РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 15

УДК 528.14

А. А. РЕМИНСКИЙ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЦЕНТРАЛЬНЫМИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯМИ

Рассматриваем квадратичную форму вида $A(x, x) = c$, где A — положительно определенная симметричная матрица порядка n; x — переменный вектор; c — действительное число. Обычно такой квадратичной форме ставится в соответствие центральная поверхность второго порядка [2] — гиперэллипсоид, являющийся геометрическим местом конца переменного вектора x. Запишем эту квадратичную форму в виде

$$(x, Ax) = c, \tag{1}$$

и наряду с гиперэллипсоидом переменного вектора x будем рассматривать также гиперэллипсоид переменного вектора Ax. Эти гиперэллипсоиды естественно ассоциируются соответственно с вектором неизвестных $\bar{x}$ и вектором свободных членов $\bar{f}$ системы нормальных уравнений

$$A\bar{x} = \bar{f}, \tag{2}$$

где матрица A тождественна матрице квадратичной формы.

Эта ассоциация позволяет применить свойства гиперэллипсоидов для анализа решения системы нормальных уравнений. Ниже наглядно представлено образование A-ортогональных (биортогональных) базисов, составляющих основу прямых численных методов решения систем нормальных уравнений.

Известно, что если вектор $x_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ совпадает по направлению с собственным вектором матрицы A, то

$$Ax_j = \lambda_j x_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

где λ_j — собственные числа матрицы A.

Собственные векторы матрицы A являются главными осями квадратичной формы. Длины главных полуосей гиперэллипсоидов, совпадающих с собственными векторами матрицы A, получим, если выражение (3) умножим на x_j, полагая, что x_j — частное значение переменного вектора x, удовлетворяющего форме (1).

$$(x_j, Ax_j) = \lambda_j (x_j, x_j) = c \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

откуда находим длины полуосей гиперэллипсоида переменного вектора

$$|x_j| = \sqrt{\frac{c}{\lambda_j}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

С учетом (3) длины полуосей гиперэллипсоида переменного вектора Ax получаем в виде

$$|Ax_j| = \sqrt{c\lambda_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

На рис. 1 представлено аксонометрическое изображение гиперэллипсоидов квадратичной формы $(x,\ Ax)=10$ трехмерного пространства, где

$$A=\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

На рис. 1, кроме контуров гиперэллипсоидов, показаны следы их сечения координатными плоскостями. В качестве системы координат взяты собственные векторы x_j $(j=1,\ 2,\ 3)$ матрицы, порядковые номера которых указаны на рис. 1. Одноименные собственные числа матрицы A такие: $\lambda_1=0{,}121$; $\lambda_2=2{,}35$; $\lambda_3=3{,}53$.

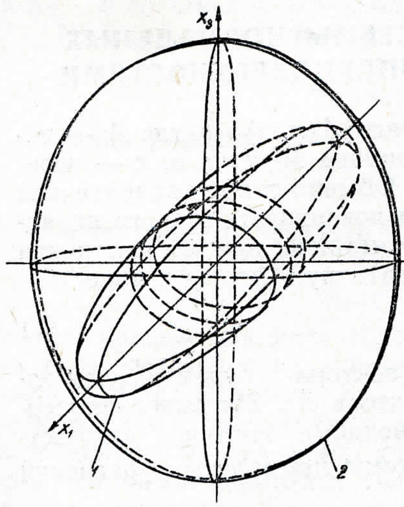

Рис. 1. Схема поверхностей, соответствующих переменным векторам x и Ax квадратичной формы $(x,\ Ax)=c$ с матрицей A вида (7).

1 — гиперэллипсоид вектора x; *2* — гиперэллипсоид вектора Ax.

Образование гиперэллипсоидов представим как результат растяжения гиперсферы радиуса $\sqrt{c}$ в направлении собственных векторов матрицы A. Для образования гиперэллипсоида переменного вектора x гиперсферу подвергнем растяжению в $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_j}}$ раз; для образования гиперэллипсоида переменного вектора Ax — в $\sqrt{\lambda_j}$ раз в направлении j-й оси. При этом произвольная ортогональная система радиусов-векторов гиперсферы переходит в две системы сопряженных векторов, между которыми выполняются отношения A-ортогональности (биортогональности, двойственности) вида

$$(x_i,\ Ax_k)=c\delta_{ik}\ \ (i,\ k=1,\ 2,\ldots,\ n), \tag{8}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера, $\delta_{ik}=\begin{cases}0 \text{ при } i\neq k,\\ 1 \text{ при } i=k.\end{cases}$

Доказательство. Любой из радиусов-векторов x_k^* гиперсферы радиуса $\sqrt{c}$ можно представить в виде разложения по системе собственных векторов матрицы A:

$$x_k^*=\sum_{j=1}^{n}\xi_{kj}^*\,e_j, \tag{9}$$

где e_j — орты собственных направлений матрицы A,

$$(e_i,\ e_j)=\delta_{ij}\ \ ((i,\ j=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

Возьмем систему из n ортогональных радиусов-векторов гиперсферы, то есть таких, что

$$(x_i^*,\ x_k^*)=\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}^*\,e_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_{kj}^*\,e_j\right)=c\delta_{ik}\quad (i,k=1,2,\ldots,n). \tag{10}$$

Тогда сопряженные радиусы-векторы гиперэллипсоидов, образованные из системы векторов x_k^* (10), будут иметь такой вид:

а) для гиперэллипсоида переменного вектора x

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \xi^*_{kj} e_j \quad (k = 1, 2, \ldots, n); \tag{11}$$

б) для гиперэллипсоида переменного вектора Ax

$$Ax_k = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j}\, \xi^*_{kj} e_j \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Можно легко убедиться, что векторы (11) и (12) удовлетворяют отношениям A-ортогональности (8). Учитывая условие (10), имеем

$$(x_i, Ax_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \xi^*_{ij} e_j \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j}\, \xi^*_{kj} e_j \right) = c\delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

что и требовалось доказать.

Проанализируем теперь следующее утверждение. Произвольный вектор Ax_k является нормалью к поверхности гиперэллипсоида переменного вектора x в точке x_k, и, наоборот, вектор x_k является нормалью к поверхности гиперэллипсоида переменного вектора Ax в точке Ax_k.

Действительно, дифференцируя форму (1) по x, получаем

$$d(x, Ax) = (dx, Ax) + (x, Adx) = 2(Ax, dx) = 0, \tag{13}$$

где $(dx, Ax) = (x, Adx)$ вследствие симметричности матрицы A.

Дифференциал dx выражает вектор смещения из некоторой точки x_k. Множество возможных его значений лежит в гиперплоскости, касательной к гиперэллипсоиду переменного вектора x в точке x_k. Равенство нулю скалярного произведения (13) означает ортогональность вектора Ax_k к этой гиперплоскости и, следовательно, справедливость прямого утверждения. Обратное утверждение верно вследствие симметричности матрицы A, позволяющей произвести такие преобразования:

$$(Ax, dx) = (x, Adx) = (x, d(Ax)) = 0,$$

то есть вектор x_k и плоскость, касательная к гиперэллипсоиду переменного вектора Ax, в которой лежит дифференциал $d(Ax)$, ортогональны между собой.

A-ортогональные векторы (8) составляют основу прямых численных методов решения систем нормальных уравнений [1]. Учитывая свойство одноименных векторов x_k и Ax_k гиперэллипсоидов, выраженное уравнением (13), систему A-ортогональных векторов представим следующим образом.

Любому вектору $x_k (k=1, 2, \ldots, n)$ из системы сопряженных векторов (11) гиперэллипсоида переменного вектора x ортогональны все векторы Ax_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ из системы сопряженных векторов (12) гиперэллипсоида переменного вектора Ax, кроме одноименного $(i \neq k)$. Векторы Ax_i $(i=1, 2, \ldots, n;\ i \neq k)$ лежат в гиперплоскости, ортогональной вектору x_k. Эта гиперплоскость является касательной к гиперэллипсоиду переменного вектора x в точке x_k. Правильно и обратное, то есть правильно, что любой вектор Ax_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ ортогонален гиперплоскости векторов x_k $(k=1, 2, \ldots, n;\ k \neq i)$, которая является касательной к гиперэллипсоиду переменного вектора Ax в точке Ax_i. Такова геометрическая сущность системы A-ортогональных векторов (8).

Теперь установим область решений системы нормальных уравнений с данной матрицей A и данным вектором свободных членов $\bar{f}$. Вектор свободных членов $\bar{f}$ может оказаться совершенно произвольно ориентированным относительно собственных векторов матрицы A, принятых в данном случае за систему координат. Множество его положений описывается радиусом-вектором $\bar{f}$ переменной точки, удовлетворяющей канонической форме

$$(\bar{f}, \bar{f}) = c. \qquad (14)$$

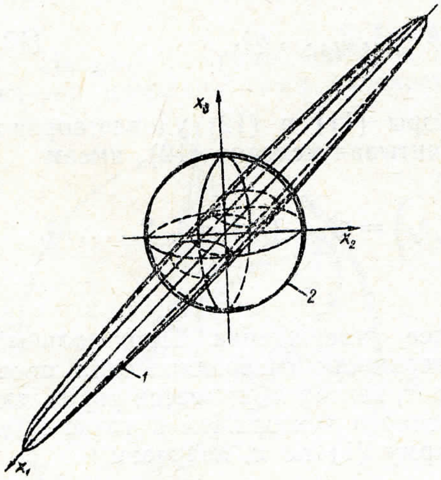

Рис. 2. Схема модели решения системы нормальных уравнений с матрицей A вида (7) и вектором свободных членов $\bar{f}$, представленным сферой радиуса

$$|\bar{f}| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2}.$$

1 — гиперэллипсоид $|\bar{x}_j| = \frac{1}{\lambda_j} |\bar{f}|$, $j = 1, 2, 3$;

2 — гиперсфера радиуса $|\bar{f}|$.

Канонической форме (14) соответствует гиперсфера радиуса $\sqrt{c} = |\bar{f}|$, где $|\bar{f}|$ — норма вектора свободных членов системы нормальных уравнений. Поскольку векторы $\bar{x}$ и $\bar{f}$ системы (2) связаны между собой матрицей A, то ориентация вектора неизвестных $\bar{x}$ и его длина (норма) определяются ориентацией вектора $\bar{f}$ относительно собственных векторов матрицы A.

Действительно, учитывая выражение (3), находим, что множество положений вектора неизвестных $\bar{x}$ вполне описывается гиперэллипсоидом с полуосями

$$|\bar{x}_j| = \frac{\sqrt{c}}{\lambda_j} = \frac{1}{\lambda_j} |\bar{f}| \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (15)$$

Выбрав среди собственных чисел матрицы A максимальное $\Lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ и минимальное $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, можно установить пределы, в которых заключено значение нормы вектора.

На рис. 2 показана гиперсфера и гиперэллипсоид, являющиеся моделью множества решений системы нормальных уравнений с матрицей A, представленной ранее (7).

Таким образом, длина вектора неизвестных $\bar{x}$ зависит не только от длины (нормы) вектора свободных членов и собственных чисел матрицы A, но и от ориентировки вектора $\bar{f}$ относительно собственных векторов матрицы системы нормальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ремински й А. А. Обобщение прямых численных методов решения систем нормальных уравнений. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 11. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1970, стр. 46—51.
2. Шилов Г. Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства). М., 1969, стр. 329.

Работа поступила
13 октября 1970 г.