

О. С. РАЗУМОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЗАИМНОГО ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧЕК ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ИЗ СИНХРОННЫХ ЛАЗЕРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

В 1961 г. в статье «Спутники Земли и геодезия» [1] И. Д. Жонголович указал на возможность определения взаимного положения точек земной поверхности по результатам синхронных наблюдений ИСЗ (искусственных спутников Земли). Одна из возможных схем наблюдений предполагала, что если со станций 1 и 2 земной поверхности (рис. 1) одновременно найти в некоторой координатной системе элементы топоцентрических векторов \vec{r}'_1 и \vec{r}'_2 спутника «С», то вектор $\vec{L}_{1,2}$, соединяющий наблюдательные станции, однозначно определится из векторного уравнения

$$\vec{L}_{1,2} = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2. \quad (1)$$

В 1962 г. Тавеннер [3] предложил для осуществления этой идеи применить синхронные лазерные наблюдения. ИСЗ, снабженный возвратно-отражательными призмами, должен одновременно освещаться лучами лазеров с пунктов 1 и 2 и фотографироваться на фоне звездного неба. При этом топоцентрическая дальность r' будет определяться импульсным методом, а топоцентрические угловые координаты α' и δ' спутника могут быть найдены из обработки снимков одним из методов фундаментальной астрометрии.

Если для определения взаимного положения наблюдательных станций использовать только линейные измерения, то схема наблюдений спутника будет представлена элементарной фигурой космической трилатерации [2].

К настоящему времени проведен ряд опытов по использованию такого рода измерительных систем и получены обнадеживающие результаты. Так, по сообщению [14], топоцентрическая дальность до спутника определяется с точностью 1—2 м, а синхронность наблюдений обеспечивается с ошибкой порядка 0,0001 с. Менее точно пока определяются угловые координаты.

В данной статье предложен анализ распределения погрешностей в методе наблюдений, представленном на рис. 1; действие ошибок в элементарной системе космической трилатерации было рассмотрено нами ранее [2]. Освещены также некоторые вопросы математической обработки результатов измерений.

Известно, что компоненты топоцентрического радиуса-вектора спутника определяются как элементы матрицы

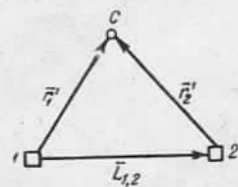


Рис. 1. Схема синхронных наблюдений.

$$\bar{r}' = \begin{pmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r' \cos \delta' \cos t' \\ r' \cos \delta' \sin t' \\ r' \sin \delta' \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $t' = \alpha' - S$; S — звездное гринвичское время момента наблюдений.
Дифференцируя (2), находим

$$dr' = \begin{pmatrix} \cos \delta' \cos t' & -r' \sin \delta' \cos t' & -r' \cos \delta' \sin t' \\ \cos \delta' \sin t' & -r' \sin \delta' \sin t' & r' \cos \delta' \cos t' \\ \sin \delta' & r' \cos \delta' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr' \\ d\delta' \\ dt' \end{pmatrix} = \Pi \begin{pmatrix} dr' \\ d\delta' \\ dt' \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Для решения задачи предположим вначале, что наблюдения строго синхронны. Тогда, следуя известным правилам теории ошибок, найдем выражение для среднего квадратического тензора ошибок положения конечной точки вектора \bar{r}' относительно его начала

$$M_{\bar{r}'}^2 = \Pi_0 M_r^2 \Pi_0^T, \quad (4)$$

где M_r^2 — средний квадратический тензор ошибок (корреляционная матрица) непосредственных измерений.

Если результаты измерений независимы друг от друга, то

$$M_{\bar{r}'}^2 = \begin{pmatrix} \left(\cos^2 \delta' \cos^2 t' m_r^2 + r'^2 \sin^2 \delta' \cos^2 t' \frac{m_{\delta'}^2}{\rho^2} + r'^2 \cos^2 \delta' \sin^2 t' \frac{m_{t'}^2}{\rho^2} \right); \\ \left(\begin{array}{c} \cos^2 \delta' \sin t' \cos t' m_r^2 + r'^2 \sin^2 \delta' \sin t' \cos t' \frac{m_{\delta'}^2}{\rho^2} - \\ - r'^2 \cos^2 \delta' \sin t' \cos t' \frac{m_{t'}^2}{\rho^2} \end{array} \right); \\ \left(\cos \delta' \sin \delta' \cos t' m_r^2 - r'^2 \cos \delta' \sin \delta' \cos t' \frac{m_{\delta'}^2}{\rho^2} \right); \\ \left(\cos \delta' \sin \delta' \sin t' m_r^2 - r'^2 \cos \delta' \sin \delta' \sin t' \frac{m_{\delta'}^2}{\rho^2} \right); \\ \left(\begin{array}{c} \cos^2 \delta' \sin t' \cos t' m_r^2 + r'^2 \sin^2 \delta' \sin t' \cos t' \frac{m_{\delta'}^2}{\rho^2} - \\ - r'^2 \cos^2 \delta' \sin t' \cos t' \frac{m_{t'}^2}{\rho^2} \end{array} \right); \\ \left(\cos^2 \delta' \sin^2 t' m_r^2 + r'^2 \sin^2 \delta' \sin^2 t' \frac{m_{\delta'}^2}{\rho^2} + r'^2 \cos^2 \delta' \cos^2 t' \frac{m_{t'}^2}{\rho^2} \right); \\ \left(\begin{array}{c} \cos \delta' \sin \delta' \sin t' m_r^2 - r'^2 \cos \delta' \sin \delta' \cos t' \frac{m_{\delta'}^2}{\rho^2} \\ \cos \delta' \sin \delta' \sin t' m_r^2 - r'^2 \cos \delta' \sin \delta' \sin t' \frac{m_{\delta'}^2}{\rho^2} \\ \sin^2 \delta' m_r^2 + r'^2 \cos^2 \delta' \frac{m_{\delta'}^2}{\rho^2} \end{array} \right) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Вектор \bar{L} определяется суммой (разностью) векторов \bar{r}' , отсюда его средний квадратический тензор ошибок будет равен сумме тензоров (4)

$$M_L^2 = M_{r'_1}^2 + M_{r'_2}^2. \quad (6)$$

При этом средняя квадратическая ошибка конечной точки вектора \bar{L} окажется равной

$$m_L^2 = m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = [m_{r'}^2]_1^2 + \left[r'^2 \frac{m_{\delta'}^2}{\rho^2} \right]_1^2 + \left[r'^2 \cos^2 \delta' \frac{m_{r'_i}^2}{\rho^2} \right]_1^2, \quad (6a)$$

а при условии, что

$$m_{\delta'} = m_{\alpha'} \cos \delta' = \mu,$$

$$m_L^2 = [m_{r'}^2]_1^2 + 2 \left[r'^2 \frac{\mu^2}{\rho^2} \right]_1^2. \quad (6b)$$

Для нахождения ошибок длины вектора \bar{L} и направляющих углов ψ и λ , которые определяют его положение относительно экватора и гринвичского меридиана, тензор (6) необходимо преобразовать. Возьмем для этого систему прямоугольных координат $0, a, b, c$, где ось a совпадает с линией, соединяющей точки земной поверхности, ось b параллельна плоскости экватора и перпендикулярна оси a , а ось c дополняет указанную систему до правой. Тогда матрица направляющих косинусов этой системы в системе координат $Oxyz$ будет равна

$$C = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \lambda & -\sin \psi \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \cos \psi \sin \lambda & -\sin \psi \sin \lambda & \cos \lambda \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где ψ и λ — направляющие углы хорды \bar{L} .

Имея данную матрицу, можно найти тензор ошибок взаимного положения наблюдательных станций по известному правилу преобразования тензоров ошибок при повороте осей координат, а именно

$$(M_L^2)' = C M_L^2 C^T. \quad (8)$$

Используя диагональные элементы $B_{11}^2, B_{22}^2, B_{33}^2$ этого тензора, определим средние квадратические ошибки составляющих элементов вектора \bar{L} , как

$$m_L^2 = B_{11}^2; \quad m_\psi^2 = \frac{B_{22}^2}{L^2} \rho^2; \quad m_\lambda^2 = \frac{B_{33}^2}{L^2 \cos^2 \psi} \rho^2. \quad (9)$$

Задача оценки точности существенно упростится, если предположить, что результаты непосредственных измерений отвечают условию

$$m_{r'} = r' \frac{m_{\delta'}}{\rho} = r' \cos \delta' \frac{m_{\alpha'}}{\rho} = \mu_{r'} \quad \text{и} \quad \frac{r' m_s}{\rho} \ll \mu_{r'}. \quad (10)$$

Тогда

$$M_L^2 = (\mu_{r'_1}^2 + \mu_{r'_2}^2) E_{33} \quad (11)$$

$$m_L^2 = L^2 \frac{m_\psi^2}{\rho^2} = L^2 \cos^2 \psi \frac{m_\lambda^2}{\rho^2} = (\mu_{r'_1}^2 + \mu_{r'_2}^2). \quad (12)$$

Чтобы учесть влияние несинхронности наблюдений ΔS на общую погрешность вектора \bar{L} , необходимо знать возможный сдвиг спутника по орбите за время ΔS . Для этого предположим, что к моменту наблюдений S нам известны элементы оскулирующей орбиты спутника и его геоцентрическое положение $\bar{r}_c(a, \delta, r)$, (X_c, Y_c, Z_c) . При организации лазерных наблюдений указанные величины должны быть известны, чтобы обеспечить попадание луча лазера в спутник.

Тогда, зная дифференциальные изменения геоцентрических координат спутника по времени

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_c}{ds} &= Y_c + \frac{an}{\cos \delta} \left(\frac{e \sin E \cos^2 \delta \cos t}{1 - e \cos E} - \frac{\cos(\nu + \omega) \sin \nu \sin i \sin \delta \cos t}{\sin E} - \frac{\sin \nu \cos i \sin t}{\sin E} \right), \\ \frac{dY_c}{ds} &= -X_c + \frac{an}{\cos \delta} \left(\frac{e \sin E \cos^2 \delta \sin t}{1 - e \cos E} - \frac{\cos(\nu + \omega) \sin \nu \sin i \sin \delta \sin t}{\sin E} - \frac{\sin \nu \cos i \cos t}{\sin E} \right), \\ \frac{dZ_c}{ds} &= an \left(\frac{e \sin E \sin \delta}{1 - e \cos E} + \frac{\cos(\nu + \omega) \sin \nu \sin i}{\sin E} \right) \end{aligned} \right\} (13)$$

или

$$d\bar{r}_c = \begin{pmatrix} Y_c + S_x \\ -X_c + S_y \\ S_z \end{pmatrix} dS = \Gamma dS, \quad (13a)$$

(где ω — угловое расстояние линии апсид от линии узлов, a — большая полуось орбиты, e — ее эксцентриситет, i — наклонение орбиты к экватору, n — средняя угловая скорость движения спутника, ν — истинная аномалия движения, E — эксцентрическая аномалия), найдем совокупное влияние несинхронности наблюдений как

$$M_{r_s}^- = \Gamma_0 (\Delta S)^2 \Gamma_0^T. \quad (14)$$

В результате итоговый тензор ошибок вектора $\bar{L}_{1,2}$ получим из выражения

$$M_{L_{1,2}}^2 = M_{r_1}^2 + M_{r_2}^2 + M_{r_s}^2. \quad (15)$$

(При приближенном расчете точности величину ΔS можно оценить, сообразуясь с предельной точностью регистрации моментов наблюдений на станциях, а сдвиг спутника за время ΔS — по скорости его движения).

Для уменьшения систематической ошибки вектора \bar{L} , возникающей из-за нарушения синхронности измерений, спутник целесообразно наблюдать при двух различных его прохождениях через хорду. Из геометрической сущности данного метода следует, что если траектория спутника будет пересекать хорду примерно посередине и под прямым углом к ней, то более надежно будет определяться расстояние L , а при пересечении под острым углом — направление хорды.

Рассмотрим теперь один из возможных способов математической обработки результатов измерений, а именно: метод условных наблюдений с дополнительными неизвестными. В качестве таких неизвестных

будем отыскивать систематические ошибки σ_{s_1} и σ_{s_2} регистраций моментов наблюдений на станциях, которые оказывают заметное влияние на синхронность измерений.

Имея две пары наблюдений ИСЗ в моменты $S^{(j)}$ (рис. 2), получаем векторное уравнение

$$\bar{r}_1^{(1)} + \bar{r}_2^{(2)} - \bar{r}_2^{(1)} - \bar{r}_1^{(2)} = 0. \quad (16)$$

Такие уравнения можно составить для каждой очередной пары синхронных наблюдений. Условные уравнения поправок, найденные на основе (16), приводим к виду

$$\left. \begin{aligned} a_{r_{11}} v_{r_1}^{(1)} - a_{r_{21}} v_{r_2}^{(1)} - a_{r_{12}} v_{r_1}^{(2)} + a_{r_{22}} v_{r_2}^{(2)} - a_{\delta_{11}} v_{\delta_1}^{(1)} + a_{\delta_{21}} v_{\delta_2}^{(1)} + a_{\delta_{12}} v_{\delta_1}^{(2)} - \\ - a_{\delta_{22}} v_{\delta_2}^{(2)} - a_{t_{11}} v_{t_1}^{(1)} + a_{t_{12}} v_{t_2}^{(1)} + a_{t_{21}} v_{t_1}^{(2)} - a_{t_{22}} v_{t_2}^{(2)} + f_{1x} = 0, \\ b_{r_{11}} v_{r_1}^{(1)} - b_{r_{21}} v_{r_2}^{(1)} - b_{r_{12}} v_{r_1}^{(2)} + b_{r_{22}} v_{r_2}^{(2)} - b_{\delta_{11}} v_{\delta_1}^{(1)} + b_{\delta_{21}} v_{\delta_2}^{(1)} + b_{\delta_{12}} v_{\delta_1}^{(2)} - \\ - b_{\delta_{22}} v_{\delta_2}^{(2)} + b_{t_{11}} v_{t_1}^{(1)} - b_{t_{12}} v_{t_2}^{(1)} - b_{t_{21}} v_{t_1}^{(2)} + b_{t_{22}} v_{t_2}^{(2)} + f_{1y} = 0, \\ c_{r_{11}} v_{r_1}^{(1)} - c_{r_{21}} v_{r_2}^{(1)} - c_{r_{12}} v_{r_1}^{(2)} + c_{r_{22}} v_{r_2}^{(2)} + c_{\delta_{11}} v_{\delta_1}^{(1)} - c_{\delta_{21}} v_{\delta_2}^{(1)} - c_{\delta_{12}} v_{\delta_1}^{(2)} + \\ + c_{\delta_{22}} v_{\delta_2}^{(2)} + f_{1z} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где f_x, f_y, f_z — невязки, определяемые суммой векторов (16), и

$$\begin{aligned} a_{r_{ij}} &= (\cos \delta'_i \cos t'_i)_j, & a_{\delta_{ij}} &= (r'_i \sin \delta'_i \cos t'_i)_j, & a_{t_{ij}} &= (r'_i \cos \delta'_i \sin t'_i)_j, \\ b_{r_{ij}} &= (\cos \delta'_i \sin t'_i)_j, & b_{\delta_{ij}} &= (r'_i \sin \delta'_i \sin t'_i)_j, & b_{t_{ij}} &= (r'_i \cos \delta'_i \cos t'_i)_j, \end{aligned}$$

$c_{r_{ij}} = (\sin \delta'_i)_j, c_{\delta_{ij}} = (r'_i \cos \delta'_i)_j$. (i — номер пункта наблюдений, j — номер момента наблюдений).

Если в процессе наблюдений спутник отслеживается лазером на некоторой дуге орбиты, то изменения топоцентрических координат ИСЗ в зависимости от времени наблюдений можно получить эмпирически, путем соотнесения наблюдаемых изменений координат к соответствующим отрезкам времени. Более точно эти изменения можно найти с помощью полученных нами дифференциальных формул

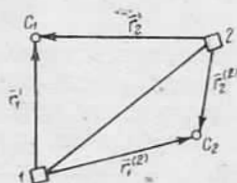


Рис. 2. Схема многократных синхронных наблюдений.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr'}{dS} &= [(Y_c \cos t' - X_c \sin t') \cos \delta' + (\cos \delta' \cos t' S_x + \cos \delta' \sin t' S_y + \\ &+ \sin \delta' S_z)] = h, \\ \frac{d\delta'}{dS} &= \left[-\frac{(Y_c \cos t' - X_c \sin t') \sin \delta'}{r'} + \frac{1}{r'} (-S_x \sin \delta' \cos t' - \right. \\ &\left. - S_y \sin \delta' \sin t' + S_z \cos \delta') \right] = f, \\ \frac{d\alpha'}{dS} &= \left[\left(1 - \frac{X_c \cos t' + Y_c \sin t'}{r' \cos \delta'} \right) + \frac{1}{r' \cos \delta'} (-S_x \sin t' + S_y \cos t') \right] = g. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Учитывая соотношения (18), определим влияние погрешностей регистрации моментов наблюдений на невязки условных уравнений (17) и коэффициенты при дополнительных неизвестных σ_{s_1} и σ_{s_2} . Для первого уравнения

$$A_{1x} \sigma_{s_1} = (a_{r_{11}} h_1^{(1)} - a_{r_{12}} h_1^{(2)} - a_{\delta_{11}} f_1^{(1)} + a_{\delta_{12}} f_1^{(2)} - a_{t_{11}} g_1^{(1)} + a_{t_{12}} g_1^{(2)}) \sigma_{s_1}, \quad (19)$$

$$B_{1x} \sigma_{s_2} = (-a_{r_{21}} h_2^{(1)} + a_{r_{22}} h_2^{(2)} + a_{\delta_{21}} f_2^{(1)} - a_{\delta_{22}} f_2^{(2)} + a_{t_{21}} g_2^{(1)} - a_{t_{22}} g_2^{(2)}) \sigma_{s_2}. \quad (20)$$

Для второго и третьего уравнений

$$A_{2y}\sigma_{S_1} = (b_{r_{11}} h_1^{(1)} - b_{r_{12}} h_1^{(2)} - b_{\delta_{11}} f_1^{(1)} + b_{\delta_{12}} f_1^{(2)} + b_{t_{11}} g_1^{(1)} - b_{t_{12}} g_1^{(2)}) \sigma_{S_1}, \quad (21)$$

$$B_{2y}\sigma_{S_2} = (-b_{r_{21}} h_2^{(1)} + b_{r_{22}} h_2^{(2)} + b_{\delta_{21}} f_2^{(1)} - b_{\delta_{22}} f_2^{(2)} - b_{t_{21}} g_2^{(1)} + b_{t_{22}} g_2^{(2)}) \sigma_{S_2}, \quad (22)$$

$$A_{3z}\sigma_{S_1} = (c_{r_{11}} h_1^{(1)} - c_{r_{12}} h_1^{(2)} + c_{\delta_{11}} f_1^{(1)} - c_{\delta_{12}} f_1^{(2)}) \sigma_{S_1}, \quad (23)$$

$$B_{3z}\sigma_{S_2} = (-c_{r_{21}} h_2^{(1)} + c_{r_{22}} h_2^{(2)} - c_{\delta_{21}} f_2^{(1)} + c_{\delta_{22}} f_2^{(2)}) \sigma_{S_2}. \quad (24)$$

Введя дополнительные неизвестные σ_{S_1} и σ_{S_2} с соответствующими коэффициентами A и B в условные уравнения (17) и решая их при многократных измерениях по известной методике способа наименьших квадратов, получаем систему нормальных уравнений коррелат

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{aa}{p} \right] k_1 + \left[\frac{ab}{p} \right] k_2 + \left[\frac{ac}{p} \right] k_3 + \dots + A_{1x}\sigma_{S_1} + B_{1x}\sigma_{S_2} + f_{1x} &= 0, \\ \left[\frac{ab}{p} \right] k_1 + \left[\frac{bb}{p} \right] k_2 + \left[\frac{bc}{p} \right] k_3 + \dots + A_{2y}\sigma_{S_1} + B_{2y}\sigma_{S_2} + f_{1y} &= 0, \\ \left[\frac{ac}{p} \right] k_1 + \left[\frac{bc}{p} \right] k_2 + \left[\frac{cc}{p} \right] k_3 + \dots + A_{3z}\sigma_{S_1} + B_{3z}\sigma_{S_2} + f_{1z} &= 0, \\ \dots & \\ A_{1x}k_1 + A_{2y}k_2 + A_{3z}k_3 + A_{4x}k_4 + \dots + A_{nz}k_n &= 0, \\ B_{1x}k_1 + B_{2y}k_2 + B_{3z}k_3 + B_{4x}k_4 + \dots + B_{nz}k_n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

из решения которой определяем значения неопределенных множителей k , искомые дополнительные неизвестные σ_S и, наконец, вероятнейшие поправки к наблюдаемым величинам.

Для оценки точности окончательных результатов искомых величин L , ψ , λ необходимо на основе соотношений

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{L_y}{L_x}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{L_z}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}}, \quad L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} \quad (26)$$

составить весовые функции и, включив их в решение нормальных уравнений коррелат, получить значения так называемых обратных весов искомых величин, то есть значения

$$\frac{1}{P_k} = \left[\frac{FF}{p} n \right]^*, \quad (27)$$

* Для априорной оценки точности окончательного результата достаточно сложить величины, обратные тензорам ошибок (15) (так называемые весовые тензоры)

$$P_{L_0} = [P_{L_i}] = [(M_{L_i}^2)^{-1}], \quad (29)$$

а затем, сделав обратный переход

$$M_{L_0}^2 = P_{L_0}^{-1}, \quad (30)$$

определить точность составляющих элементов вектора \bar{L} , используя соотношения (8) и (9). Итоговую погрешность вектора \bar{L} можно также найти как среднюю квадратическую ошибку общей арифметической середины.

или

$$\frac{1}{P_k} = \left[\frac{FF}{p} \right] - \left(\frac{aF}{p} \right) \left[\frac{bF}{p} \right] \dots \left(\frac{gF}{p} \right) Q \left(\left[\frac{aF}{p} \right] \left[\frac{bF}{p} \right] \dots \left[\frac{gF}{p} \right] \right)^T, \quad (28)$$

где Q — обратная матрица нормальных уравнений коррелат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жонголович И. Д. Спутники Земли и геодезия. «Астрономический журнал», т. XXXVIII, 1961, № 1.
2. Разумов О. С. Распределение ошибок в элементарной системе космической трилатерации. Изв. вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», 1967, № 6.
3. Tavenner M. Largos: a suggested method for stereotriangulation, «I. Geophys. Res.», 1962, № 9.
4. Wetmore Warren C. French space program begins new phase, «Aviat Week and Space Technol.», 1967, № 13.

Работа поступила
10 ноября 1969 года