N, A, \ldots, E$; $i=1, \ldots, n$ (такое обозначение в соответствии с [2] принято для упрощения записей). Учитывая, что измеряемыми величинами являются превышения Δz, имеем в данном случае $a = \pm 1$ (при этом направления ходов не имеют значения, в связи с чем возможно произвольное установление знаков перед коэффициентами a для каждого отдельного хода: $+1$, -1 или -1, $+1$). Элементы диагональной матрицы $\|p\|$ весов измерений определяются выражением

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}. \qquad (1)$$

Путем решения по общеизвестной схеме Гаусса, составленной обычным способом, соответствующей матрицы коэффициентов нормальных уравнений [1] с дополнительными столбцами $\|a^{\mathrm{T}} pa,\ a^{\mathrm{T}} pa_0\|$ устанавливаются матрицы весовых $\|Q\|$ и преобразующих $\|\Omega\|$ коэффициентов.

Такие же результаты можно получить по формулам линейной алгебры. Так, матрицу $\|Q\|$ находим путем обращения соответствующей части нормальных уравнений (зависящей только от измерений)

$$\|Q\| = \|a^T pa\|^{-1} = \begin{Vmatrix} [pa_1 a_1][pa_1 a_2]\ldots[pa_1 a_N] \\ [pa_1 a_2][pa_2 a_2]\ldots[pa_2 a_N] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [pa_1 a_N][pa_2 a_N]\ldots[pa_N a_N] \end{Vmatrix}^{-1}, \qquad (2)$$

а матрица $\|\Omega\|$ определяется выражением

$$\|\Omega\| = \|Q\| \cdot \|R\|, \qquad (3)$$

[1] Часть нормальных уравнений, зависящая только от исходных данных, то есть $\|a_0^T pa_0\|$ не составляется (см. ниже пример).

где

$$\| R \| = \| a^T p a_0 \| = \left\| \begin{matrix} [pa_1 a_A][pa_1 a_B] \ldots [pa_1 a_E] \\ [pa_2 a_A][pa_2 a_B] \ldots [pa_2 a_E] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [pa_N a_A][pa_N a_B] \ldots [pa_N a_E] \end{matrix} \right\|,$$

$\|R\|$ — соответствующая часть матрицы нормальных уравнений (зависящая от измерений и исходных данных).

Совокупная матрица (тензор) ошибок положения определяемых точек $1, \ldots, N$, полученных от $A, \ldots, E$ исходных пунктов, позволяющая произвести полный предрасчет точности положения (по высоте) точек проектируемой нивелирной сети, имеет вид

$$M^2_{1,\ldots,N_{(A,\ldots,E)}} = M^2_{1,\ldots,N} + \| \Omega \| \cdot M^2_{A,\ldots,E} \cdot \| \Omega^T \| . \qquad (4)$$

Совокупная матрица ошибок измерений $M_{1,\ldots,N}$ может быть представлена как

$$M^2_{1,\ldots,N} = \mu^2 \| Q \| = \mu^2 \left\| \begin{matrix} Q_{11}\, Q_{12} \ldots Q_{1N} \\ Q_{12}\, Q_{22} \ldots Q_{2N} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_{1N}\, Q_{2N} \ldots Q_{NN} \end{matrix} \right\|, \qquad (5)$$

где $\mu = m_i \sqrt{p_i}$ — средняя квадратическая ошибка единицы веса ($i = 1, \ldots, n$). Таким же образом представляется совокупная матрица ошибок исходных пунктов

$$M^2_{A,\ldots,E} = \mu_0^2 \| Q_0 \| = \mu_0^2 \left\| \begin{matrix} Q_{AA}\, Q_{AB} \ldots Q_{AE} \\ Q_{AB}\, Q_{BB} \ldots Q_{BE} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_{AE}\, Q_{BE} \ldots Q_{EE} \end{matrix} \right\|, \qquad (6)$$

где μ_0, $\|Q_0\|$ — средняя квадратическая ошибка единицы веса и матрица весовых коэффициентов, установленные при уравновешивании исходной опорной сети. Если исходные пункты взаимонезависимы, то матрица (6) приобретает диагональный вид. Нетрудно заметить, что $\mu_0^2 \|Q_0\| = \mu^2 \|kQ_0\|$, где $k = \frac{\mu_0^2}{\mu^2}$. Тогда выражение (4) можно записать как

$$M^2_{1,\ldots,N_{(A,\ldots,B)}} = \mu^2 (\|Q\| + \|\Omega\| \cdot \| kQ_0 \| \cdot \|\Omega^T\|) = \mu^2 \|\omega\| = \mu^2 \left\| \begin{matrix} \omega_{11}\, \omega_{12} \ldots \omega_{1N} \\ \omega_{12}\, \omega_{22} \ldots \omega_{2N} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_{1N}\, \omega_{2N} \ldots \omega_{NN} \end{matrix} \right\|. \qquad (7)$$

На основании совокупной матрицы (7) легко могут быть установлены ошибки отдельных точек. Так, для точек $1, \ldots, N$

$$M^2_{1(A,\ldots,E)} = \mu^2 \omega_{11}, \ldots, M^2_{N(A,\ldots,E)} = \mu^2 \omega_{NN}, \qquad (8)$$

а для взаимного положения точек $1 - N$

$$M^2_{1-N_{(A,\ldots,E)}} = \mu^2 (\omega_{11} + \omega_{NN} - 2\omega_{1N}). \qquad (9)$$

Произведенный таким образом предрасчет при условии выполнения проекта в сущности заменяет необходимое в дальнейшем уравновешивание и оценку точности уравновешенных величин. После проведения измерений, получив матрицу-столбец свободных членов с элементами $l_i = f_i(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_N) - u_i = \Delta z_{i\,\text{выч}} - \Delta z_{i\,\text{изм}}$, сразу можно определить искомые поправки $\delta z_1, \ldots, \delta z_N$ к приближенным координатам $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_N$ определяемых точек

$$\begin{Vmatrix} \delta z_1 \\ \delta z_2 \\ \cdots \\ \delta z_N \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \ldots & Q_{1N} \\ Q_{12} & Q_{22} & \ldots & Q_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{1N} & Q_{2N} & \ldots & Q_{NN} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} [pa_1 l] \\ [pa_2 l] \\ \cdots \\ [pa_N l] \end{Vmatrix} . \qquad (10)$$

Оценка точности уравновешенных величин заключается в определении значения μ по результатам измерений

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-N}},$$

где

$$\begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nN} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \delta z_1 \\ \delta z_2 \\ \cdots \\ \delta z_N \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_n \end{Vmatrix} . \qquad (11)$$

Примеры. 1. Рассмотрим пример предрасчета точности положения (по высоте) точек простейшей нивелирной сети (рис. 1). От исходных пунктов A, B, C, D нивелирования III класса, для которых

$$M^2_{A,\,B,\,C,\,D} = (11{,}6)^2 \begin{Vmatrix} 0{,}30 & -0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}22 \\ -0{,}10 & 0{,}42 & 0{,}25 & -0{,}12 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}29 & 0{,}06 \\ 0{,}22 & -0{,}12 & 0{,}06 & 0{,}33 \end{Vmatrix}, \qquad (12$$

проектируем проложить сеть нивелирования IV класса (пять ходов с узловыми точками I, II; $m_i = \pm 10\sqrt{L_i 10^{-6}}$ *мм*). В соответствии со схемой сети имеем следующие данные, полученные графически (коэффициент изгиба проектируемых ходов равен 1,3):

Пункты и точки	$A-I$	$B-I$	$I-II$	$C-II$	$D-II$
L, *км*	7,0	6,2	6,0	8,3	7,3

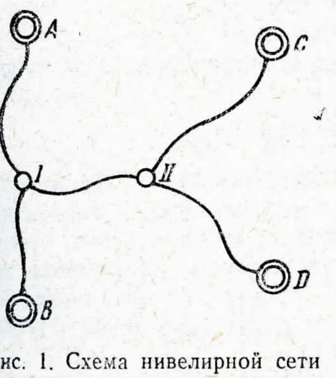

Рис. 1. Схема нивелирной сети с двумя узловыми точками.

Рис. 2. Схема нивелирного хода.

На основании этих данных напишем матрицу коэффициентов уравнений поправок с дополнительными столбцами для учета ошибок исходных пунктов и матрицу весов измерений ($c = m^2_{AI} = (26{,}4)^2$).

$$\begin{array}{r} \\ A-I \\ B-I \\ I-II \\ C-II \\ D-II \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc:cccc} I & II & A & B & C & D \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 1 & & -1 & & & \\ 1 & & & -1 & & \\ -1 & 1 & & & & \\ & 1 & & & -1 & \\ & 1 & & & & -1 \end{Vmatrix} \end{array} ; \quad \| p \| = \begin{Vmatrix} 1{,}00 & & & & \\ & 1{,}13 & & & \\ & & 1{,}17 & & \\ & & & 0{,}84 & \\ & & & & 0{,}96 \end{Vmatrix} .$$

После составления по этим матрицам соответствующей матрицы коэффициентов нормальных уравнений с дополнительными столбцами

$$\left\| \begin{array}{rr:rrrr} 3{,}29 & -1{,}17 & -1{,}00 & -1{,}13 & & \\ -1{,}17 & 2{,}97 & & & -0{,}84 & -0{,}96 \end{array} \right\| \tag{13}$$

решаем ее по схеме Гаусса

I	*II*	*I*	*II*	*A*	*B*	*C*	*D*
3,29	−1,17	1		−1,00	−1,13		
	2,97 −0,42	0,36	1	−0,36	−0,41	−0,84	−0,96
	2,55	0,36	1	−0,36	−0,41	−0,84	−0,96
		−0,30 −0,05	−0,14	0,30 0,05	0,34 0,06	0,12	0,13
		−0,35	−0,14	0,35	0,40	0,12	0,13
			−0,39	0,14	0,16	0,33	0,37

Таким образом,

$$\| Q \| = \left\| \begin{matrix} 0{,}35 & 0{,}14 \\ 0{,}14 & 0{,}39 \end{matrix} \right\|, \tag{14}$$

$$\| \Omega \| = \left\| \begin{matrix} -0{,}35 & -0{,}40 & -0{,}12 & -0{,}13 \\ -0{,}14 & -0{,}16 & -0{,}33 & -0{,}37 \end{matrix} \right\|. \tag{15}$$

Поскольку $\mu = \pm 26{,}4 \sqrt{1{,}00} = \pm 24{,}9 \sqrt{1{,}13} = \ldots = \pm 26{,}4$, то на основании (5) имеем

$$M^2_{I,\,II} = (26{,}4)^2 \left\| \begin{matrix} 0{,}35 & 0{,}14 \\ 0{,}14 & 0{,}39 \end{matrix} \right\|. \tag{16}$$

С учетом $k = \frac{(11{,}6)^2}{(26{,}4)^2} = 0{,}19$ путем последовательного перемножения матриц (15), (12) и транспонированной матрицы (15) находим

$$\| \Omega \| \cdot M^2_{A,\,B,\,C,\,D} \cdot \| \Omega^T \| = \left\| \begin{matrix} -0{,}35 & -0{,}40 & -0{,}12 & -0{,}13 \\ -0{,}14 & -0{,}16 & -0{,}33 & -0{,}37 \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} 0{,}30 & -0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}22 \\ -0{,}10 & 0{,}42 & 0{,}25 & -0{,}12 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}29 & 0{,}06 \\ 0{,}22 & -0{,}12 & 0{,}06 & 0{,}33 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} -0{,}35 & -0{,}14 \\ -0{,}40 & -0{,}16 \\ -0{,}12 & -0{,}33 \\ -0{,}13 & -0{,}37 \end{matrix} \right\| =$$

$$= (11{,}6)^2 \left\| \begin{matrix} 0{,}14 & 0{,}13 \\ 0{,}13 & 0{,}15 \end{matrix} \right\| = (26{,}4)^2 \left\| \begin{matrix} 0{,}03 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0{,}03 \end{matrix} \right\|. \tag{17}$$

Таким образом, совокупная матрица ошибок положения (по высоте) точек *I*, *II*, полученных от исходных пунктов *A*, *B*, *C*, *D*, установленная путем сложения матриц (16) и (17), имеет вид

$$M^2_{I,\,II_{(A,\,B,\,C,\,D)}} = (26{,}4)^2 \left\| \begin{matrix} 0{,}38 & 0{,}16 \\ 0{,}16 & 0{,}42 \end{matrix} \right\|. \tag{18}$$

По формулам (8), (9), исходя из (18), определяем

$$M^2_{I_{(A,\,B,\,C,\,D)}} = \pm 26{,}4 \sqrt{0{,}38} = \pm 16{,}3 \text{ мм}, \quad M^2_{II_{(A,\,B,\,C,\,D)}} = \pm 26{,}4 \sqrt{0{,}42} = \pm 17{,}1 \text{ мм},$$

$$M^2_{I-II_{(A,\,B,\,C,\,D)}} = \pm 26{,}4 \sqrt{0{,}38 + 0{,}42 - 2 \cdot 0{,}16} = \pm 18{,}3 \text{ мм}.$$

2. Аналогичным образом осуществляется предрасчет точности положения (по высоте) любых (не узловых) точек нивелирной сети или отдельного хода. Пусть, например, требуется выполнить предрасчет точности положения точек *1*, *2* (рис. 2) хода технического нивелирования, проложенного между пунктами *I*, *II* нивелирования IV класса ($m_i = \pm 25\sqrt{L_i} \cdot 10^{-6}$ *мм*). Из предыдущего примера в соответствии с (18) имеем

$$M^2_{I,II} = (26{,}4)^2 \begin{Vmatrix} 0{,}38 & 0{,}16 \\ 0{,}16 & 0{,}42 \end{Vmatrix}. \tag{19}$$

(здесь индексы *A*, *B*, *C*, *D* опущены).

По схеме сети получаем следующие данные (коэффициент изгиба ходов равен 1,3):

Пункты и точки	*I—1*	*1—2*	*2—II*
L, *км*	2,3	3,5	2,1

Установим матрицу коэффициентов поправок с дополнительными столбцами и матрицу весов измерений ($c = m^2_{I1} = (37{,}9)^2$

$$\begin{array}{c} \\ I{-}1 \\ 1{-}2 \\ 2{-}II \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & I & II \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 1 & & -1 & \\ 1 & -1 & & \\ & -1 & & 1 \end{Vmatrix} \end{array}; \qquad \| p \| = \begin{Vmatrix} 1{,}00 & & \\ & 0{,}66 & \\ & & 1{,}10 \end{Vmatrix}.$$

Составляем далее соответствующую матрицу коэффициентов нормальных уравнений

$$\begin{Vmatrix} 1{,}66 & -0{,}66 & -1{,}00 & \\ -0{,}66 & 1{,}76 & & -1{,}10 \end{Vmatrix}. \tag{20}$$

На основании (2), (3) и (20) находим

$$\| Q \| = \begin{Vmatrix} 1{,}66 & -0{,}66 \\ -0{,}66 & 1{,}76 \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}71 & 0{,}27 \\ 0{,}27 & 0{,}67 \end{Vmatrix}, \tag{21}$$

$$\| \Omega \| = \begin{Vmatrix} 0{,}71 & 0{,}27 \\ 0{,}27 & 0{,}67 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1{,}00 & \\ & -1{,}10 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -0{,}71 & -0{,}30 \\ -0{,}27 & -0{,}74 \end{Vmatrix}. \tag{22}$$

Учитывая, что $k = \dfrac{(26{,}4)^2}{(37{,}9)^2} = 0{,}49$, в соответствии с (5), (6), (7), (19), (21), (22) получаем:

$$M^2_{1,2\,(I,\,II)} = (37{,}9)^2 \begin{Vmatrix} 0{,}71 + 0{,}15 & 0{,}27 + 0{,}13 \\ 0{,}27 + 0{,}13 & 0{,}67 + 0{,}16 \end{Vmatrix} = (37{,}9)^2 \begin{Vmatrix} 0{,}86 & 0{,}40 \\ 0{,}40 & 0{,}83 \end{Vmatrix}, \tag{23}$$

значит, $M_{1(I,\,II)} = \pm 37{,}9\sqrt{0{,}86} = \pm 35{,}1$ *мм*, $M_{2(I,\,II)} = \pm 37{,}9\sqrt{0{,}83} = \pm 34{,}5$ *мм*, $M_{1-2(I,\,II)} = \pm$

$$\pm 37{,}9\sqrt{0{,}86 + 0{,}83 - 2 \cdot 0{,}40} = \pm 35{,}7 \text{ мм}.$$

При большом объеме вычислительных работ предрасчет точности целесообразно осуществлять с помощью ЭВМ. С этой целью можно, например, использовать готовые стандартные подпрограммы по линейной алгебре, составленные для ЭВМ «Урал-2», «Урал-3», «Урал-4» с библиотечными номерами: 147.004, 147.005, 147.006-IП, 147.011-IП, 147.014-IП, 147.023-IП [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гавриленко Е. Т. Автоматизация программирования и стандартные подпрограммы для вычислительных машин «Урал-2», «Урал-3» и «Урал-4». «Мишиностроение», М., 1966.

2. Гайдаев П. А., Большаков В. Д. Теория математической обработки геодезических измерений. «Недра», М., 1969.

3. Гордеев Ю. А. Обобщение приемов оценки точности положения пунктов плановых опорных геодезических сетей. Ученые записки ЛВИМУ, вып. 15, Л., 1959.

Работа поступила
18 января 1971 г.