УДК 528.142;512.942

Л. В. КУДРЯВЦЕВ

УРАВНИВАНИЕ ТРИАНГУЛЯЦИИ ПО СПОСОБУ НЕОБХОДИМЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Нами рассматривается уравнивание триангуляции по способу необходимых неизвестных в случае измеренных направлений. В качестве необходимых неизвестных выбираем координаты вставляемых (определяемых) пунктов. Кроме поправок к приближенным значениям координат вставляемых пунктов, в уравнения поправок входят и поправки в ориентировочные углы.

При уравнивании классическим способом составляют нормальные уравнения, из решения которых находят поправки координат вставляемых пунктов, а затем вычисляют поправки в ориентировочные углы и в направления [1].

Ниже излагаем вопросы уравнивания триангуляции по направлениям в n-мерном пространстве E^n (n — число измеренных напряжений) в соответствии с принципом наименьших квадратов: сумма квадратов поправок в направления должна быть минимальной, то есть

$$[\delta\delta]=\min.$$

Известно, что число поправок в ориентировочные углы равно числу z пунктов сети, с которых производились наблюдения, а число поправок к приближенным значениям координат — удвоенному числу s вставляемых пунктов.

Обозначим удвоенное число вставляемых пунктов через k ($k=2s$). Число z пунктов сети и удвоенное число вставляемых пунктов составляют число необходимых неизвестных, то есть $z+k=r=n-t$, где t — число избыточных измерений.

Тогда подпространство E^{n-t}, которое назовем подпространством необходимых измерений, можно представить в виде прямой суммы двух подпространств [6]:

$$E^z+E^k=E^{n-t}, \tag{1}$$

где E^z назовем подпространством ориентирования, а E^k — подпространством координат.

Подпространство E^t, которое назовем подпространством избыточных измерений, и подпространство необходимых измерений ортогонально дополняют друг друга и образуют прямую сумму [2]

$$E^t+E^{n-t}=E^n; \tag{2}$$

$$E^t\perp E^{n-t} \tag{3}$$

или, учитывая (1), имеем

$$E^t+E^z+E^k=E^n; \tag{4}$$

$$E^t\perp E^z;\ E^t\perp E^k. \tag{5}$$

Любой вектор $l \in E^n$ можно представить, и притом единственным способом, в виде [2]

$$\bar{l}=\bar{\delta}+\bar{v} \tag{6}$$

или на основании (4) получаем

$$\bar{l}=\bar{\delta}+\bar{\delta}_z+\bar{\Delta}, \tag{7}$$

где $\bar{l}$ — вектор приближенных поправок в измеренные направления; $\bar{\delta} \in E^t$ — вектор поправок в измеренные направления, представляющий собой ортогональную проекцию вектора $\bar{l} \in E^n$ на подпространство избыточных измерений; $\bar{v} \in E^{n-t}$ — вектор поправок к приближенным значениям измеренных направлений, являющийся ортогональной проекцией вектора $\bar{l} \in E^n$ на пространство необходимых измерений; $\bar{\delta}_z \in E^z$ — вектор поправок в ориентировочные углы; $\bar{\Delta} \in E^k$ — вектор поправок к приближенным значениям дирекционных углов.

Векторное уравнение (7) представляет собой систему уравнений поправок, которая имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&u_1 z_1+s_1 z_2+\ldots+q_1 z_z+o_1 x_1+h_1 x_2+\ldots+n_1 x_k+\delta_1=l_1;\\
&u_2 z_1+s_2 z_2+\ldots+q_2 z_z+o_2 x_1+h_2 x_2+\ldots+n_2 x_k+\delta_2=l_2;\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&u_n z_1+s_n z_2+\ldots+q_n z_z+o_n x_1+h_n x_2+\ldots+n_n x_k+\delta_n=l_n,
\end{aligned} \tag{8}$$

или векторно-скалярное уравнение

$$\bar{u} z_1+\bar{s} z_2+\ldots+\bar{q} z_z+\bar{o} x_1+\bar{h} x_2+\ldots+\bar{n} x_k+\bar{\delta}=\bar{l}, \tag{9}$$

или векторно-матричное уравнение

$$\Pi \bar{x}_{n-t}+\bar{\delta}=\bar{l}. \tag{10}$$

В (8)—(10) $\bar{u}, \bar{s}, \ldots, \bar{q}$ — известные базисные векторы подпространства ориентирования E^z, координаты которых выражают числа 0 и —1; $\bar{0}, \bar{h}, \ldots, \bar{n}$ — известные базисные векторы подпространства координат E^k; $\bar{x}_{n-t}$—$n-t$-мерный вектор, состоящий из поправок в ориентировочные углы и поправок к приближенным значениям координат вставляемых пунктов; Π — матрица уравнений поправок размерами $n \times (n-t)$, которую составляют известные координаты базисных векторов подпространства необходимых измерений E^{n-t}.

Вектор $\bar{l} \in E^n$ вычисляется по известной формуле

$$\bar{l}=\bar{\alpha}_0-\bar{Z}-\bar{N}, \tag{11}$$

где $\bar{N}=(N_1, N_2, \ldots, N_n)$ — вектор измеренных направлений; $\alpha_0=(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0)$— вектор приближенных значений дирекционных углов; $\bar{Z}=Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ — вектор ориентировочных углов.

Ориентировочные углы для каждого пункта определяются по формуле

$$Z_\nu=\frac{[Z_\nu^0]}{m} \quad (\nu=1,2,\ldots,m), \tag{12}$$

где Z_ν^0 — приближенные значения ориентировочных углов ν-го пункта; m — число измеренных направлений на ν-м пункте.

Вектор приближенных значений ориентировочных углов определяется по формуле

$$\overline{Z}_0=\overline{\alpha}_0-\overline{N}. \tag{13}$$

Для вектора $\overline{l}$ приближенных поправок можно написать

$$\overline{l}=\overline{N}_0-\overline{N}, \tag{14}$$

где

$$\overline{N}_0=\overline{\alpha}_0-\overline{Z}, \tag{15}$$

$\overline{N}_0$ — вектор приближенных значений измеренных направлений.

В векторном уравнении (9) вектор $\overline{v}$ представлен в виде линейной комбинации базисных векторов подпространства E^{n-t}

$$\overline{v}=\overline{u}z_1+\overline{s}z_2+\ldots+\overline{q}z_z+\overline{o}x_1+\overline{h}x_2+\ldots+\overline{n}x_k, \tag{16}$$

где

$$\overline{\delta}_z=\overline{u}z_1+\overline{s}z_2+\ldots+\overline{q}z_z; \tag{17}$$

$$\overline{\Delta}=\overline{o}x_1+\overline{h}x_2+\ldots+\overline{n}x_k. \tag{18}$$

Определим базисные векторы ортогонально дополняющего подпространства избыточных измерений E^t.

Базисные векторы подпространства избыточных измерений E^t определяются из условия ортогональности подпространств E^t и E^{n-t} [2], которое для любого вектора $\overline{\delta}\in E^t$ имеет вид

$$\left.\begin{aligned} u_1\delta_1+u_2\delta_2+\cdots+u_n\delta_n&=0,\\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\\ q_1\delta_1+q_2\delta_2+\cdots+q_n\delta_n&=0;\end{aligned}\right\} z,$$

$$\left.\begin{aligned} o_1\delta_1+o_2\delta_2+\cdots+o_n\delta_n&=0,\\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\\ n_1\delta_1+n_2\delta_2+\cdots+n_n\delta_n&=0.\end{aligned}\right\} k. \tag{19}$$

Нормальная фундаментальная система решений даст базисные векторы подпространства E^t [6].

Полагая в системе (19) t координат базисных векторов

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{r+1}=1,\ \delta_{r+2}=0,\ldots,\ \delta_n=0;\\ &\delta_{r+1}=0,\ \delta_{r+2}=1,\ldots,\ \delta_n=0;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\delta_{r+1}=0,\ \delta_{r+2}=0,\ldots,\ \delta_n=1,\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

получаем t систем неоднородных линейных уравнений с квадратной неособенной матрицей порядка $r=n-t$.

После решения всех этих систем находим остальные координаты базисных векторов подпространства E^t. Пусть это будут векторы $\overline{a}$, $\overline{b},\ldots,\overline{t}$.

Вектор $\overline{\delta}\in E^t$ уравнения (9) можно представить в виде линейной комбинации найденных векторов [2]

$$\overline{\delta}=\overline{a}k_1+\overline{b}k_2+\ldots+\overline{t}k_t. \tag{21}$$

Тогда система уравнений поправок (9) принимает вид

$$\begin{aligned} &a_1k_1+\ldots+t_1k_t+u_1z_1+\ldots+q_1z_z+o_1x_1+\ldots+n_1x_k=l_1,\\ &a_2k_1+\ldots+t_2k_t+u_2z_1+\ldots+q_2z_z+o_2x_1+\ldots+n_2x_k=l_2;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_nk_1+\ldots+t_nk_t+u_nz_1+\ldots+q_nz_z+o_nx_1+\ldots+n_nx_k=l_n\end{aligned} \tag{22}$$

или в векторно-матричной форме

$$K\bar{x}=\bar{l}, \tag{23}$$

где K — квадратная неособенная матрица n-го порядка, составленная из координат базисных векторов пространства E^n.

Решая систему (22), находим n множителей. Теперь можно вычислить вектор уравненных координат вставляемых пунктов и вектор уравненных ориентировочных углов соответственно по формулам

$$\bar{X}=\bar{X}_0-\bar{x}_k; \tag{24}$$

$$\bar{Z}=\bar{Z}-\bar{z}_z. \tag{25}$$

Определив векторы поправок $\bar{\delta}_z$, $\bar{\Delta}$, $\bar{v}$ и $\bar{\delta}$ по приведенным выше формулам, можно найти следующие уравненные величины:

$$\bar{Z}=\bar{Z}+\bar{\delta}_z; \tag{26}$$

$$\bar{\alpha}=\bar{\alpha}_0-\bar{\Delta}; \tag{27}$$

$$\bar{N}=\bar{N}_0-\bar{v}; \tag{28}$$

$$\bar{N}=\bar{N}+\bar{\delta}, \tag{29}$$

где $\bar{\alpha}$ — вектор уравненных дирекционных углов; $\bar{N}$ — вектор уравненных направлений.

Известно, что

$$\bar{\alpha}-\bar{Z}-\bar{N}=\bar{\Theta}. \tag{30}$$

Векторы поправок $\bar{\delta}$ и $\bar{v}$ можно получить и непосредственно. Условиям

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\delta}\in E^t;\\&\bar{\delta}\perp E^{n-t};\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned}&\bar{v}\perp E^t;\\&\bar{v}\in E^{n-t}\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

отвечают такие векторно-матричные уравнения:

$$K'\bar{\delta}=-\bar{w}_{t,\,0}; \tag{33}$$

$$K'\bar{v}=-\bar{w}_{0,\,n-t}, \tag{34}$$

где K' — транспонированная матрица по отношению к матрице системы (22); $\bar{w}_{t,\,0}$ — вектор свободных членов, у которого последние $n-t$ координат равны нулю; $\bar{w}_{0,\,n-t}$ — вектор свободных членов, у которого первые t координат равны нулю.

Остальные координаты векторов $\bar{w}_{t,\,0}$ и $\bar{w}_{0,\,n-t}$ находим по формуле

$$K'\bar{l}=-\bar{w}. \tag{35}$$

Определенные таким образом векторы поправок $\bar{\delta}$ и $\bar{v}$ на основании задачи о перпендикуляре [4] удовлетворяют условию метода наименьших квадратов.

Обратный вес функции уравненных необходимых неизвестных и веса самих уравненных необходимых неизвестных определяются также без использования нормальных уравнений.

Вектор $\bar{f}$ весовой функции можно представить, и притом единственным способом, в виде

$$\bar{f}=\bar{\varepsilon}+\bar{\rho}, \tag{36}$$

где

$$\bar{f}\in E^n;\ \bar{\varepsilon}\in E^t;\ \bar{\rho}\in E^{n-t}.$$

Квадрат модуля вектора $\bar{\varrho}$, являющийся ортогональной проекцией вектора $\bar{f}\in E^n$ на подпространство необходимых измерений, даст обратный вес функции, среднюю квадратическую ошибку которой требуется определить [3], то есть

$$\frac{1}{P_F}=|\bar{\rho}|^2, \tag{37}$$

или на основании (36)

$$\frac{1}{P_F}=|\bar{f}-\bar{\varepsilon}|^2. \tag{38}$$

Векторы $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\varrho}$ так же, как и векторы $\bar{\delta}$ и $\bar{v}$, можно найти и косвенным и непосредственным приемами. Вектор $\bar{f}\in E^n$ определяется из уравнения

$$\Pi'\bar{f}=\bar{\varphi}_{n-t}, \tag{39}$$

где $\bar{\varphi}_{n-t}$ — вектор частных производных весовой функции. При этом необходимо принять t координат вектора $\bar{f}$ равными нулю (для простоты вычислений) и из полученной системы определить остальные координаты вектора $\bar{f}$. Тогда из системы вида (23)

$$K\bar{\lambda}=\bar{f} \tag{40}$$

находим значения n множителей λ_i. По формулам

$$\bar{\varepsilon}=\bar{a}\lambda_1+\bar{b}\lambda_2+\ldots+\bar{t}\lambda_t, \tag{41}$$

$$\bar{\varrho}=\bar{u}\lambda_{t+1}+\bar{s}\lambda_{t+2}+\ldots+\bar{n}\lambda_n \tag{42}$$

вычисляем векторы $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\varrho}$.

При непосредственном определении векторов $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\varrho}$ формулы (33), (34) и (35) имеют вид

$$K'\bar{\varepsilon}=\bar{\varphi}_{t,\,0}; \tag{43}$$

$$K'\bar{\rho}=\bar{\varphi}_{0,\,n-t}; \tag{44}$$

$$K'\bar{f}=\bar{\varphi}. \tag{45}$$

Отметим, что вектор поправок $\bar{\delta}$ принадлежит подпространству избыточных измерений E^t, а вектор $\bar{\varrho}$ — подпространству необходимых измерений E^{n-t}.

На основании задачи о перпендикуляре вектор $\bar{\varrho}$ удовлетворяет принципу наибольшего веса, то есть

$$[\rho\rho]=\min.$$

Пример. Пусть требуется произвести совместную вставку двух точек [5, стр. 251]. Определим вектор поправок в измеренные направления косвенным путем, а вектор $\bar{\rho}$ — непосредственным путем.

Соответственно формуле (23) имеем систему с квадратной неособенной матрицей 19-го порядка (см. таблицу). В первых десяти столбцах левой части таблицы записаны коэффициенты матрицы уравнений поправок. В следующих девяти столбцах записаны вычисленные при использовании ЭВМ координаты базисных векторов под-

Значение коэффициентов системы

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	—1										1
2	—1						0,06	—3,82			—1
3		—1									
4		—1					0,12	1,58			—0,140
5		—1							2,56	1,59	0,140
6			—1								
7			—1						—0,33	—1,53	1,740
8			—1				—2,25	—1,04			—1,740
9				—1							
10				—1					—2,51	0,73	
11					—1		0,06	—3,82			
12					—1		0,65	—1,62			
13					—1		0,12	1,58			
14					—1		—0,89	1,74	0,89	—1,74	—2,374
15					—1		—2,25	—1,04			2,374
16						—1			—0,33	—1,53	
17						—1	—0,89	1,74	0,89	—1,74	0,685
18						—1			2,56	1,59	
19						—1			—2,51	0,73	—0,685

[1] В таблице пустые клетки соответствуют нулевым элементам

пространства избыточных измерений E^9, которые определены из условия ортогональности подпространств E^{19-9} и E^9. При решении на ЭВМ получаем: $z_1=6{,}55$; $z_2=-0{,}95$; $z_3=3{,}45$; $z_4=-2{,}56$; $z_5=4{,}04$; $z_6=-0{,}43$; $x_1=-2{,}59$; $x_2=-3{,}47$; $x_3=1{,}76$; $x_4=-0{,}97$; $k_1=0{,}35$; $k_2=2{,}45$; $k_3=1{,}85$; $k_4=-1{,}16$; $k_5=-1{,}75$; $k_6=3{,}21$; $k_7=-6{,}27$; $k_8=-4{,}34$; $k_9=1{,}72$.

Тогда вектор поправок $\bar{\delta}$, определенный по формуле (21), будет иметь такие координаты: $\delta=(0{,}35$; $-0{,}35$; $2{,}45$; $-1{,}25$; $-1{,}20$; $1{,}85$; $1{,}04$; $-2{,}89$; $-1{,}16$; $1{,}16$; $-1{,}75$; $3{,}21$; $-6{,}27$; $3{,}20$; $1{,}61$; $-4{,}34$; $1{,}24$; $1{,}72$; $1{,}38)$.

При решении системы вида (44), в правой части которой на восьмом месте записываем единицу, а на остальных местах — нули, получаем на ЭВМ следующие координаты вектора $\bar{\rho}$: $\bar{\rho}=(0{,}0667$; $-0{,}0667$; $-0{,}0252$; $0{,}0303$; $-0{,}0052$; $0{,}0239$; $-0{,}0061$; $-0{,}0178$; $-0{,}0139$; $0{,}0139$; $-0{,}1021$; $-0{,}0237$; $0{,}0868$; $0{,}0495$; $-0{,}0105$; $-0{,}0390$; $0{,}0092$; $0{,}0110$; $0{,}0188)$.

Сумма квадратов координат вектора $\bar{\rho}$ даст весовой коэффициент ординаты точки 1: $Q=0{,}0350$ [5].

Из сравнения приведенных выше результатов с результатами, полученными в работе [5], видно, что они сходятся в пределах точности вычислений.

Предлагаемая методика уравнивания и оценки точности позволяет во многих случаях обойтись без составления нормальных уравнений.

линейных уравнений[1]

12	13	14	15	16	17	18	19	$\overline{l}$
								−6,2
								6,2
1								3,4
−0,972	0,429	0,429	0,569	0,617	0,401		1,401	−6,1
−0,028	−0,429	−0,429	−0,569	−0,617	−0,401		−1,401	2,7
	1							−1,6
−0,668	−0,339	−0,339	−2,079	−1,301	0,329	−1	0,329	−1,5
0,668	0,661	0,339	2,079	1,301	−0,329	1	−0,329	3,1
		1						1,4
		−1						−1,4
			1					7,3
				1				3,1
					1			−16,1
0,992	−0,804	0,196	1,570	0,159	−1,796	1	−0,796	−1,3
−0,992	0,804	−0,196	−2,570	−1,159	0,796	−1	0 796	7,0
						1		−3,0
−0,303	0,500	−0,500	−0,184	0,297	0,804	−1	−0,196	1,2
							1	5,1
0,303	−0,500	0,500	0,184	−0,297	−0,804		−0,804	−3,3

Схема уравнивания получается компактной, легко программируется и реализуется на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайдаев П. А. Уравнение триангуляции. Геодезиздат, М., 1960.
2. Кудрявцев Л. В. Уравнивание косвенных измерений в n-мерном пространстве. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 8, Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1969.
3. Кудрявцев Л. В. Оценка точности функции косвенных измерений, уравненных без составления нормальных уравнений. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 9. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1969.
4. Мазмишвили А. И. Метод наименьших квадратов и задача о перпендикуляре. «Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка», 1965, № 3.
5. Романов В. А. Теория ошибок и способ наименьших квадратов. Углетехиздат, Москва—Харьков, 1952.
6. Шилов Г. Е. Введение в теорию линейных пространств. Гостеортехиздат, М.—Л., 1952.

Работа поступила
24 апреля 1970 г.