

В. П. НОВОСЕЛЬСКАЯ

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ СТОРОН В РЯДЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

При оценке точности геодезических сетей обычно рассматривают ошибки длин и дирекционных углов сторон, а также продольные и поперечные сдвиги диагоналей ряда геометрических фигур, по которым судят о точности передачи координат. В работе [1] приведены формулы для оценки точности дирекционных углов сторон, продольных и поперечных сдвигов ряда геодезических квадратов линейно-угловой триангуляции. Наша статья посвящена вопросу точности связующих и промежуточных сторон указанного ряда.

В ряде, состоящем из геодезических квадратов (см. рисунок), измерены все углы и стороны. Как известно из способа наименьших квадратов, средняя квадратическая ошибка функции уравнишенных величин вычисляется по формуле

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{p_F}},$$

где μ — ошибка единицы веса; p_F — вес рассматриваемой функции.

В свободном ряде геодезических квадратов, строго ориентированном по координатным осям, при уравнивании по методу условных измерений возникает $3N$ (N — число квадратов в цепи) условных уравнений фигур вида

$$(8i - 7) + (8i - 6) + (8i - 5) + (8i - 4) + \omega_{i,1} = 0; \quad (1)$$

$$(8i - 3) + (8i - 2) + (8i - 1) + (8i) + \omega_{i,2} = 0; \quad (2)$$

$$(8i - 5) + (8i - 4) + (8i - 3) + (8i - 2) + \omega_{i,3} = 0 \quad (3)$$

и $6N$ уравнений сторон вида

$$\delta_{8i-7}(8i - 7) - \delta_{8i-4}(8i - 4) + (\lg a_i) - (\lg b_{2i-1}) + \omega_{i,4} = 0; \quad (4)$$

$$- \delta_{8i-7}(8i - 7) + (\lg b_{2i-1}) - (\lg c_{2i-1}) + \omega_{i,5} = 0; \quad (5)$$

$$\delta_{8i-3}(8i - 3) - \delta_{8i}(8i) + (\lg a_{i+1}) - (\lg b_{2i}) + \omega_{i,6} = 0; \quad (6)$$

$$- \delta_{8i-2}(8i - 3) + (\lg b_{2i}) - (\lg c_{2i-1}) + \omega_{i,7} = 0; \quad (7)$$

$$- \delta_{8i-2}(8i - 2) + (\lg b_{2i-1}) - (\lg c_{2i}) + \omega_{i,8} = 0; \quad (8)$$

$$- \delta_{8i-5}(8i - 5) + (\lg a_{i+1}) - (\lg c_{2i}) + \omega_{i,9} = 0; \quad (9)$$

где i — порядковый номер геодезического квадрата; $(8i)$, $(\lg a)$, $(\lg b)$ и $(\lg c)$ — вероятнейшие поправки к измеренным углам и логарифмам длин сторон; δ — приращение логарифма синуса угла при изменении угла на $1''$ (для равнобедренного прямоугольного треугольника $\delta_{45^\circ} = 2,11$, $\delta_{90^\circ} = 0$); ω — свободные члены условных уравнений.

Весовые функции записываем следующим образом:
 для связующей стороны a_{i+1} квадрата с номером i

$$d \lg a_{i+1} = (\lg a_{i+1}); \quad (10)$$

для промежуточной стороны b_{2i} квадрата с номером i

$$d \lg b_{2i} = (\lg b_{2i}). \quad (11)$$

Для совместного уравнивания измеренных углов и сторон необходимо установить соотношение размеров угловых и линейных по-

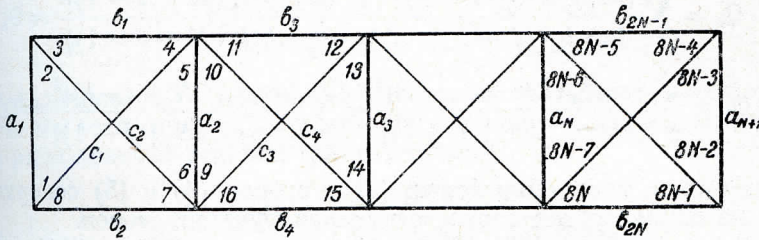


Схема ряда линейно-угловой триангуляции.

правок при помощи весов. В работе [2] показано, что при уравнивании можно принять $p_\beta = 1$, тогда $p_{\lg s} = \frac{1}{q}$, где $q = \frac{1}{p_{\lg s}} = \left(\frac{10^6 \mu m_s}{m_s S} \right)^2$; m_β , m_s — средние квадратические ошибки измеренных величин; μ — модуль перехода, равный 0,4343.

Для решения нормальных уравнений применяем двухгрупповой метод. В первую группу относим $2N$ условных уравнений фигур (1) и (2), во вторую — все остальные условные уравнения. Преобразование коэффициентов второй группы производим так, как показано в работе [1]. Преобразованные коэффициенты второй группы уравнений фигур (3) обозначаем через $a\sqrt{\pi}$, а уравнений сторон (4) — (6) — через $b\sqrt{\pi}$, $c\sqrt{\pi}$ и $d\sqrt{\pi}$. Преобразованные коэффициенты в весовых функциях обозначаем через $f_a\sqrt{\pi}$ и $f_b\sqrt{\pi}$.

Для определения веса уравненных величин используем формулу обратного веса, которую записываем следующим образом:

$$\frac{1}{p_f} = [\pi f f] - (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7), \quad (12)$$

где $[\pi f f]$ — квадратичный коэффициент соответствующей функции; $[\pi] = \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix}$; Q_1, Q_2, Q_3, \dots — значения величин, вносимых условными уравнениями фигур и сторон второй группы в обратные веса функции.

Квадратичные коэффициенты для весовых функций связующей a_{i+1} и промежуточной b_{2i} сторон имеют значения

$$[\pi f_a f_a] = [\pi f_b f_b] = q. \quad (13)$$

Определяем величины Q_1, Q_2, Q_3, \dots для каждой функции. Условные уравнения фигур (3) с весовыми функциями (10) и (11) образуют такие коэффициенты эквивалентной системы нормальных уравнений:

$$[\pi a_i f_a (i-1)] = [\pi a_i f_b (i-1)] = 0.$$

Уравнения сторон (4) и весовые функции (10) и (11) дают коэффициенты

$$[\pi b_i f_a (N+i-1)] = [\pi b_i f_b (N+i-1)] = 0.$$

Уравнения сторон (5) и весовые функции (10) и (11) образуют коэффициенты

$$[\pi c_i f_a (2N+i-1)] = [\pi c_i f_b (2N+i-1)] = 0.$$

Для всех приведенных выше коэффициентов $i=1, 2, 3, \dots, N$. Следовательно,

$$Q_1 = \sum_{i=1}^N \frac{[\pi a_i f_a(i-1)]^2}{[\pi a_i a_i(i-1)]} = \sum_{i=1}^N \frac{[\pi a_i f_b(i-1)]^2}{[\pi a_i a_i(i-1)]} = 0;$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^N \frac{[\pi b_i f_a(N+i-1)]^2}{[\pi b_i b_i(N+i-1)]} = \sum_{i=1}^N \frac{[\pi b_i f_b(N+i-1)]^2}{[\pi b_i b_i(N+i-1)]} = 0;$$

$$Q_3 = \sum_{i=1}^N \frac{[\pi c_i f_a(2N+i-1)]^2}{[\pi c_i c_i(2N+i-1)]} = \sum_{i=1}^N \frac{[\pi c_i f_b(2N+i-1)]^2}{[\pi c_i c_i(2N+i-1)]} = 0.$$

Как видно, уравнения фигур (3) и сторон (4) и (5) совершенно не влияют на обратный вес соответствующей функции сторон.

Уравнения сторон (6) и весовые функции (10) и (11) образуют следующие коэффициенты эквивалентной системы нормальных уравнений:

$$[\pi d_i f_a(3N+i-1)] = [\pi d_i f_b(3N+i-1)] = 0;$$

$$[\pi d_N f_a(4N-1)] = q; \quad [\pi d_N f_b(4N-1)] = -q,$$

где $i=1, 2, 3, \dots, N-1$.

В работе [1] показано, как получены квадратичные коэффициенты эквивалентной системы нормальных уравнений. Нужный нам для определения Q_4 коэффициент $[\pi d_N d_N(4N-1)]$ взят из работы [1]. Записываем его в таком виде:

$$[\pi d_N d_N(4N-1)] = \frac{(1,5\delta^2 + 2q)^2 - 0,25\delta^4}{1,5\delta^2 + 2q}.$$

Следовательно,

$$Q_4 = \sum_{i=1}^N \frac{[\pi d_i f_a(3N+i-1)]^2}{[\pi d_i d_i(3N+i-1)]} = \sum_{i=1}^N \frac{[\pi d_i f_b(3N+i-1)]^2}{[\pi d_i d_i(3N+i-1)]} =$$

$$= \frac{q^2(1,5\delta^2 + 2q)}{(1,5\delta^2 + 2q)^2 - 0,25\delta^4}. \quad (14)$$

Выражения для Q_5, Q_6 и Q_7 получаются громоздкими, и лучше их выразить через известное Q_4 . Для этого были решены по схеме Гаусса системы нормальных уравнений при N , равном 1, 2, 5, и различном соотношении точностей угловых и линейных измерений. Результаты этих вычислений приведены ниже.

Значения величин Q

N	1	2	5	5	5
$\frac{m_S}{m_{\beta} S}$	1/200 000	1/200 000	1/200 000	1/350 000	1/500 000
Для функции связующей стороны					
Q_4	1,4089	1,4117	1,4118	1,2037	0,0987
Q_5	1,0174	1,1049	1,1096	0,1794	0,0923
Q_6	0,0300	0,0250	0,0244	0,0032	0,0022
Q_7	0,3422	0,2895	0,2858	0,1020	0,0668
$Q_5+Q_6+Q_7$	1,3896	1,4194	1,4198	0,2846	0,1613
Для функции промежуточной стороны					
Q_4	1,4089	1,4117	1,4118	0,2037	0,0987
Q_5	1,0174	1,0374	1,0386	0,1761	0,0914
Q_6	0,3323	0,3223	0,3217	0,1092	0,0697
Q_7	0,0399	0,0595	0,0592	0,0004	0,0004
$Q_5+Q_6+Q_7$	1,3896	1,4192	1,4195	0,2857	0,1615

Как видно из приведенных данных, суммы Q для функции связующей и промежуточной сторон совершенно одинаковы. Выразим значение $Q_5 + Q_6 + Q_7$ через Q_4 . При $\frac{1}{200\,000} < \frac{m_s}{m_p S} < \frac{1}{500\,000}$ и любом практически применяемом N с достаточной точностью для $\frac{1}{p}$ можно принять

$$Q_5 + Q_6 + Q_7 = Q_4. \quad (15)$$

Зная величины (13), (14) и (15), находим приближенную формулу для обратного веса связующей и промежуточной сторон геодезического квадрата ряда линейно-угловой триангуляции

$$\frac{1}{p_{lg a}} - \frac{1}{p_{lg b}} = q - \frac{2q^2(1,5\delta^2 + 2q)}{(1,5\delta^2 + 2q)^2 - 0,25\delta^4}. \quad (16)$$

Как видно из формулы (16), обратный вес сторон не зависит от количества фигур в ряде, а зависит только от формы фигур и соотношения точности угловых и линейных измерений.

Ниже приводим значения обратных весов $\frac{1}{p_{lg a}}$ и $\frac{1}{p_{lg b}}$, полученных из решения схемы Гаусса и вычисленных по формуле (16).

Величины и точность обратных весов для функции связующей и промежуточной стороны

N	1	2	5	5	5
$\frac{m_s}{m_p S}$	1/200 000	1/200 000	1/200 000	1/350 000	1/500 000
$\frac{1}{p_{a,b}}$ по схеме Гаусса	1,92	1,89	1,89	0,85	0,62
$\frac{1}{p_{a,b}}$ по формуле (16)	1,90	1,90	1,90	0,93	0,68
Погрешность, %	1,0	0,5	0,5	9,4	9,6

Из приведенных выше данных видно, что погрешности обратных весов, вычисленных по формулам, невелики и этими формулами можно пользоваться при оценке точности сетей.

ЛИТЕРАТУРА

- Новосельская В. П. Точность цепи линейно-угловой триангуляции. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 1. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1964.
- Проворов К. Л. Точность цепи триангуляции с измеренными сторонами и углами. «Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка», 1959, № 3.

Работа поступила:
26 ноября 1970 г.