

Р. М. ТАРТАЧИНСКИЙ

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОПРАВОК В ИЗМЕРЕННЫЕ УГЛЫ ЗА БОКОВУЮ РЕФРАКЦИЮ

Как показали многочисленные исследования, дальнейшее повышение точности угловых измерений в сетях триангуляции и полигонометрии лимитируется не столько применяемыми инструментами, сколько влиянием внешней среды и главным образом боковой рефракцией.

На современном этапе наметились следующие три основных метода борьбы с действием боковой рефракции:

- 1) Метод, заключающийся во введении поправок в измеренные направления по метеорологическим данным;
- 2) Инструментальный метод, предполагающий применение рефрактометров;
- 3) Геодезический метод, основанный на особой методике измерений углов.

Первый метод известен давно, но он не нашел широкого применения в геодезической практике из-за трудности получения надежных метеорологических данных на пути светового луча в момент наблюдений.

Развитие второго метода более перспективно, однако имеющиеся опытные образцы рефрактометров позволяют определять рефракцию пока с точностью $\pm 2''$. Для боковой рефракции такая точность не может быть признана удовлетворительной, поскольку ошибка определения поправок соизмерима с величиной самой рефракции.

Третий метод во многих отношениях более простой и позволяет в значительной мере ослабить вредные воздействия боковой рефракции. Мы производили опыт применения программы угловых измерений, предложенный в работах [1, 2] в триангуляции. Это, однако, не преуменьшает актуальности вопроса об использовании аналитических выражений для исправления результатов угловых измерений поправками за боковую рефракцию.

От всех имеющихся аналитических выражений для определения поправок за боковую рефракцию несколько отличается формула Т. И. Куккамьяки [4], в которой боковая рефракция выражается только через один метеорологический элемент — вертикальный градиент температуры. Остальные входящие в нее метеорологические данные представляют собой некоторые осредненные величины.

Предполагая, что изотермические поверхности параллельны рельефу местности, Т. И. Куккамьяки получил следующую формулу для определения полной рефракции σ на участке световой кривой ΔS :

$$\sigma = 0,20 \cdot \frac{dT}{dh} \cdot \Delta S \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \cos \nu. \quad (1)$$

Суммарная частная рефракция δ в направлении длиной S определяется выражением

$$\delta = \sum \frac{S_i}{S} \cdot \sigma. \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) приняты такие обозначения: γ — угол между горизонтальной и изотермической плоскостями; $\frac{dT}{dh}$ — вертикальные градиенты температуры; ν — угол между линией пересечения названных плоскостей и визирным лучом; S_i — расстояния от визирной цели до точек преломления луча.

Проверяя свой метод на финской триангуляции, Т. И. Куккамьяки пользовался осредненными величинами $\frac{dT}{dh}$, определенными в Англии.

В этом один из недостатков данного метода. Для устранения этого недостатка, мы, выполняя проверку метода, пользовались градиентными измерениями температуры на одной вертикали у инструмента, проводившимися во время угловых измерений.

Ниже описываем процесс вычисления поправок в результаты угловых измерений, выполненных нами летом 1964 г. в южном степном районе.

Углы на пунктах четырехугольника измерялись теодолитом ТТ-2/6 со штатива, устанавливаемого на вкопанные в землю кольца, способом во всех комбинациях. Одновременно с угловыми измерениями в точке стояния инструмента на высотах 1; 1,5 и 3 м психрометрами Асмана измерялась температура. Так как в процессе выполнения работ измерялись углы, то

$$\delta_{k-l} = \delta_i - \delta_k. \quad (3)$$

Вводя обозначения

$$0,20 \cdot \Delta S_i \cdot \operatorname{tg} \gamma_i \cdot \cos \nu_i = K_i, \quad (4)$$

$$\Sigma K_i \cdot \frac{S_i}{S} = \delta', \quad (5)$$

получаем

$$\delta_k = \Sigma \left(\frac{dT}{dh} \right)_k \cdot \delta'_k. \quad (6)$$

По аналогии для направления l имеем

$$\delta_i = \Sigma \left(\frac{dT}{dh} \right)_i \cdot \delta'_i. \quad (7)$$

С учетом этих обозначений формула (3) принимает вид

$$\delta_{k-l} = \Sigma \left[\left(\frac{dT}{dh} \right)_l \cdot \delta'_l - \left(\frac{dT}{dh} \right)_k \cdot \delta'_k \right]. \quad (8)$$

Для получения поправок δ_{k-l} в измеренные углы по формуле (8) мы приняли

$$\left(\frac{dT}{dh} \right)_l = \left(\frac{dT}{dh} \right)_k = \left(\frac{dT}{dh} \right)_{\text{измерен}} \quad (9)$$

в точке стояния инструмента на всем протяжении визирного луча в данный момент времени.

Делая такое допущение, мы исходили из того, что: а) поправки вычислялись не по средним статистическим данным, как это делал Т. И. Куккамьяки, а по фактическим градиентам, полученным одновременно с угловыми измерениями; б) величины γ_i , ν_i и ΔS_i определялись по топографической карте масштаба 1 : 100 000 с сечением рельефа

через 20 м; в) угловые измерения выполнялись на слегка всхолмленной местности; г) высоты визирных лучей над подстилающими поверхностями колебались незначительно; д) ближние зоны оказывают влияние на величину поправки δ значительно сильнее дальних зон, что и подтверждается формулой (2). При этом мы будем все же вносить некоторые ошибки в величины δ_i для тех участков световой кривой, которые расположены над долинами.

Из рисунка видно, что если на участке ΔS_3 при нормальном распределении температуры значение δ_3 будет увеличено из-за завышенного значения

$\frac{dT}{dh}$, то на смежном участке ΔS_4

оно также будет увеличено. Поскольку δ направления равна сумме поправок δ участков, то, слагая δ_3 и δ_4 и учитывая, что они с противоположными знаками, мы тем самым компенсируем допущенную погрешность.

С учетом (9) формула (8) запишется в виде

$$\delta_{k-l} = \frac{dT}{dh} (\delta'_l - \delta'_k). \quad (10)$$

По формуле (10) вычислены поправки для всех исполненных приемов, что составляет 192 поправки. В табл. 1 приведены значения γ_i , ν_i , ΔS_i , S_i по направлению III—IV, снятые с топографической карты масштаба 1 : 100000, и вычисленные по ним величины K_i и δ'_i .

Таблица 1
Вычисленные величины K_i и δ'_i по направлению III—IV

γ_i°	ν_i°	$\Delta S_i, \text{ м}$	$S_i, \text{ м}$	K_i	δ'_i
+0,3	100	1 000	1 000	-0,14	-0,02
-0,2	60	1 000	2 000	-0,36	-0,12
+1,0	95	1 000	3 000	-0,30	-0,22
-0,8	80	1 700	4 700	-1,12	-1,12

$\delta' = -1,48$

В табл. 2 даны величины вычисленных поправок δ , измеренные и исправленные значения для всех исполненных приемов одного угла, образованного направлениями III—IV и III—I.

В табл. 3 приведены средние значения измеренных углов (6 приемов) при инверсии, нормальном распределении температуры воздуха с высотой, средние значения углов из полной программы (12 приемов), их исправленные значения поправками β' и средние квадратические ошибки μ .

Средние квадратические ошибки μ вычислены по формуле

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{2[\nu\nu]}{n(n-1)(m-1)}} \quad (11)$$

где ν — отклонения результатов измерения углов в отдельных приемах от среднего значения; n — число направлений; m — число приемов.

Анализ результатов, приведенных в табл. 2 и 3, показывает, что углы, измеренные как при инверсии, так и при нормальном распреде-



лении температуры после введения поправок, приближаются по величине к результатам, полученным при нулевых значениях $\frac{dT}{dh}$, и к результатам, полученным из полной программы. Средние значения углов при инверсии и нормальном распределении температуры получили поправки с разными знаками, а величины этих поправок колеблются от $-0,06''$ до $+1,16''$. Среднее абсолютное значение поправок для полной программы равно $0,09''$, то есть при симметричном наблюдении углов на пунктах относительно моментов изотермии происходит компенсация рефракционных ошибок. При этом видим, что имевшие место различия в величинах средних квадратических ошибок для групп приемов и полной программы (симметричная программа) практически исчезли.

Таблица 2

Вычисленные поправки δ в измеренные значения угла
(пункт III, угол 1,2 ($28^{\circ}08$), $\delta'_{1,2} = +6,36 + 1,48 = +7,84$)

Дата, 1964 г.	Время наблюдения	Изображение	Измеренные углы	$\left(\frac{dT}{dh}\right)^{\circ}C/m$	δ	Исправленные углы
23 июня	6 ^h 56 ^m	ск	56,5"	-0,10	-0,8"	55,7"
	7 09	сск	55,4	-0,10	-0,8	54,6"
	18 22	ск	52,8	+0,05	+0,4	53,2
24 июня	6 28	ск	55,2	-0,08	-0,6	54,6
	18 01	сск	55,4	-0,10	-0,8	54,6
	11	с	51,8	+0,05	+0,4	52,2
	43	ск	52,3	+0,10	+0,8	53,1
	19 35	сск	52,0	+0,15	+1,2	53,2
	55	сск	53,0	+0,20	+1,6	54,6
25 июня	7 04	ск	53,7	-0,05	-0,4	53,3
	35	сск	54,4	-0,15	-1,2	53,2
26 июня	6 15	сск	51,8	+0,05	+0,4	52,2
			Среднее значение			
			53,69	+0,002	+0,02	53,71

Из данных табл. 2 следует, что для практических целей нет необходимости вычислять поправки δ в каждый прием, а достаточно определить $\Sigma \left(\frac{dT}{dh}\right)_{\text{норм}} - \Sigma \left(\frac{dT}{dh}\right)_{\text{инв}} = \Delta \left(\frac{dT}{dh}\right)$ и по этой величине найти поправку δ в среднее значение измеренного угла. По исправленным средним значениям выполнено уравнивание углов на станции, а затем вычислены невязки всех треугольников (табл. 4). Для сравнения в табл. 4 приведены и невязки треугольников, полученные при обработке результатов по программе симметричных наблюдений [3].

Величины невязок, вычисленные по исправленным углам как при нормальном распределении температуры с высотой, так и при инверсии, небольшие по величине и близкие между собой, причем почти во всех случаях они изменились в сторону уменьшения. Невязки треугольников из полной программы не получили существенных изменений.

Для оценки точности угловых измерений по невязкам треугольников воспользуемся формулой Ферреро

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[ww]}{3n}}, \quad (12)$$

где ω — невязка треугольников; n — число треугольников. В табл. 4 приведены величины средних квадратических ошибок μ_1 и μ_2 , полученные по формулам (11) и (12) соответственно. Данные табл. 4 показывают, что после введения поправок за рефракцию в значения измеренных углов средние квадратические ошибки, вычисленные по разным формулам, находятся в достаточном соответствии между собой.

Таблица 3
Значения средних измеренных и исправленных углов

№ пунктов	Название углов	Нормальное распределение температуры			Инверсия			Полная программа			(c+r)
		β	δ	β'	β	δ	β'	β	δ	β'	
I	1.2	28°56	+0°54	29°10	30°13	-0°46	29°67	29°34	+0°04	29°38	+3°70
	2.3	28,48	-0,06	28,42	28,57	+0,15	28,72	28,52	+0,05	28,57	+4,73
	1.3	57,58	+0,37	67,95	58,62	-0,19	58,43	58,10	+0,10	58,20	+8,43
	μ	$\pm 0,79$		$\pm 0,66$	$\pm 0,71$		$\pm 0,73$	$\pm 0,95$		$\pm 0,71$	
II	1.2	9,12	+0,10	9,22	9,42	-0,44	8,98	9,27	-0,17	9,10	-21,68
	2.3	28,98	+0,15	29,13	30,78	-0,56	30,22	29,88	-0,20	29,68	+ 2,05
	1.3	38,26	+0,26	38,52	39,74	-0,34	39,40	39,00	-0,04	38,96	-19,63
	μ	$\pm 1,01$		$\pm 0,76$	$\pm 0,95$		$\pm 0,78$	$\pm 1,21$		$\pm 0,85$	
III	1.2	55,10	-0,77	54,33	52,28	+0,80	53,08	53,69	+0,02	53,71	+ 7,39
	2.3	1,98	+0,20	2,18	2,28	-0,13	2,15	2,13	+0,04	2,17	+ 3,58
	1.3	57,28	-0,85	54,43	54,97	+0,75	55,72	56,12	-0,04	56,08	+10,97
	μ	$\pm 0,73$		$\pm 0,68$	$\pm 0,61$		$\pm 0,74$	$\pm 1,21$		$\pm 0,82$	
IV	1.2	21,77	+1,16	22,93	23,32	-0,64	22,68	22,54	+0,27	22,81	-0,48
	2.3	9,44	-0,67	8,77	8,20	+0,65	8,85	8,82	-0,01	8,81	-4,09
	1.3	31,07	+0,48	31,55	31,32	-0,32	31,00	31,20	+0,08	31,28	-4,57
	μ	$\pm 0,80$		$\pm 0,75$	$\pm 0,76$		$\pm 0,78$	$\pm 1,00$		$\pm 0,75$	

Это свидетельствует об исключении ошибок боковой рефракции из результатов измерений. На основании данных табл. 4 подсчитаем остаточное влияние рефракции

$$m_{r,1} = \pm \sqrt{\mu_1^2 \text{прогр} - \frac{\mu_1^2 \text{норм. инв}}{2}} = \pm 0,30'',$$

$$m_{r,2} = \pm \sqrt{\frac{\mu_2^2 \text{норм. инв}}{2} - \mu_2^2 \text{прогр}} = \pm 0,26''. \quad (13)$$

Таблица 4
Невязки треугольников и оценка точности угловых измерений

Пункты	Нормальное распределение температуры		Инверсия		Полная программа	
	β	β'	β	β'	β	β'
II—III—IV	+0,90"	-0,47"	-2,64"	-1,69"	-0,86"	-1,00"
IV—I—II	-1,94	-0,21	+2,44	+1,12	+0,25	+0,47
III—IV—I	+2,43	+1,94	-0,17	+0,68	+1,12	+1,31
I—II—III	-3,42	-2,57	-0,01	-1,10	-1,72	-1,82
Средние квадратические ошибки						
μ_1	$\pm 0,83''$	$\pm 0,71$	$\pm 0,76''$	$\pm 0,76$	$\pm 1,09$	$\pm 0,78''$
μ_2	$\pm 1,36$	$\pm 0,96$	$\pm 1,04$	$\pm 0,69$	$\pm 0,65$	$\pm 0,72$

Для сравнения покажем результаты вычислений $m_{r,1}$ и $m_{r,2}$ без введения поправок [4]

$$m_{r,1} = \pm 0,74'', \quad m_{r,2} = \pm 0,64''. \quad (14)$$

Сопоставляя (13) и (14), видим, что при введении поправок систематические погрешности боковой рефракции уменьшились более чем в два раза.

Таким образом, исправление углов поправками за боковую рефракцию описанным выше методом позволяет улучшить результаты угловых измерений в равнинно-всхолмленной местности.

Следует отметить, что в связи с трудоемкостью применения этого метода к нему следует прибегать только в случае небольшого числа направлений (полигонометрия, азимутальные определения и т. п.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Островский А. Л. О суточном ходе угловых невязок треугольников, вызванном боковой рефракцией. Научные записки Львовского политехнического ин-та, вып. 82, серия геодезическая, № 7, 1962.

2. Островский А. Л. К вопросу программы угловых измерений при свето- и радиодальномерной полигонометрии. В сб. «Инженерная геодезия», вып. 1. «Будівельник», Киев, 1965.

3. Островский А. Л., Тартачинский Р. М. Опыт применения программы угловых измерений, симметричный относительно моментов изотермии воздушных масс, в южном степном районе. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 3. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1965.

4. Kukkamäki T. J. Verbesserung der horizontalen Winkelmessungen wegen der Seitenrefraktion. Des Finnischen Geodätischen Institutes, Helsinki, 1939.

Работа поступила
29 октября 1970 г.