ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.21:531.26

В. В. БРОВАР

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФОРМУЛЫ СТОКСА

Возмущающий потенциал T определяется на сфере радиуса R в точке с широтой φ и долготой λ по смешанным аномалиям Δg силы тяжести, заданным на той же сфере в текущей точке $(\varphi'\lambda')$, при помощи известного ряда Стокса:

$$T(\varphi,\ \lambda)=R\sum_{n-1}^{\tilde{\infty}}\frac{g_n(\varphi,\ \lambda)}{n-1}, \tag{1}$$

где

$$g_n(\varphi,\ \lambda)=\frac{2n+1}{4\pi}\int_\omega \Delta g\, P_n(\cos\psi)\, d\omega, \tag{2}$$

$$\cos\psi=\sin\varphi\sin\varphi'+\cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda-\lambda'),\ \ d\omega=\cos\varphi' d\varphi' d\lambda',$$

$P_n(\cos\psi)$ — многочлен Лежандра.

Здесь и далее предполагаем, что сферических функций нулевого и первого порядка в возмущающем потенциале нет. Подстановка (2) в (1) приводит к интегральной формуле Стокса.

$$T(\varphi,\ \lambda)=\frac{R}{4\pi}\int_\omega \Delta g S(\psi)\, d\omega, \tag{3}$$

где

$$S(\psi)=\sum_{n-2}^{\tilde{\infty}}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)=$$

$$=\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2}-3\cos\psi\ln\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right)+1-5\cos\psi-6\sin\frac{\psi}{2}. \tag{4}$$

Сущность предлагаемого преобразования в следующем. Представим ряд (1) суммой

$$T=T'+T'', \tag{5}$$

где

$$T'=R\sum_{n-2}^{\infty}\frac{g_n}{n+k}, \tag{6}$$

$$T''=R\sum_{n-2}^{\infty}\frac{(k+1)\,g_n}{(n+k)(n-1)}, \tag{7}$$

k — некоторое постоянное. Подставляя (2) в (6), можно представить T' в виде интеграла

$$T' = \frac{R}{4\pi} \int_{\omega} \Delta g U(\psi)\, d\omega, \tag{8}$$

где

$$U(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n+k} P_n(\cos\psi). \tag{9}$$

Согласно (5), $T''=T-T'$. При помощи (3) и (8) находим

$$T'' = \frac{R}{4\pi} \int_{\omega} \Delta g V(\psi)\, d\omega, \tag{10}$$

где

$$V(\psi) = S(\psi) - U(\psi). \tag{11}$$

Теперь возмущающий потенциал T представляем в виде двух выражений:

$$T = R\sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n}{n+k} + \frac{R}{4\pi} \int_{\omega} \Delta g V(\psi)\, d\omega; \tag{12}$$

$$T = \frac{R}{4\pi} \int_{\omega} \Delta g U(\psi)\, d\omega + R\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(k+1)\, g_n}{(n+k)(n-1)}. \tag{13}$$

Из формул (12) и (13) обычным способом легко получить соответствующие формулы для составляющих отклонения отвеса. Здесь они не приводятся. Все эти формулы можно использовать для различных оценок, а может быть, и при некоторых практических вычислениях.

Ряд в формуле (12) сходится так же медленно, как и ряд Стокса, но если k выбрать достаточно большим, то влияние на T суммы первых $m(m<k)$ членов будет значительно ослаблено. Функция $V(\psi)$ приблизится в данном случае к функции Стокса, но сохранит слабую логарифмическую особенность при $\psi \to 0$. Благодаря этому, интегрирование по центральной зоне в формуле (12) упрощается.

Формулу (13), по-видимому, удобно применять при таком значении k, при котором члены ряда убывают особенно быстро. Это произойдет при $k=+1$. В указанном случае на интегральный член в (13) будут оказывать влияние в основном аномалии ближних зон. Значит, интегрирование в дальних зонах можно значительно упростить или даже вообще не выполнять.

После этих общих пояснений переходим к суммированию ряда (9). При помощи производящей функции для многочленов Лежандра записываем ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n P_n(\cos\psi) = (1 - 2\cos\psi x + x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 - \cos\psi x. \tag{14}$$

Умножаем его на $x^{k-1}dx$ и интегрируем от 0 до 1, считая $k \geqslant 1$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{P_n(\cos\psi)}{n+k} = \int_0^1 \frac{x^{k-1}\, dx}{(1-2\cos\psi x + x^2)^{1/2}} - \frac{1}{k} - \frac{\cos\psi}{k+1}.$$

Обозначаем

$$\alpha_k = \int_0^1 \frac{x^{k-1}\,dx}{(1-2\cos\psi x + x^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{15}$$

Тогда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{P_n(\cos\psi)}{n+k} = \alpha_k - \frac{1}{k} - \frac{\cos\psi}{k+1}. \tag{16}$$

Из (14) при $x=1$ получаем еще один ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} P_n(\cos\varphi) = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} - 1 - \cos\psi. \tag{17}$$

Умножив (16) на $(1-2k)$, а ряд (17) на 2, складываем их; тогда искомая сумма ряда (9) принимает вид

$$U(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n+k} P_n(\cos\psi) = \operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} - (2k-1)\alpha_k - \frac{1}{k} - \frac{3\cos\psi}{k+1}.$$

Подставляя последнее выражение в (11), получаем

$$V(\psi) = -3\cos\psi \ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right) + (2k-1)\alpha_k + \frac{k+1}{k} - \frac{5k+2}{k+1}\cos\psi. \tag{18}$$

Остается определить α_k по формуле (15). Неопределенный интеграл

$$f(x) = \int \frac{x^{k-1}\,dx}{(1-2\cos\psi x + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

можно представить в виде

$$f(x) = (A_0 x^{k-1} + \ldots + A_h x^{k-1-h} + \ldots + A_{k-2})(1-2\cos\psi\, x + x^2)^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ A_{k-1}\ln[x - \cos\psi + (1-2\cos\psi\, x + x^2)^{\frac{1}{2}}], \tag{19}$$

где A_h — неопределенные коэффициенты.

Дифференцируя (19) по x и избавляясь от иррациональности в знаменателе, получаем:

$$x^{k-1} = \sum_{h=1}^{k-1} (k-h) A_{h-1} x^{k-h} - \cos\psi \sum_{h=1}^{k-1} (2k-2h-1) A_{h-1} x^{k-h-1} +$$
$$+ \sum_{h=1}^{k-1} (k-h-1) A_{h-1} x^{k-h-2}.$$

Сгруппируем члены с x^{k-h-1}, тогда

$$x^{k-1} = \sum_{h=0}^{k-1} x^{k-h-1}[(k-h-1)A_h - (2k-2h-1)\cos\psi A_{h-1} + (k-h)A_{h-2}] + A_{k-1}.$$

Сравнением коэффициентов при одинаковых степенях x получаем систему уравнений для определения A_h:

$$\left.\begin{aligned}
&(k-1)A_0-1=0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(k-h-1)A_k-(2k-2h-1)\cos\psi A_{h-1}+(k-h)A_{h-2}=0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A_{k-1}-\cos\psi A_{k-2}+A_{k-3}=0;\\
&(h=1,\ \dots,\ k-2)
\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

Если A_h определены, то

$$\alpha_k=f(1)-f(0)=\left(\sum_{h=1}^{k-1}A_{h-1}\right)2\sin\frac{\psi}{2}-A_{k-2}+A_{k-1}\ln\left(\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2}+1\right).\qquad(21)$$

В явном виде α_k можно получить следующим образом. Введем новую переменную $y=x-\cos\psi$, тогда

$$\alpha_k=\int_{-\cos\varphi}^{1-\cos\varphi}\frac{(y+\cos\psi)^{k-1}dy}{(\sin^2\psi+y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Но

$$(y+\cos\psi)^{k-1}=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k-1)!}{(k-i-1)!\,i!}\cos^i\psi\, y^{k-i-1},$$

поэтому

$$\alpha_k=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k-1)!}{(k-i-1)!\,i!}\cos^i\psi\,\beta_{k-i-1},\qquad(22)$$

где

$$\beta_{k-i-1}=\int_{-\cos\varphi}^{1-\cos\varphi}\frac{y^{k-i-1}dy}{(\sin^2\psi+y^2)^{\frac{1}{2}}}.\qquad(23)$$

Последовательно применяя рекуррентную формулу

$$\int\frac{y^l dy}{\sqrt{a^2+y^2}}=\frac{y^{l-1}\sqrt{a^2+y^2}}{l}-\frac{l-1}{l}a^2\int\frac{y^{l-2}dy}{\sqrt{a^2+y^2}},$$

можно вычислить (23). Опуская довольно длинные вычисления, приводим окончательную формулу сразу для α_k:

$$\alpha_k=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{p=0}^{E\frac{k-i-2}{2}}\frac{2(-1)^p(k-1)!\,(k-i-2)!!\,(k-i-2p-3)!!}{(k-i-1)!\,i!\,(k-i-1)!!\,(k-i-2p-2)!!}\times$$

$$\times[(1-\cos\psi)^{k-i-2p-2}-(-\cos\psi)^{k-i-2p-2}]\cos^i\psi\,\sin^{2p}\psi\sin\frac{\psi}{2}+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}Re(-1)^{\frac{k-i-1}{2}}\frac{(k-1)!\,(k-i-2)!!}{(k-i-1)!\,i!\,(k-i-3)!!}\cos^i\psi\,\sin^{k-i-1}\psi\ln\left(\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2}+1\right).\qquad(24)$$

Здесь $E\frac{k-i-2}{2}$ обозначает целую часть дроби $\frac{k-i-2}{2}$. Если $\frac{k-i-1}{2}$ дробное, то $Re(-1)^{\frac{k-i-1}{2}}=0$.

Формулу (24) можно использовать для контроля (21).

В заключение приводим частный вид формулы (13) при $k=1$. Имеем

$$U(\psi)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n+1}P_n(\cos\psi)=\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2}-\ln\left(\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2}+1\right);$$

$$\sin\psi\frac{dU(\psi)}{d\psi}=-\left(\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2}-1\right).$$

Тогда

$$T=\frac{R}{4\pi}\int_{\omega}\Delta g\left[\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2}-\ln\left(\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2}+1\right)\right]d\omega+2R\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_n}{n^2-1}; \qquad (25)$$

$$\frac{\partial T}{R\partial\varphi}=\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Delta g\left[\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2}-1\right]\cos\alpha\, d\psi\, d\alpha+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\frac{\partial g_n}{\partial\varphi}. \qquad (26)$$

Как отмечалось ранее, интегральные члены этих формул особенно чувствительны к гравитационным аномалиям близ центральной зоны; влияние же аномалий в дальних зонах здесь сильно ослаблено сравнительно с влиянием их в формулах Стокса и Венинг-Мейлеса. Влияние гармоник g_n низкого порядка учитывается в формулах (25) и (26) быстро сходящимися рядами.

Работа поступила
17 апреля 1970 года