

УДК 528.33:35

НГУЕН ВАН ТЕУ

### ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ ПОЛОЖЕНИЯ ПУНКТОВ ЦЕПИ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ, ПРОЛОЖЕННОЙ МЕЖДУ ТВЕРДЫМИ ПУНКТАМИ

В этой статье приводятся формулы оценки влияния ошибок непосредственных измерений на продольный сдвиг пунктов цепи линейно-угловой триангуляции с измерением всех углов и сторон.

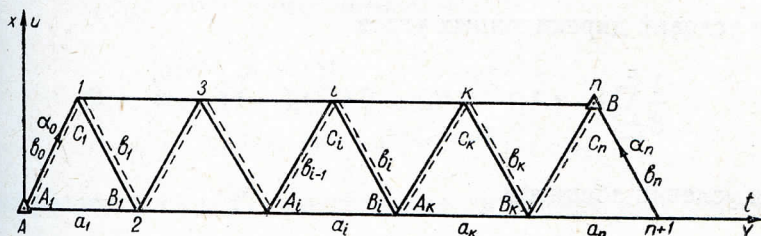


Схема ряда линейно-угловой триангуляции.

Пусть цепь состоит из  $n$  равносторонних треугольников (здесь  $n$  — нечетное число) и расположена между твердыми пунктами  $A, B$  и твердыми дирекционными углами  $\alpha_0, \alpha_n$  (см. рисунок).

Формулы приведены для случая, когда цепь уравнена по углам за все условия в ней.

Допустим, что нижнее основание цепи совпало с осью ординат  $Y$  и начало координат в исходной точке  $A$ . Ходовую линию выбираем по связующим сторонам. В этой цепи, как показано в [4], возникает  $n$  условий фигур,  $2n$  синусных условий, одно условие дирекционных углов и два условия координат.

При уравнивании вероятнейшие поправки к измеренным углам и сторонам должны удовлетворять известному условию

$$[p_\beta v_\beta^2] + [p_s v_s^2] = \min, \quad (1)$$

где  $v_\beta, v_s$  — вероятнейшие поправки к измеренным углам и сторонам;  $p_\beta, p_s$  — их веса.

Допустим, что все стороны измерены с одинаковой относительной ошибкой  $\frac{m_s}{s}$  и все углы — с ошибкой  $m_\beta$ . Тогда условие (1) можно привести к виду

$$\frac{\mu^2}{m_\beta^2} \left\{ [v_\beta^2] + \left( \frac{m_\beta^2}{\rho''^2} \cdot \frac{s^2}{m_s^2} \right) [v_{\ln s}^2] \right\} = \min, \quad (2)$$

где  $\mu$  — средняя квадратическая ошибка единицы веса;  $v_{\ln s}$  — вероятнейшие поправки к натуральным логарифмам измеренных сторон;  $\rho'' = 206,265''$ .



Таким образом, для уравновешивания цепи можно принимать, что

$$\mu = m_\beta, p_\beta = 1, p_{\ln s} = \left( \frac{m''^2}{\rho''^2} \cdot \frac{s^2}{m_s^2} \right) = \frac{1}{q}, \quad (3)$$

где  $p_{\ln s}$  — вес натуральных логарифмов измеренных сторон.

Для решения нормальных уравнений применим двухгрупповой метод. В первую группу внесены все условия фигур, во вторую — все остальные условия. Преобразованные условные уравнения второй группы записываем следующим образом:

для первых  $n$  синусных условий

$$-(\ln b_{i-1}) + (\ln a_i) - \delta(c_i) + \delta(B_i) + \omega_a = 0; \quad (4)$$

для вторых  $n$  синусных условий

$$+(\ln b_i) - (\ln b_{i-1}) - \delta(A_i) + \delta(B_i) + \omega_b = 0; \quad (5)$$

для условий дирекционных углов

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n [-(A_i) - (B_i) + 2(C_i)](-1)^i + \omega_c = 0; \quad (6)$$

для условия абсциссы

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\ln b_i)(-1)^i + \frac{\delta}{3} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)[(A_i) + (B_i) - 2(C_i)](-1)^i + \omega_d = 0; \quad (7)$$

для условия ординаты

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\ln b_i) + \delta [-(A_2) - (B_2) + 2(C_2) - (A_4) - (B_4) - 2(C_4) + \dots \\ \dots + (A_{n-1}) - (B_{n-1}) + 2(C_{n-1})] + \omega_e = 0. \quad (8)$$

Получаем преобразованные уравнения весовой функции продольного сдвига пункта с номером  $k$  (здесь  $k$  — нечетное число)

$$\frac{2}{s} dt_k = \sum_{i=0}^{k-1} (\ln b_i) + \delta [-(A_2) - (B_2) + 2(C_2) - (A_4) - (B_4) + \\ + 2(C_4) - \dots - (A_{k-1}) - (B_{k-1}) + 2(C_{k-1})], \quad (9)$$

где  $i$  — порядковый номер треугольника;  $(\ln a_i)$ ,  $(\ln b_i)$  — вероятнейшие поправки к натуральным логарифмам измеренных сторон;  $(A_i)$ ,  $(B_i)$ ,  $(C_i)$  — вероятнейшие поправки к измеренным углам, выраженные в радианной мере;  $\delta = \text{ctg } 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $\omega$  — свободные члены условных уравнений.

Обозначим коэффициенты  $n$  синусных уравнений (4) через  $a_i$ ,  $n$  уравнения (5) — через  $b_i$ , условия (6) — через  $c$ , уравнения (7) — через  $d$ , уравнения (8) — через  $e$  и уравнения весовой функции (9) — через  $f_i$ .



Обратный вес продольного сдвига пункта с номером  $k$  определяется формулой

$$\left(\frac{2}{s}\right)^2 \frac{1}{P_{t_k}} = [qf_i f_i] - \sum_{i=1}^n \frac{[qa_i f_i \cdot (i-1)]^2}{[qa_i a_i (i-1)]} - \sum_{i=1}^n \frac{[qb_i f_i \cdot (n+i-1)]^2}{[qb_i b_i \cdot (n+i-1)]} - \frac{[qcf_i \cdot 2n]^2}{[qcc \cdot 2n]} - \frac{[qdf_i \cdot (2n+1)]^2}{[qdd \cdot (2n+1)]} - \frac{[qef_i \cdot (2n+2)]^2}{[qee \cdot (2n+2)]}. \quad (10)$$

Из [4] знаем, что

$$[qa_i a_i \cdot (i-1)] = +2\gamma; \quad (11)$$

$$[qb_i b_i \cdot (n+i-1)] = \frac{1}{2}(B_1 + \sqrt{B_1^2 - q^2}) = B, \quad (12)$$

$$B_1 = +\frac{3}{2}\gamma - \frac{q^2}{2\gamma}, \text{ где } \gamma = \delta^2 + q; \quad (13)$$

$$[qcc \cdot 2n] = +nC_1; \quad (13)$$

$$[qdd \cdot (2n+1)] = +\frac{n(n^2+11)}{36} C_1; \quad (14)$$

$$[qee \cdot (2n+2)] = +nE_1. \quad (15)$$

Коэффициенты  $C_1$  и  $E_1$  определяются эмпирическими формулами

$$C_1 = +0,065 v^2 - 0,414 v + 0,789; \quad (16)$$

$$E_1 = +\frac{0,430}{v^2} + \frac{0,189}{v} - 0,014, \quad (17)$$

где  $v = \frac{m_p''}{\rho''} \cdot \frac{s}{m_s}$  — отношение ошибки измеренных углов (выраженной в радианной мере) к относительной ошибке измеренных сторон. Как показано в работе [2], для линейно-угловой триангуляции целесообразно принимать значения  $v$  в интервале  $\frac{1}{3} \leq v \leq 3$ .

Ниже приводим значения коэффициентов  $C_1$  и  $E_1$  при различных величинах  $v$ .

$v$	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0	2,5
$C_1$	0,598	0,531	0,440	0,314	0,221	0,160
$E_1$	2,084	1,134	0,605	0,303	0,188	0,130

Определим остальные члены формулы (10). Из выражений (4) — (9) находим

$$[qf_i f_i] = +3\delta^2(k-1) + kq, \quad (18)$$

при  $1 \leq i \leq k$  имеем

$$\begin{aligned} [qa_1 f_i] &= -q, & [qa_2 f_i] &= -3\delta^2 - q; \\ [qa_3 f_i] &= -q, & [qa_3 f_i] &= -3\delta^2 - q; \\ & \dots & & \dots \\ [qa_k f_i] &= -q. \end{aligned} \quad (19)$$

Когда  $(k+1) \leq i \leq n$ , то

$$[qa_i f_i] = 0. \quad (20)$$

Далее

$$[qb_1 f_t] = [qb_2 f_t] = \dots = [qb_{k-1} f_t] = [qb_{k+1} f_t] = \dots$$

$$\dots = [qb_{n-1} f_t] = [qb_n f_t] = 0,$$

$$[qb_k f_t] = -q; \quad (21)$$

$$[qcf_t] = + (k-1)\delta; \quad (22)$$

а

$$[qdf_t] = -2\delta^2 [(n-2) + (n-4) + (n-6) + \dots$$

$$\dots + (n-k+1) + q = -\frac{\delta^2 (k-1)(2n-k-1)}{2} + q; \quad (23)$$

$$[qef_t] = +3\delta^2 (k-1) + kq. \quad (24)$$

Первые  $n$  синусных уравнений (4) не зависят друг от друга, поэтому при решении нормальных уравнений по схеме Гаусса получаем

$$[qa_i f_t \cdot (i-1)] = [qaf_t], \quad 1 \leq i \leq n. \quad (25)$$

Для остальных коэффициентов имеем

$$[qb_1 f_t \cdot n] = -\frac{\delta^2 q}{\gamma} = M; \quad (26)$$

$$[qb_2 f_t \cdot (n+1)] = \frac{\delta^2}{2\gamma} (3\delta^2 + 4q) + Mr = N + Mr, \quad (27)$$

где

$$N = \frac{\delta^2}{2\gamma} (3\delta^2 + 4q);$$

$$[qb_3 f_t \cdot (n+2)] = M + Nr + Mr^2; \quad (28)$$

$$[qb_4 f_t \cdot (n+3)] = N + Mr + Nr^2 + Mr^3; \quad (29)$$

причем  $r = \frac{q}{2B}$ .

Проводя суммирование, определяем общие выражения для иско-  
мых коэффициентов.

При  $i$  нечетных и  $1 \leq i \leq k-1$

$$[qb_i f_t \cdot (n+i-1)] = M \frac{1-r^{i+1}}{1-r^2} + Nr \frac{1-r^{i-1}}{1-r^2}. \quad (30)$$

При  $i$  четных и  $1 \leq i \leq k-1$

$$[qb_i f_t \cdot (n+i-1)] = (N + Mr) \frac{1-r^i}{1-r^2}. \quad (31)$$

Когда  $k \leq i \leq n$ , имеем

$$[qb_i f_t \cdot (n+i-1)] = Tr^{i-k}, \quad (32)$$

где

$$T = [qb_k f_t \cdot (n+k-1)] = M \frac{1-r^{k+1}}{1-r^2} + Nr \frac{1-r^{k-1}}{1-r^2} + \frac{q}{2\gamma} (\delta^2 - q). \quad (33)$$

Далее

$$[qcf_t \cdot 2n] = [qcf_t] - \sum_{i=1}^n \frac{[qa_i c \cdot (i-1)][qa_i f_t \cdot (i-1)]}{[qa_i a_i \cdot (i-1)]} -$$

$$- \sum_{i=1}^n \frac{[qb_i c \cdot (n+i-1)][qb_i f_t \cdot (n+i-1)]}{[qb_i b_i \cdot (n+i-1)]}. \quad (34)$$



Из [4] находим

$$[qa_i c \cdot (i-1)] = (-1)^{i+1} \delta; \quad (35)$$

$$[qb_i c(n+i-1)] = (-1)^i \delta h \frac{1 - (-r)^i}{1+r}; \quad (36)$$

$$[qb_n c \cdot (2n-1)] = -\frac{\delta h(1+r^n)}{1+r} + \frac{\delta q}{2\gamma}, \quad (37)$$

где  $h = \frac{1}{2} + \frac{b}{2\gamma}$ .

После подстановки (11), (12), (22), (25), (30) — (32), (35) — (37) в (34) с некоторым приближением получаем

$$[qc \cdot f_i \cdot 2n] = +\frac{\sqrt{3}}{2} k C_1. \quad (38)$$

Далее таким же способом, зная из [4], что

$$[qa_i d \cdot (i-1)] = (-1)^i [(n-i)\delta + q]; \quad (39)$$

$$[qb_i d \cdot (n+i-1)] = (-1)^i \left\{ G \frac{1 - (-r)^i}{1+r} + H \frac{[i + (i+1)r + (-r)^{i+1}]}{(1+r)^2} \right\}; \quad (40)$$

$$[qb_n d \cdot (2n-1)] = -G \frac{1+r^n}{1+r} - H \frac{[n + (n+1)r + r^{n+1}]}{(1+r)^2} + \frac{q}{2\gamma} (3\delta^2 + q); \quad (41)$$

$$[qcd \cdot 2n] = -\frac{n(n-1)}{2\sqrt{3}} C_1. \quad (42)$$

находим приближенное выражение

$$[qdf_i \cdot (2n+1)] = -\frac{k(n-k)}{4} C_1. \quad (43)$$

Из [4] видно, что  $[qa_i e \cdot (i-1)]$  можно определять по формуле (25),  $[qb_i e \cdot (n+i-1)]$  можно вычислять по (30), (31), (33), причем вместо  $k$  надо поставить  $n$ ,

$$[qce \cdot 2n] = +\frac{\sqrt{3}}{2} n C_1; \quad (44)$$

$$[qde \cdot (2n+1)] = +\frac{n}{12} C_1. \quad (45)$$

После преобразования по схеме Гаусса, пренебрегая некоторыми малыми значениями, получаем

$$[qef_i \cdot (2n+2)] = +kE_1. \quad (46)$$

Подставив все полученные члены в формулу (10), находим приближенную формулу для определения обратного веса продольного сдвига пункта с номером  $k$

$$\left(\frac{2}{s}\right)^2 \frac{1}{P_{t_k}} = \frac{k(n-k)}{4n} (4E_1 + 3C_1) - \frac{9k^2(n-k)^2}{4n(n^2+11)} C_1. \quad (47)$$



Если цепь линейно-угловой триангуляции расположена только между исходными дирекционными углами, то на основании выражений (11)–(13), (18), (25), (30)–(32) и (38) находим

$$\left(\frac{2}{s}\right)^2 \frac{1}{P_{t_k}'} = kE_1 + \frac{3k(n-k)}{4n} C_1. \quad (48)$$

Вопросы оценки продольного сдвига конечного пункта цепи линейно-угловой триангуляции, проложенной между исходными азимутами, освещены в работах [1, 3, 5].

Переходя к среднему продольному сдвигу, выводим следующую формулу для цепи между твердыми пунктами:

$$m_{t_k} = \pm \frac{\mu''}{\rho''} s \sqrt{\frac{k(n-k)}{16n} (4E_1 + 3C_1) - \frac{9k^2(n-k)^2}{16n(n^2+11)} C_1}. \quad (49)$$

Для цепи между исходными дирекционными углами имеем

$$m_{t_k}' = \pm \frac{\mu''}{\rho''} s \sqrt{\frac{kE_1}{4} + \frac{3k(n-k)}{16n} C_1}, \quad (50)$$

где  $s$  — длина стороны равностороннего треугольника.

Выведенные формулы были проверены путем сравнения средних продольных сдвигов, вычисленных по формулам (49) и (50) и определенных из схемы Гаусса. При решении примеров было принято, что  $v=1$ ,  $n=9$  и  $k=5$ ,  $n=16$  и  $k=8$ ,  $n=17$  и  $k=7,8$ . Кроме того, были сравнены результаты, определенные по формуле (50) и вычисленные С. Г. Судаковым [6] из строгих уравниваний, причем  $n=20$ ,  $k=21$ ,  $s=20$  км,  $m_{\beta}^* = \pm 0,7'' \frac{m_{\beta}}{s} = 1 : 300\,000$ . Результаты проверки приведены в табл. 1.

Таблица 1

Величины и точность продольного сдвига цепей линейно-угловой триангуляции

Число треугольников в цепи $n$	№ пункта $k$	Цепь между твердыми пунктами			Цепь между твердыми дирекционными углами		
		По формуле (49)	По схеме Гаусса	Погрешность, %	По формуле (50)	По схеме Гаусса	Погрешность, %
9	5	$063,2 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$0,627 \frac{\mu''}{\rho''} s$	1,0	$0,969 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$0,953 \frac{\mu''}{\rho''} s$	1,7
16	8	0,835 "	0,823 "	1,5	1,241 "	1,242 "	3,5
17	7	0,851 "	0,964 "	1,5	1,182 "	1,145 "	
17	8	0,859 "	0,840 "	2,2	1,249 "	1,250 "	
20	21				0,12 м	0,12* м	

\* Результат вычислен С. Г. Судаковым [6].

Из данных табл. 1 видно, что формулы (49), (50) с достаточною точностью можно использовать для оценки продольного сдвига рассматриваемой цепи линейно-угловой триангуляции. По полученным формулам производится анализ характера распределения продольного сдвига разных пунктов цепи линейно-угловой триангуляции, состоящей из равносторонних треугольников. В вычислении было принято, что  $n=17$



значения  $\nu$  составляют 0,5; 0,7; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5 и  $k$  равно 2, 4, 7, 9, 13, 16.

Для сравнения одновременно производилось определение продольного сдвига в середине и в конце аналогичной цепи, проложенной только между исходными дирекционными углами. Все результаты расчета приведены в табл. 2.

Таблица 2

Данные оценки продольного сдвига цепи линейно-угловой триангуляции,

№ пункта $k$	Значения $\nu$					
	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0	2,5
Для цепи между твердыми пунктами						
2	$1,03 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$0,79 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$0,61 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$0,45 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$0,37 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$0,31 \frac{\mu''}{\rho''} s$
4	1,33 —	1,01 —	0,76 —	0,56 —	0,45 —	0,38 —
7	1,51 —	1,14 —	0,85 —	0,62 —	0,49 —	0,41 —
9	1,53 —	1,15 —	0,86 —	0,63 —	0,50 —	0,42 —
10	1,51 —	1,14 —	0,85 —	0,62 —	0,49 —	0,41 —
13	1,33 —	1,01 —	0,76 —	0,56 —	0,45 —	0,38 —
16	0,76 —	0,59 —	0,46 —	0,34 —	0,28 —	0,23 —
Для цепи между твердыми дирекционными углами						
9	$2,27 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$1,72 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$1,31 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$0,96 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$0,77 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$0,65 \frac{\mu''}{\rho''} s$
17	2,98 —	2,19 —	1,60 —	1,14 —	0,89 —	0,74 —

Из результатов вычислений можно сделать следующие выводы. Средний продольный сдвиг пунктов в рассматриваемых цепях уменьшается с увеличением значения  $\nu$ . Когда  $\nu$  возрастает от 0,5 до 5, то  $m_k$  убывает почти в 3,5 раза. В середине цепи между твердыми пунктами продольный сдвиг имеет наибольшую величину.

Наибольшая величина продольного сдвига пункта в цепи между твердыми пунктами в 1,9 раза меньше, чем та же величина в аналогичной цепи между только твердыми дирекционными углами.

Выведенные формулы можно использовать для оценки продольного сдвига рассматриваемых цепей линейно-угловой триангуляции при четных и нечетных числах  $n$  и  $k$  и разных значениях  $\nu$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов П. И. Продольный и поперечный сдвиги триангуляционного ряда дополнительно измеренными связующими сторонами. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 3. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1965.
2. Карев П. А. О соотношении точностей угловых и линейных измерений в линейно-угловых построениях. Труды НИИГАиК, т. 19, вып. 1. Геодезиздат, М., 1967.
3. Лапинг К. А. О точности построения рядов с измеренными сторонами и углами. «Геодезия и картография», 1957, № 4.
4. Нгуен Ван Теу. Ошибка дирекционного угла связующих сторон цепи линейно-угловой триангуляции, проложенной между твердыми пунктами. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 14. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1971.
5. Проворов К. Л. Точность цепи триангуляции с измеренными сторонами и углами. «Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка», 1959, № 3.
6. Судаков С. Г. Перспективы развития астрономогеодезической сети в СССР. Труды третьего съезда ВАГО, М., 1962.