УДК 528.181

В. А. ЛАДЕЙЩИКОВА

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ

Нормальные уравнения с коэффициентами в виде трехдиагональной матрицы встречаются часто при уравнивании заполняющих сетей геодезических построений.

Пусть имеем систему нормальных уравнений коррелат в матричной форме

$$NK+W=0, \tag{1}$$

где K и W — матрицы-столбцы,

$$K=(k_1,\ k_2,\ldots,k_n);$$
$$W=(w_1,\ w_2,\ldots,w_n), \tag{2}$$

N — квадратная трехдиагональная симметричная матрица;

$$N=\|a_{ij}\|\ (i=j). \tag{3}$$

Так как матрица N неособенная ($N\neq 0$), то

$$K=-N^{-1}W, \tag{4}$$

где

$$K_i=-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-1}\,W \quad \left|\begin{array}{l} j=1,2,\ldots,n,\\ i=1,2,\ldots,n.\end{array}\right. \tag{5}$$

При большом значении n вычисление элементов матрицы N^{-1} связано с трудностями, поэтому важную роль играют эффективные методы вычисления элементов обратной матрицы.

Для решения системы (1) предлагаем такой путь.

Исходная матрица N имеет вид:

$$N=\left\|\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1,\,n-2} & a_{n-1,\,n-1} & a_{n-1,\,n} \\ & & & a_{n,\,n-1} & a_{n,\,n} \end{array}\right\|. \tag{6}$$

Умножая слева выражение (1) на преобразующую матрицу q

$$q=\left\|\begin{array}{ccccc} 1 & q_{12} & & & \\ q_{21} & 1 & q_{23} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & q_{n-1,\,n-2} & 1 & q_{n-1,\,n} \\ & & & q_{n,\,n-1} & 1 \end{array}\right\|, \tag{7}$$

где
$$q_{jj}=1;\quad \begin{matrix} q_{ij}=-a_{ij}a_{jj}^{-1}; \\ q_{ji}=-a_{ji}a_{ii}^{-1}, \end{matrix} \left| \begin{matrix} i=1,2,\ldots,n, \\ j=1,2,\ldots,n, \end{matrix} \right. \tag{8}$$

получаем
$$qNK+qW=0. \tag{9}$$

Здесь
$$qN=N^{(1)};\quad qW=W^{(1)}; \tag{10}$$
$$N^{(1)}K+W^{(1)}=0, \tag{11}$$

где
$$N^{(1)}=\left\| \begin{matrix} a_{11}^{(1)} & 0 & a_{13}^{(1)} & & & & \\ 0 & a_{22}^{(1)} & 0 & a_{24}^{(1)} & & & \\ a_{31}^{(1)} & 0 & a_{33}^{(1)} & 0 & a_{35}^{(1)} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & a_{n-1,\,n-3}^{(1)} & & 0 & & a_{n-1,\,n-1}^{(1)} & 0 \\ & & a_{n,\,n-2}^{(1)} & & 0 & & a_{n,\,n}^{(1)} \end{matrix} \right\|,$$

$$a_{ii}^{(1)}=a_{ii}-\sum_{\substack{j=i-1\\ j>0}}^{j=i+1} a_{ij}a_{jj}^{-1}a_{ji}=a_{ii}+\sum_{\substack{j=i-1\\ j>0}}^{j=i+1} q_{ij}a_{ji},$$

$$\begin{matrix} a_{i,\,j+1}^{(1)}=-a_{i,\,j+1}a_{jj}^{-1}a_{j,\,j+1}=q_{i,\,j}a_{j+1,\,i}; \\ a_{j+1,\,i}^{(1)}=-a_{j+1,\,i}a_{ii}^{-1}a_{i,\,j+1}=q_{j+1,\,i}a_{i,\,j+1}; \end{matrix} \left| \begin{matrix} i=1,2,\ldots,n, \\ j=1,2,\ldots,n. \end{matrix} \right.$$

$$a_{i,\,j+1}^{(1)}=a_{j+1,\,i}^{(1)};$$

$$W_i^{(1)}=W_i-\sum_{\substack{j=i-1\\ j>0}}^{j=i+1} a_{ij}a_{jj}^{-1}W_j=W_i+\sum_{\substack{j=i-1\\ j>0}}^{j=i+1} q_{ij}W_j. \tag{12}$$

После $(s+1)$-преобразований получаем
$$q^{(s)}N^{(s)}K+q^{(S)}W^{(S)}=0;\quad q^{(s)}N^{(s)}=N^{(s+1)};\quad q^{(S)}W^{(S)}=W^{(s+1)};$$
$$N^{(s+1)}K+W^{(s+1)}=0, \tag{13}$$

где
$$N^{(s+1)}=\left\| \begin{matrix} a_{11}^{(s+1)} & & & \\ & a_{22}^{(s+1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & a_{n-1,\,n-1}^{(s+1)} & \\ & & & a_{n,\,n}^{(s+1)} \end{matrix} \right\|;\quad W^{(s+1)}=\left\| \begin{matrix} W_1^{(s+1)} \\ W_2^{(s+1)} \\ \vdots \\ W_{n-1}^{(s+1)} \\ W_n^{(s+1)} \end{matrix} \right\|.$$

Здесь
$$\begin{matrix} a_{ii}^{(s+1)}=a_{ii}^{(s)}-\sum\limits_{\substack{j=i-2^s\\ j>0}}^{j=i+2^s} a_{ij}^{(s)}(a_{jj}^{(s)})^{-1}a_{ji}^{(s)}; \\ a_{ii}^{(s+1)}=a_{ii}^{(s)}+\sum\limits_{\substack{j=i-2^s\\ j>0}}^{j=i+2^s} q_{ij}^{(s)}a_{ji}^{(s)}, \end{matrix} \left| \begin{matrix} j=1,2,\ldots,n; \\ i=1,2,\ldots,n; \\ s=0,1,2,\ldots,n. \end{matrix} \right. \tag{14}$$

$$W_i^{(s+1)}=W_i^{(s)}-\sum_{\substack{j=i-2^s\\ j>0}}^{j=i+2^s} a_{ij}^{(s)}a_{jj}^{(s)}a_{ji}^{(s)}=W_i^{(s)}+\sum_{\substack{j=i-2^s\\ j>0}}^{j=i+2^s} q_{ij}^{(s)}a_{ji}^{(s)}.$$

Определяем элементы промежуточных диагоналей $N^{(s)}$

$$
\begin{gathered}
a^{(s)}_{i,\,j+2^{s-1}} = -\,a^{(s-1)}_{ij}\,(a^{(s-1)}_{jj})^{-1}\,a^{(s-1)}_{j,\,j+2^{s-1}} = q^{(s-1)}_{ij}\,a^{(s-1)}_{j,\,j+2^{s-1}},\\
a^{(s)}_{j+2^{s-1},\,i} = -\,a^{(s-1)}_{ji}\,(a^{(s-1)}_{ii})^{-1}\,a^{(s-1)}_{j+2^{s-1},\,i} = q^{(s-1)}_{ji}\,a_{j+2^{s-1},\,i}\\
a^{(s)}_{i,\,j+2^{s-1}} = a^{(s)}_{j+2^{s-1},\,i}\ \left|\ \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n;\\ j = i + 2^{s-1};\\ s = 0, 1, 2, \ldots, n. \end{array}\right.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Из выражения (13) находим

$$k_i = -W_i^{(s+1)}\,(N^{(s+1)})^{-1}. \tag{16}$$

Матрица $N^{(s+1)}$ диагональна, и элементы обратной матрицы получить легко [1].

Описанную выше методику решений можно применять при уравнивании одиночных и сдвоенных рядов однотипных фигур геодезических построений, а также при уравнивании групповым методом сплошных свободных сетей из однотипных фигур. В последнем случае исходную матрицу коэффициентов нормальных уравнений коррелат II группы нужно представить в виде квазитрехдиагональной, если ее разбить на клетки и назвать их подматрицами. Они будут квадратными трехдиагональными неособенными матрицами одинакового порядка. Пусть исходная матрица имеет вид

$$
N = \left\|\begin{array}{cccccc}
N_{11} & N_{12} & & & & \\
N_{21} & N_{22} & N_{23} & & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & N_{n-2,\,n-1} & N_{n-1,\,n-1} & N_{n-1,\,n}\\
 & & & & N_{n,\,n-1} & N_{n,\,n}
\end{array}\right\|\ N_{ij} = N_{ji}. \tag{17}
$$

В результате ряда преобразований исходная матрица будет представлена в виде отдельных квадратных матриц меньшего порядка, что значительно облегчит дальнейшее решение системы. Для матрицы N имеем матрицу R преобразования

$$
R = \left\|\begin{array}{cccccc}
E & R_{12} & & & & \\
R_{21} & E & R_{23} & & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & R_{n-2,\,n-1} & E & R_{n-1,\,n}\\
 & & & & R_{n,\,n-1} & E
\end{array}\right\|, \tag{18}
$$

у которой на главной диагонали единичные подматрицы, а элементы кодиагоналей определяются так:

$$
\left.\begin{aligned} R_{ij} &= -N_{ij}N_{jj}^{-1};\\ R_{ji} &= -N_j N_{ii}^{-1}. \end{aligned}\right| \begin{aligned} i &= 1, 2, \ldots, n,\\ j &= 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{19}
$$

После $(s+1)$-преобразований получаем

$$
\begin{Vmatrix} N_{11}^{(s+1)} & & & & \\ & N_{22}^{(s+1)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & N_{n-1,\,n-1}^{s+1} & \\ & & & & N_{n,\,n}^{(s+1)} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-1} \\ k_n \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} W_1^{(s+1)} \\ W_2^{(s+1)} \\ \vdots \\ W_{n-1}^{(s+1)} \\ W_n^{(s+1)} \end{Vmatrix} = 0, \tag{20}
$$

откуда

$$
K_i = -W_i^{(s+1)} \cdot (N_{ii}^{(s+1)})^{-1}, \tag{21}
$$

$N^{(s+1)}$ — матрица квазидиагональная, элементы которой определяются по формуле

$$
N_{ii}^{(s+1)} = N_{ii}^{(s)} - \sum_{\substack{j=i-2^s\\ j>0}}^{j=i+2^s} N_{ij}^{(s)}(N_{jj}^{(s)})^{-1}N_{ji}^{(s)} = N_{ii}^{(s)} + \sum_{\substack{j=i-2^s\\ j>0}}^{j=i+2^s} R_{ij}^{(s)}N_{ji}^{(s)}. \left|\begin{aligned} i &= 1, 2, \ldots, n;\\ j &= 1, 2, \ldots, n;\\ s &= 0, 1, \ldots, n. \end{aligned}\right. \tag{22}
$$

Столбец свободных членов вычисляют по такой формуле:

$$
W_i^{(s+1)} = W_i^{(s)} - \sum_{\substack{j=i-2^s\\ j>0}}^{j=i+2^s} N_{ij}^{(s)}(N_{jj}^{(s)})^{-1}W_j^{(s)} = W_i^{(s)} + \sum_{\substack{j=i-2^s\\ j>0}}^{j=i+2^s} R_{ij}^{(s)}W_j^{(s)} \left|\begin{aligned} i &= 1, 2, \ldots, n,\\ j &= 1, 2, \ldots, n,\\ s &= 0, 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}\right. \tag{23}
$$

Элементы промежуточных диагоналей определяются так:

$$
\left.\begin{aligned} N_{i,\,j+2^{s-1}}^{(s)} &= R_{ij}^{(s-1)}N_{j,\,j+2^{s-1}}; \quad R_{ij}^{(s-1)} = -N_{ij}^{(s-1)}(N_{jj}^{(s-1)})^{-1}\\ N_{j+2^{s-1},\,i}^{(s)} &= R_{ji}^{(s-1)}N_{j+2^{s-1},\,i}^{(s-1)} \quad R_{ji}^{(s-1)} = -N_{ji}^{(s-1)}(N_{ii}^{(s-1)})^{-1} \end{aligned}\right| \begin{aligned} i &= 1, 2, 3 \ldots n,\\ j &= i + 2^{s-1},\\ s &= 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}
$$

$$
N_{j+2^{s-1},\,i}^{(s)} = N_{i,\,j+2^{s-1}}^{(s)}. \tag{24}
$$

В результате каждого преобразования кодиагональ смещается и занимает место $j^{(s)}$ от главной диагонали.

Установлено, что если исходная матрица имеет две кодиагонали, расположенных симметрично главной диагонали, то каждая из них будет смещаться от главной диагонали по такому закону:

$$s_1=0, \quad t^{(0)}=2,$$
$$s_2=1, \quad t^{(1)}=2+2^{\circ}=3,$$
$$s_3=2, t^{(2)}=2+2^{\circ}+2'=5, \tag{25}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$s_n=s, \ t^{(s)}=t^{(s-1)}+2^{s-1},$$

$$t^{(s)}=2+\sum_{s=0}^{s-1}2^{s-1}. \tag{26}$$

Учитывая, что

$$\sum_{s=0}^{s-1}2^{s-1}=S^{(s)}=\frac{a_1(1-2^s)}{1-2}=2^s-1 \quad a_1=2^{\circ}=1, \tag{27}$$

где $S^{(s)}$ — сумма членов геометрической прогрессии, формулу (26) можно записать в виде

$$t^{(s)}=1+2^s. \tag{28}$$

Очевидно, что для приведения исходной матрицы к диагональному или квазидиагональному виду понадобится преобразований $(s+1)$. Зная порядок матрицы n и место кодиагонали $t^{(s)}$, после очередного преобразования исходной матрицы можно определить число преобразований d:

$$\text{при} \quad n\geqslant t^{(s)} \quad d=s+1;$$
$$\text{при} \quad n<t^{(s)} \quad d=s. \tag{29}$$

Например:

$$n=5, \quad s_1=2, \quad t^{(s)}=5, \quad n=5, \quad d=s+1=3,$$
$$s_2=3, \quad t^{(3)}=9, \quad n<9, \quad d=s=3.$$
$$n=12, \quad s_1=3, \quad t^{(3)}=9, \quad n>9, \quad d=s+1=4,$$
$$s_2=4, \quad t^{(4)}=17, \ n<17, \ d=s=4.$$
$$n=130, \ s_1=7, \quad t^{(7)}=1+2^7=129,$$
$$s_2=8, \quad t^{(8)}=1+2^8=257,$$
$$n>t^{(7)}, \quad d=s+1=8,$$
$$n<t^{(8)}, \quad d=s=8;$$
$$n=260, \ s_1=8, \quad t^{(8)}=257,$$
$$s_2=9, \quad t^{(9)}=1+2^9=513,$$
$$n>t^{(8)}, \quad d=s+1=9,$$
$$n<t^{(9)}, \quad d=s=9.$$

Из приведенных примеров видно, что со значительным увеличение порядка матрицы число преобразований увеличивается относителы медленно.

Числовой пример. Исходная матрица

$$\left\|\begin{matrix} 15 & -2 & & \\ -2 & 12 & -2 & \\ & -2 & 12 & -2 \\ & & -2 & 15 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{matrix}\right\| + 4 \left\|\begin{matrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{matrix}\right\| = 0. \qquad (30)$$

Для решения системы (30) потребуется преобразований:

$$n=4, \quad s=1, \quad t^{(s)}=3, \quad n>t^{(s)}, \quad d=s+1=2,$$
$$s=2, \quad t^{(s)}=5, \quad n<t^{(s)}, \quad d=s=2.$$

Элементы преобразующей матрицы:

$$q_{12}=\frac{1}{6}, \quad q_{23}=\frac{1}{6}, \quad q_{34}=\frac{2}{15}, \quad q_{ij}=-a_{ij}\,a_{jj}^{-1},$$

$$q_{21}=\frac{2}{15}, \quad q_{32}=\frac{1}{6}, \quad q_{43}=\frac{1}{6}, \quad q_{ji}=-a_{ji}\,a_{ii}^{-1},$$

После первого преобразования согласно (12) получаем элементы матрицы:

$$a_{11}^{(1)}=a_{11}+q_{12}a_{21}=\frac{44}{3}; \quad i_1=1, \quad s=0, \quad j=2.$$

$$a_{22}^{(1)}=a_{22}+q_{21}a_{12}+q_{23}a_{32}=\frac{171}{15}; \quad i_2=2, \quad s=0, \quad j_1=2, \quad j_2=1.$$

$$a_{33}^{(1)}=a_{33}+q_{32}a_{23}+q_{34}a_{43}=\frac{171}{15}; \quad i_3=3, \quad s=0, \quad j_1=2, \quad j_2=4.$$

$$a_{44}^{(1)}=a_{44}+q_{43}a_{34}=\frac{44}{3}; \quad i_4=4, \quad s=0, \quad j_1=3.$$

$$W_1^{(1)}=W_1+q_{12}W_2=W_1+\frac{1}{6}W_2;$$

$$W_2^{(1)}=W_2+q_{21}W_1+q_{23}W_3=W_2+\frac{2}{15}W_1+\frac{1}{6}W_3;$$

$$W_3^{(1)}=W_3+q_{32}W_2+q_{34}W_4=W_3+\frac{1}{6}W_2+\frac{2}{15}W_4;$$

$$W_4^{(1)}=W_4+q_{43}W_3=W_4+\frac{1}{6}W_3;$$

$$a_{13}^{(1)}=q_{12}a_{23}=-\frac{1}{3}, \quad a_{13}^{(1)}=a_{31}^{(1)}, \quad i_1=1, \quad s=1, \quad j=2,$$

$$a_{24}^{(1)}=q_{13}a_{34}=-\frac{1}{3}, \quad a_{24}^{(1)}=a_{42}^{(1)}, \quad i_2=2, \quad s=1, \quad j=3.$$

Исходная матрица после первого преобразования имеет следующий вид:

$$\left\|\begin{matrix} \frac{44}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{171}{15} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{171}{15} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{44}{3} \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{matrix}\right\| + 4 \left\|\begin{matrix} W_1+\frac{1}{6}W_2 \\ W_2+\frac{2}{15}W_1+\frac{1}{6}W_3 \\ W_3+\frac{1}{6}W_2+\frac{2}{15}W_4 \\ W_4+\frac{1}{6}W_3 \end{matrix}\right\| = 0.$$

Элементы второй преобразующей матрицы:

$$q_{13}^{(1)} = \frac{5}{171}, \quad q_{24}^{(1)} = \frac{1}{44}, \quad q_{31}^{(1)} = \frac{1}{44}, \quad q_{42}^{(1)} = \frac{5}{171},$$

$$q_{ij}^{(1)} = -a_{ij}^{(1)} a_{jj}^{(1)-1}, \quad q_{ji}^{(1)} = -a_{ji}^{(1)} a_{ii}^{(1)-1}.$$

После второго преобразования получим диагональную матрицу с элементами:

$$a_{11}^{(2)} = a_{11}^{(1)} + q_{13}^{(1)} a_{31}^{(1)} = \frac{7519}{513}; \qquad i_1 = 1,\ s = 1.\quad j_1 = -1;\ j < 0.\quad j_2 = 3;$$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} + q_{24}^{(1)} a_{42}^{(1)} = \frac{7519}{660}; \qquad i_2 = 2,\ s = 1,\ j_1 = 0.\quad j_2 = 4.$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} + q_{31}^{(1)} a_{13}^{(1)} = \frac{7519}{660}; \qquad i_3 = 3,\ s = 1,\ j_1 = 1,\ j_2 = 5.\quad n = 4.$$

$$a_{44}^{(2)} = a_{44}^{(1)} + q_{42}^{(1)} a_{24}^{(1)} = \frac{7519}{513}; \qquad i_4 = 4,\ s = 1,\ j_1 = 2,\ j_2 = 6,\ j_2 > n.$$

Свободные члены:

$$W_1^{(2)} = W_1^{(1)} + q_{13}^{(1)} W_3^{(1)} = \frac{513\,w_1 + 88\,w_2 + 15\,w_3 + 2\,w_4}{513};$$

$$W_2^{(2)} = W_2^{(1)} + q_{24}^{(1)} W_4^{(1)} = \frac{176\,w_1 + 1320\,w_2 + 225\,w_3 + 30\,w_4}{1320};$$

$$W_3^{(2)} = W_3^{(1)} + q_{31}^{(1)} W_1^{(1)} = \frac{30\,w_1 + 225\,w_2 + 1320\,w_3 + 176\,w_4}{1320};$$

$$W_4^{(2)} = W_4^{(1)} + q_{42}^{(1)} W_2^{(1)} = \frac{2\,w_1 + 15\,w_2 + 88\,w_3 + 513\,w_4}{513}.$$

Общий вид матрицы после второго преобразования:

$$\begin{Vmatrix} \frac{7519}{513} & & & \\ & \frac{7519}{660} & & \\ & & \frac{7519}{660} & \\ & & & \frac{7519}{513} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \frac{2052\,w_1 + 352\,w_2 + 60\,w_3 + 8\,w_4}{513} \\ \frac{352\,w_1 + 2640\,w_2 + 450\,w_3 + 60\,w_4}{660} \\ \frac{60\,w_1 + 450\,w_2 + 2640\,w_3 + 352\,w_4}{660} \\ \frac{8\,w_1 + 60\,w_2 + 352\,w_3 + 2052\,w_4}{513} \end{Vmatrix} = 0.$$

Тогда коррелаты функции свободных членов выразим так:

$$-k_1 = \frac{2052\,w_1 + 352\,w_2 + 60\,w_3 + 8\,w_4}{7519};$$

$$-k_2 = \frac{352\,w_1 + 2640\,w_2 + 450\,w_3 + 60\,w_4}{7519};$$

$$-k_3 = \frac{60\,w_1 + 450\,w_2 + 2640\,w_3 + 352\,w_4}{7519};$$

$$-k_4 = \frac{8\,w_1 + 60\,w_2 + 352\,w_3 + 2052\,w_4}{7519}.$$

Указанный способ решения систем нормальных уравнений коррелат может быть использован при уравнивании сдвоенных рядов и сплошных сетей из однотипных фигур, когда исходная матрица требует разбивки на клетки и уничтожения связи между ними. Этот способ может быть использован для получения обратной матрицы, если исходная матрица трехдиагональна и большого порядка.

Наличие большого количества нулей в исходной матрице, однотипность операций преобразований позволяет эффективно использовать большие и малые ЭЦВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. «Наука», М., 1967.
2. Филин А. П. Матрицы в статике стержневых систем. Изд-во литературы по строительству, Л., 1966.

Работа поступила
11 ноября 1970 г.