РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1971 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 1

УДК 528.33:3

НГУЕН ВАН ТЕУ

ОШИБКА ДИРЕКЦИОННОГО УГЛА СВЯЗУЮЩИХ СТОРОН ЦЕПИ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ, ПРОЛОЖЕННОЙ МЕЖДУ ТВЕРДЫМИ ПУНКТАМИ

Развитие техники линейных измерений радио- и светодальномерами позволяет усовершенствовать методы построения геодезических сетей и значительно повысить точность их элементов. В связи с этим возникает необходимость изучения характера распределения ошибок в цепи линейно-угловой триангуляции [1, 2, 3, 4].

В настоящей статье приведены формулы и анализ характера распределения ошибок дирекционного угла связующих сторон цепи линейно-угловой триангуляции с измерением всех углов и сторон в ней, проложенной между твердыми пунктами (рисунок).

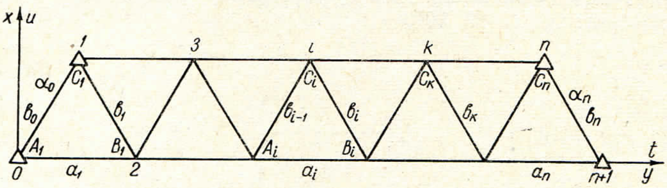

Схема цепи линейно-угловой триангуляции между твердыми пунктами.

При выводе формул было принято, что цепь состоит из равносторонних треугольников.

При уравнивании по методу условных измерений в цепи возникает n условных уравнений фигур (n — число треугольников в цепи, здесь нечетное) вида:

$$(A_i)+(B_i)+(C_i)+w_ф=0; \tag{1}$$

n синусных условных уравнений

$$-(\ln b_{i-1})+(\ln a_i)-\delta(C_i)+\delta(B_i)+w_a=0; \tag{2}$$

n синусных условных уравнений

$$+(\ln b_i)-(\ln b_{i-1})+\delta(B_i)-\delta(A_i)+w_b=0; \tag{3}$$

условное уравнение азимутов

$$-(C_1)+(C_2)-(C_3)+(C_4)-\ldots-(C_n)+w_\alpha=0; \tag{4}$$

условное уравнение абсциссы

$$(\ln b_0)-(\ln b_1)+(\ln b_2)-\ldots-(\ln b_{n-1})+\delta[(n-1)(C_1)-(n-2)(C_2)+\ldots-$$
$$-(C_{n-1})]+w_x=0; \tag{5}$$

условное уравнение ординаты

$$(\ln b_0)+(\ln b_1)+(\ln b_2)+\ldots+(\ln b_n-1)+3\delta\,[(C_2)+(C_4)+(C_6)+\ldots+ \\ +(C_{n-1})]+w_y=0, \qquad (6)$$

где i — порядковый номер треугольника; (A_i), (B_i), (C_i) — вероятнейшие поправки к измеренным углам, выражаемые в радианной мере; $(\ln a_i)$, $(\ln b_i)$ — вероятнейшие поправки к натуральным логарифмам измеренных сторон; $\delta=\operatorname{ctg} 60^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; w — свободные члены условных уравнений.

Приращение функции дирекционного угла связующей стороны треугольника с номером k (k принято нечетным) запишем:

$$d\alpha_k=-(C_1)+(C_2)-(C_3)+\ldots-(C_k). \qquad (7)$$

Допустим, что углы измерены с ошибкой m_β. Кроме того, для цепи, состоящей из равносторонних треугольников, можно считать, что все стороны измерены с одинаковой относительной ошибкой $\dfrac{m_s}{s}$. Таким образом, если обозначим через q_β и q_s обратные веса измеренных углов и сторон, то

$$q_\beta=\frac{1}{P_\beta}=1, \qquad q_s=\frac{1}{P_{\ln s}}=\left(\frac{m_s}{s}:\frac{\rho''}{m''_\beta}\right)^2=q. \qquad (8)$$

Цепь треугольников уравнена по двухгрупповому методу уравнивания. В первую группу внесены условные уравнения фигур вида (1), во вторую — остальные уравнения.

Преобразованные уравнения второй группы легко получены по известному правилу Н. А. Урмаева. Так как в синусных условных уравнениях вида (2)и (3) суммы коэффициентов для каждого треугольника равны нулю, то после преобразования коэффициенты этих уравнений не изменяются. Остальные условные уравнения после преобразования имеют вид:

$$\frac{1}{3}\sum_1^n[-(A_i)-(B_i)+2\,(C_i)]\,(-1)^i+w_\alpha=0, \qquad (9)$$

$$\sum_0^{n-1}(\ln b_i)\,(-1)^i+\frac{\delta}{3}\sum_1^{n-1}(n-i)[(A_i)+(B_i)-2\,(C_i)]\,(-1)^i+W_x=0, \qquad (10)$$

$$\sum_0^{n-1}(\ln b_i)+\delta\,[-(A_2)-(B_2)+2\,(C_2)-(A_4)-(B_4)+2\,(C_4)+\ldots- \\ -(A_{n-1})-(B_{n-1})+2\,(C_{n-1})]+W_y=0. \qquad (11)$$

Преобразованное уравнение весовой функции дирекционного угла выглядит так:

$$d\alpha_k=\frac{1}{3}\sum_1^k[-(A_i)-(B_i)+2\,(C_i)]\,(-1)^i. \qquad (12)$$

Обозначим преобразованные коэффициенты синусных условных уравнений (2) через a, уравнений (3) — через b, условного уравнения азимута (9) — через c, условного уравнения абсциссы (10) — через d, уравнения ординаты (11) — через e и весовой функции (12) — через t_α. С применением обозначения

$$\gamma=\delta^2+q, \qquad (13)$$

по преобразованным условным уравнениям второй группы найдены коэффициенты нормальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &[qa_ia_i]=2\gamma; \qquad [qa_ib_i]=\gamma;\\ &[qa_{i+1}b_i]=-q; \qquad [qa_ic]=(-1)^{i+1}\delta;\\ &[qa_id]=(-1)^i[(n-i)\,\delta^2+q]. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Для нечетных i

$$[qa_ie]=-q;$$

для четных i

$$[qa_ie]=-3\delta^2-q.$$

Далее имеем

$$\left.\begin{aligned} &[qb_ib_i]=2\gamma; \qquad [qb_ib_{i+1}]=-q;\\ &[qb_id]=(-1)^i\,2q; \qquad [qcc]=\frac{2}{3}n;\\ &[qcd]=-\frac{\delta}{3}n\,(n-1); \qquad [qce]=+(n-1)\,\delta;\\ &[qdd]=\frac{\delta^2}{9}n\,(2n-1)\,(n-1)+(n+1)\,q;\\ &[qee]=3\,(n-1)\,\delta^2+(n+1)q; \qquad [qde]=-\frac{(n-1)^2}{2}\delta^2. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Для всех приведенных коэффициентов $i=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n$. Остальные коэффициенты равны нулю. Из решения нормальных уравнений получены коэффициенты эквивалентной системы уравнений.

Первые n синусных уравнений (2) не зависят друг от друга, поэтому при исключении по схеме Гаусса коэффициенты (14) n первых нормальных уравнений не изменяются.

Для остальных условных уравнений, опуская вывод,

$$[qb_1b_1\cdot n]=B_1, \tag{16}$$

где

$$B_1=\frac{3}{2}\gamma-\frac{q^2}{2\gamma}. \qquad [qb_ib_i\cdot(n+i-1)]=B_1-\frac{q^2}{4B_{i-1}}, \tag{17}$$

где $\qquad B_{i-1}=[qb_{i-1}b_{i-1}\cdot(n+i-2)].$

Из (17) с достаточной точностью получаем

$$[qb_ib_i\cdot(n+i-1)]=B, \tag{18}$$

$$B=\frac{1}{2}\left(B_1+\sqrt{B_1^2-q^2}\right). \tag{19}$$

Далее

$$[qb_ic\cdot(n+i-1)]=(-1)^i\delta h\,\frac{1-(-r)^i}{1+r}. \tag{20}$$

Формула (20) справедлива для $i<n$, но при $i=n$

$$[qb_nc\,(2n-1)]=-\delta h\,\frac{1+r^n}{1+r}+\frac{\delta q}{2\gamma}, \tag{21}$$

где

$$h=\frac{1}{2}+\frac{q}{2\gamma}; \qquad r=\frac{q}{2B}. \tag{22}$$

$$[qb_i d\cdot(n+i-1)]=(-1)^i\left\{G\frac{1-(-r)^i}{1+r}+H\frac{[i+(i+1)r+(-r)^{i+1}]}{(1+r)^2}\right\}, \tag{23}$$

где

$$G=\frac{q}{\gamma}(2\delta^2+q)-n\delta^2 h; \qquad H=\delta^2 h. \tag{24}$$

При $i=n$

$$[qb_n d\cdot(2n-1)]=-G\frac{1+r^n}{1+r}-\frac{H[n+(n+1)r+r^{n+1}]}{(1+r)^2}+\frac{q}{2\gamma}(\delta^2-q). \tag{25}$$

Для нечетных i

$$[qb_i e(n+i-1)]=M\frac{1-r^{i+1}}{1-r^2}+Nr\frac{1-r^{i-1}}{1-r^2}. \tag{26}$$

Для четных i

$$[qb_i e(n+i-1)]=(N+Mr)\frac{1-r^i}{1-r^2}. \tag{27}$$

При $i=n$

$$[qb_n e(2n-1)]=M\frac{1-r^{n+1}}{1-r^2}+Nr\frac{1-r^{n-1}}{1-r^2}+\frac{q}{2\gamma}(3\delta^2+q), \tag{28}$$

где

$$M=-\frac{\delta^2 q}{\gamma}; \qquad N=\frac{\delta^2}{2\gamma}(3\delta^2+4q). \tag{29}$$

Несколько сложнее определяются коэффициенты следующих нормальных уравнений.

Пренебрегая некоторыми малыми величинами, имеем

$$[qcc\cdot 2n]=C_1 n, \tag{30}$$

где

$$C_1=\frac{2}{3}-\frac{\delta^2}{2\gamma}-\frac{\delta^2 h^2}{B(1+r)^2}, \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned}
&[qcd\cdot 2n]=-\frac{n(n-1)}{2\sqrt{3}}C_1,\\
&[qce\cdot 2n]=+\frac{\sqrt{3}}{2}n\cdot C_1;\\
&[qdd\cdot(2n+1)]=+\frac{n(n^2+11)}{36}C_1,\\
&[qde\cdot(2n+1)]=\frac{n}{12}C_1,\\
&[qee\cdot(2n+2)]=nE_1,
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

где

$$E_1=\frac{3}{2}C_1+\frac{q}{2\gamma}(q+\delta^2)+\frac{\delta^4(3\delta^2+4q)r}{\gamma^2(1-r)^2}-\frac{9\delta^4 h^2 r}{B(1-r^2)^2}. \tag{33}$$

Выражения C_1 (31) и E_1 (33) согласуются со следующими эмпир ческими формулами:

$$C_1 = +0{,}065\nu^2 - 0{,}414\nu + 0{,}789,$$

$$E_1 = +\frac{0{,}506}{\nu^2} + 0{,}079,$$

где $\nu = \frac{m''_\beta}{\rho''} : \frac{m_s}{s}$ — отношения ошибки измеренных углов, выраженн в радианной мере, к относительной ошибке измеренных сторон.

Приступим к определению обратного веса весовой функции (1

По преобразованным условным уравнениям и весовой функц находим

$$\left.\begin{aligned}
&[qf_\alpha f_\alpha] = \frac{2}{3}k, \qquad [qa_i f_\alpha] = (-1)^{i+1}\delta,\\
&qb_i f_\alpha] = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant k,\\
&[qcf_\alpha] = \frac{2}{3}k; \qquad [qef_\alpha] = (k-1)\delta\\
&[qdf_\alpha] = -\frac{k\delta}{3}(2n-k-1).
\end{aligned}\right\}$$

Решая нормальные уравнения, получаем

$$\left.\begin{aligned}
&[qa_i f_\alpha (i-1)] = [qa_i c], \qquad 1 \leqslant i \leqslant k,\\
&[qa_i f_\alpha (i-1)] = 0, \qquad k+1 \leqslant i \leqslant n,\\
&[qb_i f_\alpha (n+i-1)] = [qb_i c\,(n+i-1)], \qquad 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&[qb_i f_\alpha (n+i-1)] = Qr^{i-k}, \qquad k \leqslant i \leqslant n,
\end{aligned}\right\}$$

где

$$Q = -\frac{\delta h}{1+r}(1+r^k) + \frac{\delta q}{2\gamma}.$$

Опуская вывод, с некоторым приближением находим:

$$\left.\begin{aligned}
&[qcf_\alpha \cdot 2n] = kC_1,\\
&[qdf_\alpha \cdot (2n+1)] = -\frac{k(n-k)}{2\sqrt{3}}C_1,\\
&[qef_\alpha \cdot (2n+2)] = \frac{2k(n-k)}{\sqrt{3}(n^2+11)}C_1.
\end{aligned}\right\}$$

По формуле

$$\frac{1}{P_{\alpha_k}} = [qf_\alpha f_\alpha] - \sum_1^n \frac{[qa_i f_\alpha \cdot (i-1)]^2}{[qa_i a_i \cdot (i-1)]} - \sum_1^n \frac{[pb_i f_\alpha \cdot (n+i-1)]^2}{[qb_i b_i \cdot (n+i-1)]} -$$
$$- \frac{[qcf_\alpha \cdot 2n]^2}{[qcc \cdot 2n]} - \frac{[qdf_\alpha \cdot (2n+1)]^2}{[qdd \cdot (2n+1)]} - \frac{[qef_\alpha \cdot (2n+2)]^2}{[qee \cdot (2n+2)]}$$

определяется обратный вес азимута связующей стороны треугольни с номером k.

Подставляя соответственно полученные значения в формулу (39) и преобразовывая, получаем:

$$\frac{1}{P_{\alpha_k}}=C_1\left[\frac{k(n-k)}{n}-\frac{3k^2(n-k)^2}{n(n^2+11)}-\frac{4k^2(n-k)^2}{3n(n^2+11)^2}\frac{C_1}{E_1}\right]. \qquad (40)$$

Как показывают экспериментальные расчеты, третий член в квадратных скобках является пренебрегаемой величиной по сравнению с остальными членами. Поэтому формула (40) может иметь такой вид:

$$\frac{1}{P_{\alpha_k}}=C_1\left[\frac{k(n-k)}{n}-\frac{3k^2(n-k)^2}{n(n^2+11)}\right], \qquad (41)$$

где C_1 вычисляется по формуле (34).

Если цепь равносторонних треугольников расположена только между исходными азимутами, то находим

$$\frac{1}{P_{\alpha_k}}=C_1\frac{k(n-k)}{n}. \qquad (42)$$

Средняя квадратическая ошибка азимута связующей стороны треугольника с номером k определяется формулой

$$m_{\alpha_k}=\pm m\sqrt{\frac{1}{P_{\alpha_k}}}, \qquad (43)$$

где m — средняя квадратическая ошибка единицы веса.

С целью проверки полученных формул были решены числовые примеры по схеме Гаусса. При решении примеров было принято, что $n=9$, $k=5$, $\nu=1$ и цепь состоит из равносторонних треугольников.

Для цепи между исходными азимутами по схеме Гаусса

$$m_{\alpha_5}=\pm m,$$

а по формуле (42) и (43)

$$m_{\alpha_5}=\pm 0{,}99\, m.$$

Для цепи между твердыми пунктами по схеме Гаусса

$$m_{\alpha_5}=\pm 0{,}61\, m,$$

а по формуле (41) и (43)

$$m_{\alpha_5}=\pm 0{,}58\, m.$$

Результаты расчета показывают, что формулы (41) и (42) с погрешностью порядка 5% можно использовать для оценки точности ориентирования рассматриваемой цепи линейно-угловой триангуляции. По полученным формулам производится анализ характера распределения ошибок дирекционного угла связующих сторон цепи линейно-угловой триангуляции, состоящей из равносторонних треугольников. При расчете было принято, что $n=11$, $\nu=0{,}5$; $0{,}7$; $1{,}0$; $1{,}5$; $2{,}0$; $2{,}5$. Для сравнения одновременно производился расчет ошибки дирекционного угла аналогичного построения цепи, только расположенной между исходными азимутами. Результаты расчета приведены в таблице. На основании ее данных можно сделать следующие выводы:

1. Средняя квадратическая ошибка дирекционного угла связующих сторон в цепях уменьшается с увеличением величины ν. Если ν увеличивается от 0,5 до 2,5, то $m_{\alpha k}$ уменьшается почти в два раза.

Ошибки дирекционного угла связующих сторон

Стороны	Значения ν					
	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0	2,5
Цель линейно-угловой триангуляции между твердыми пунктами						
1—2	$\pm 0{,}65m$	$\pm 0{,}61m$	$\pm 0{,}56m$	$\pm 0{,}47m$	$\pm 0{,}39m$	$\pm 0{,}34m$
2—3	0,76	0,72	0,65	0,55	0,46	0,40
3—4	0,77	0,73	0,66	0,56	0,47	0,41
4—5	0,74	0,70	0,64	0,54	0,45	0,40
5—6	0,72	0,68	0,62	0,52	0,44	0,38
6—7	0,72	0,68	0,62	0,52	0,44	0,38
7—8	0,74	0,70	0,64	0,54	0,45	0,46
8—9	0,77	0,73	0,66	0,56	0,47	0,41
9—10	0,76	0,72	0,65	0,55	0,46	0,40
10—11	0,65	0,61	0,56	0,47	0,39	0,34
Цепь линейно-угловой триангуляции между исходными азимутами						
1—2	$\pm 0{,}74m$	$\pm 0{,}69m$	$\pm 0{,}63m$	$\pm 0{,}53m$	$\pm 0{,}45m$	$\pm 0{,}39m$
2—3	0,99	0,93	0,85	0,72	0,60	0,52
3—4	1,14	1,07	0,98	0,83	0,69	0,61
4—5	1,23	1,16	1,06	0,89	0,75	0,65
5—6	1,28	1,20	1,09	0,93	0,78	0,68
6—7	1,28	1,20	1,09	0,93	0,78	0,68
7—8	1,23	1,16	1,06	0,89	0,75	0,65
8—9	1,14	1,07	0,98	0,83	0,69	0,61
9—10	0,99	0,93	0,85	0,72	0,60	0,52
10—11	0,74	0,69	0,63	0,53	0,45	0,39

2. Средняя квадратическая ошибка дирекционного угла в цепи между твердыми пунктами в 1,7 раза меньше, чем в аналогичной цепи только между исходными азимутами.

3. Изменение средней квадратической ошибки дирекционного угла связующих сторон в рассматриваемой цепи находится в небольших пределах (порядка 15%). В то же время эта ошибка в аналогичной цепи между исходными азимутами изменяется в пределах порядка 55%.

4. Связующие стороны с наибольшей ошибкой находятся между серединой цепи и твердыми пунктами.

Выведенные формулы рекомендуется применять для оценки ошибки дирекционного угла рассматриваемой цепи линейно-угловой триангуляции при любом числе n и k.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лапинг К. А. Точность определения длин сторон в рядах с измеренными углами и сторонами. «Геодезия и картография», № 2, 1959.
2. Новосельская В. П. Точность цепи линейно-угловой триангуляции. В сб.: «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 1. Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1964.
3. Проворов К. Л. Точность цепи триангуляции с измеренными сторонами и углами. Изв. вузов, разд. «Геодезия и аэрофотосъемка», вып. 3, 1959.
4. Черкозьянов А. Т. Оценка точности цепи триангуляции с измеренными углами и связующими сторонами, проложенной между твердыми пунктами. Изв. вузов, разд. «Геодезия и аэрофотосъемка», вып. 1, 1968.

Работа поступила
6 мая 1970 года