

Д. И. МАСЛИЧ

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕФРАКЦИИ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН У ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

Вопросу определения рефракции при распространении световых волн у поверхности Земли посвящено много исследований. Были получены достаточно точные формулы для определения как вертикальной, так и горизонтальной составляющей рефракции. В настоящее время для измерений применяются электромагнитные волны широкого диапазона. В связи с этим важно получить формулы определения рефракции, пригодные для всех электромагнитных волн.

Используем принцип Ферма (свойство электромагнитных волн распространяться по кратчайшему пути) и примем путь волны за геодезическую линию в трехмерном римановом пространстве, как это сделано Г. Морицом [2, 6]. Элемент этой линии  $d\bar{s}$  выражается равенством

$$d\bar{s} = n \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (1)$$

Редуцирование траектории волн к обычным прямым сводится к конформному отображению риманова пространства на обычное евклидово трехмерное пространство. При этом поправки за кривизну изображения римановых геодезических линий представляют собой поправки за рефракцию в вертикальные и горизонтальные углы и описываются формулами

$$r_v = -\frac{1}{s} \int_0^s \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial Z} X dX; \quad (2)$$

$$r_r = \frac{1}{s \cos \beta} \int_0^1 \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial Y} X dX, \quad (3)$$

где  $r_v$  и  $r_r$  — поправки за рефракцию в вертикальный и горизонтальный углы;  $X$  — ось координат, совмещенная между наблюдаемыми точками;  $Z$  — ортогональная к  $X$  ось и лежащая в отвесной плоскости;  $Y$  — ось, ортогональная к осям  $X$  и  $Z$ ;  $\beta$  — вертикальный угол;  $S$  — длина линии по хорде.

Формулы (2), (3) имеют достаточную степень точности и применимы для всех диапазонов электромагнитных волн. При дальнейшем преобразовании они будут отличаться способами определения  $\frac{\partial n}{\partial Z}$  и  $\frac{\partial n}{\partial Y}$ . Используем для нахождения этих производных зависимость показателя преломления от основных метеорологических элементов и длины волны [4]:

$$n = 1 + A \frac{p}{T} + B \frac{e}{T^2}, \quad (4)$$

где  $p$ ,  $T$  и  $e$  — соответственно давление, температура и влажность воздуха, а  $A$  и  $B$  — постоянные коэффициенты, зависящие от длины волны. Дальше имеем

$$\frac{\partial n}{\partial Z} = \frac{1}{T^2} \left[ AT \frac{\partial p}{\partial Z} + B \frac{\partial e}{\partial Z} - \left( Ap + B \frac{2e}{T} \right) \frac{\partial T}{\partial Z} \right]; \quad (6)$$

$$\frac{\partial n}{\partial Y} = \frac{1}{T^2} \left[ AT \frac{\partial p}{\partial Y} + B \frac{\partial e}{\partial Y} - \left( Ap + B \frac{2e}{T} \right) \frac{\partial T}{\partial Y} \right]. \quad (7)$$

Подставляя эти значения в формулы (2) и (3), получаем

$$r_b = - \frac{1}{s} \int_0^s \frac{1}{nT^2} \left[ AT \frac{\partial p}{\partial Z} + B \frac{\partial e}{\partial Z} - \left( Ap + B \frac{2e}{T} \right) \frac{\partial T}{\partial Z} \right] X dX; \quad (8)$$

$$r_r = \frac{1}{s \cos \beta} \int_0^s \frac{1}{nT^2} \left[ AT \frac{\partial p}{\partial Y} + B \frac{\partial e}{\partial Y} - \left( Ap + B \frac{2e}{T} \right) \frac{\partial T}{\partial Y} \right] X dX. \quad (9)$$

В формулах (8) и (9) — горизонтальная и вертикальная составляющие для любого диапазона электромагнитных волн выражаются через основные метеорологические элементы и их соответствующие градиенты. Эти формулы отличаются от существующих тем, что в них учтена влажность воздуха, а это особенно важно принимать во внимание при распространении радиоволн, когда влажность воздуха имеет наибольшее влияние.

Преобразуем приведенные выше формулы для волн светового диапазона и сравним их с формулами, полученными другими авторами.

Для учета рефракции световых волн, когда эффектом влажности можно пренебречь, формулы (8) и (9) принимают следующий вид:

$$r_b = - \frac{A}{s} \int_0^s \frac{1}{nT^2} \left[ T \frac{\partial p}{\partial Z} - p \frac{\partial T}{\partial Z} \right] X dX; \quad (10)$$

$$r_r = \frac{A}{s \cos \beta} \int_0^s \frac{1}{nT^2} \left[ T \frac{\partial p}{\partial Y} - p \frac{\partial T}{\partial Y} \right] X dX. \quad (11)$$

Как известно, для световых волн при нормальных значениях  $p_0 = 760$  мм рт. ст. и  $T_0 = 273,2^\circ$ , величина  $A = 105,1 \cdot 10^{-6}$  [1]. Если принять  $n=1$ , что вызовет очень незначительную погрешность (порядка сотых долей секунды), а величины  $r_b$  и  $r_r$  выразить в секундах дуги, то формулы (10) и (11) можно записать в следующем виде:

$$r'_b = - \frac{21,7}{s} \int_0^s \frac{p}{T^2} \left( \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial Z} - \frac{\partial T}{\partial Z} \right) X dX; \quad (12)$$

$$r'_r = \frac{21,7}{s \cos \beta} \int_0^s \frac{p}{T^2} \left( \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial Y} - \frac{\partial T}{\partial Y} \right) X dX. \quad (13)$$

Рассмотрим частный случай, когда вдоль линии визирования метеорологические элементы и их градиенты по осям  $Z$  и  $Y$  остаются

постоянными. Такие случаи очень часто могут иметь место при измерениях на небольших расстояниях (до нескольких десятков километров в однообразных физико-географических условиях). Интегрируя формулы (12) и (13), записываем

$$r''_b = - \frac{10,8 \cdot sp}{T^2} \left( \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial Z} - \frac{\partial T}{\partial Z} \right); \quad (14)$$

$$r''_r = \frac{10,8 \cdot sp}{\cos \beta T^2} \left( \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial Y} - \frac{\partial T}{\partial Y} \right). \quad (15)$$

Принимая в формуле (15)  $\cos \beta = 1$ , что вполне оправдано для небольших углов наклона, получаем

$$r''_r = - 10,8 \frac{p}{T^2} s \left( \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial Y} - \frac{\partial T}{\partial Y} \right). \quad (16)$$

Таким образом, мы пришли к известной формуле Ферстера, вывод которой сделан также Б. Н. Рабиновичем [5]. Это подтверждает справедливость наших выводов.

Проанализируем формулу (14). С достаточной степенью точности для обычных условий можно принять, что

$$\frac{\partial T}{\partial Z} \approx \frac{\partial T}{\partial H} \text{ и } \frac{He}{de} \approx \frac{Ze}{de}.$$

Кроме того, в соответствии с нашими выводами, приведенными в [3], для  $R_3 = 6371$  км,  $p_0 = 760$  мм и  $T_0 = 273,2^\circ$  С и при  $\frac{\partial p}{\partial H} = - \frac{pg}{RT}$ , где  $g = 9,81$  м/сек<sup>2</sup>,  $R = 286,86$  м<sup>2</sup>/сек<sup>2</sup> · град, можно записать

$$- \left( \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial H} - \frac{\partial T}{\partial H} \right) = + \left( 0,0342 + \frac{\partial T}{\partial H} \right). \quad (17)$$

Тогда

$$r''_b = + 10,8 \cdot s \frac{p}{T^2} \left( 0,0342 + \frac{\partial T}{\partial H} \right), \quad (18)$$

или

$$r''_b = 0,0161 \cdot s \cdot \kappa = 0,0161 \cdot s \cdot k, \quad (19)$$

где

$$\kappa = 668,7 \frac{p}{T^2} \left( 0,0342 + \frac{\partial T}{\partial H} \right). \quad (20)$$

Величину «точечного» коэффициента рефракции  $\kappa$  принимаем в дальнейшем равной среднему коэффициенту рефракции для данной линии. Справедливость формулы (19) подтверждается расчетами по известному простому соотношению

$$r''_b = \frac{\rho'' \cdot s}{2R_3} \cdot k = 0,0161 \cdot s \cdot k. \quad (21)$$

Таким образом, формулы (14) и (15) всегда могут быть использованы, если имеется возможность определять величины  $p$ ,  $T$  и их вертикальные и горизонтальные градиенты.

Преобразование формул (8) и (9) для светового диапазона и приведение их к общеупотребляемым формулам вычисления вертикальной и горизонтальной составляющей рефракции подтвердило их справедливость и обоснованность применяемой теории.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Изотов А. А., Пеллинен Л. П. Исследование земной рефракции и методов геодезического нивелирования. Труды ЦНИИГАиК, вып. 102. Геодезиздат, М., 1955.
2. Маслич Д. И. Основные итоги исследования земной рефракции в горных условиях. В сб. «Труды республиканской научно-технической конференции, посвященной 50-летию геодезической службы СССР». Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1970.
3. Маслич Д. И. Особенности определения высот из геодезического нивелирования в горно-долинных районах. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 11. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1970.
4. Пахомов Л. А., Пинус Н. З., Шметер С. М. Аэрологические исследования изменчивости коэффициента преломления атмосферы для ультракоротких радиоволн. Гидрометеоздат, М., 1960.
5. Рабинович Б. Н. О действии боковой рефракции в триангуляции СССР. Труды ЦНИИГАиК, вып. 62. Геодезиздат, М., 1949.
6. Moritz H. Zur Geometrie der Refraction. «Österr. Vermesungswesen», 1962, 50, Nr. 1.

Работа поступила  
6 ноября 1970 г.