УДК 528.41

И. С. ТРЕВОГО

К ВОПРОСУ О ПРЕДРАСЧЕТЕ И ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ХОДОВ И СЕТЕЙ ГОРОДСКОЙ И ИНЖЕНЕРНОЙ ПОЛИГОНОМЕТРИИ

Основными показателями точности полевых работ в полигонометрии являются коэффициенты случайного μ и систематического λ влияний и средняя квадратическая ошибка измерения угла поворота m_β. Получение надежных значений этих величин важно для правильного установления весов углов и линий при строгом уравновешивании полигонометрии, для установления весов отдельных ходов при распределении невязок приращений координат во время раздельного уравновешивания полигонометрических сетей, а также для предвычисления точности полигонометрии.

На практике эти величины определяют различными способами (см. [1, 3—5] и др.), однако получить их надежно весьма трудно. Не случайно в геодезической литературе встречаются различные значения μ, λ и m_β для одного класса измерений. Например, для городской полигонометрии Б. И. Коськов [2] полагает, что $\lambda=\frac{1}{25}\mu$ у Н. А. Кузина и Н. Н. Лебедева [3] $\lambda=\frac{1}{40}\mu$, а А. С. Чеботарев [5] считает, что $\lambda\approx\approx\frac{1}{25}\mu-\frac{1}{30}\mu$. Такой разнобой затрудняет выбор метода уравновешивания.

В данной статье предлагается иной метод определения μ, λ и m_β, позволяющий получать значения этих величин, близкими к действительным.

Обратимся к известному выражению

$$M^2=[S]\mu^2+L^2\lambda^2+(m_\beta^2:\rho^2)[D^2], \tag{1}$$

где M — средняя квадратическая ошибка конечной точки хода; $[S]$ — периметр хода; L — длина замыкающей хода; D — расстояния от центра тяжести до вершин хода.

Составим по (1) систему из N уравнений погрешностей с тремя неизвестными

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z-M'_1=v_1; \\ a_2x+b_2y+c_2z-M'_1=v_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_Nx+b_Ny+c_Ny-M'_N=v_3, \end{array}\right\}, \tag{2}$$

где $a=[S]\cdot10^{-3}$; $b=L^2\cdot10^{-6}$; $c=[D^2]\cdot10^{-6}$; $x=\mu^2\cdot10^{+3}$; $y=\lambda\cdot10^{+6}$; $z=\frac{m_\beta^2}{\rho^2}10^{+6}$; $M'=M^2\cdot10^{+3}$.

Переходя к нормальным уравнениям и решая их при условии $[pvv=\min]$, можно достаточно строго получить значения неизвестных x,

y, z, а по ним — искомые величины μ, λ и m_β. Это очевидно из табл. 1, в которой приведены результаты решения составленных по (2) систем из 3, 8 и 31 уравнений погрешностей со свободными членами, вычисленными при произвольных значениях μ, λ и m_β (N означает число уравнений погрешности).

Таблица 1

Вычисленные по (2) значения μ, λ и m_β

Принятые значения	$N=3$	$N=8$	$N=31$
$\mu=8\cdot10^{-4}$ $\lambda=2\cdot10^{-5}$ $m_\beta=\pm5''$	$7{,}94\cdot10^{-4}$ $1{,}98\cdot10^{-5}$ $\pm5{,}06''$	$7{,}98\cdot10^{-4}$ $2{,}01\cdot10^{-5}$ $\pm5{,}01''$	—
$\mu=8\cdot10^{-4}$ $\lambda=2\cdot10^{-5}$ $m_\beta=\pm10''$	$7{,}84\cdot10^{-4}$ $2{,}10\cdot10^{-5}$ $\pm9{,}94''$	—	$8{,}03\cdot10^{-4}$ $2{,}00\cdot10^{-5}$ $\pm9{,}99''$
$\mu=5\cdot10^{-4}$ $\lambda=2\cdot10^{-4}$ $m_\beta=\pm5''$	$4{,}95\cdot10^{-4}$ $1{,}98\cdot10^{-4}$ $\pm5{,}01''$	$5{,}00\cdot10^{-4}$ $2{,}00\cdot10^{-5}$ $+5{,}00''$	$5{,}00\cdot10^{-4}$ $2{,}00\cdot10^{-5}$ $\pm5{,}00''$
$\mu=10\cdot10^{-4}$ $\lambda=4\cdot10^{-5}$ $m_\beta=\pm10''$	—	$10{,}00\cdot10^{-4}$ $4{,}00\cdot10^{-5}$ $\pm9{,}96''$	$10{,}00\cdot10^{-4}$ $4{,}00\cdot10^{-5}$ $\pm10{,}00''$

На практике среднеквадратические ошибки M' неизвестны, поэтому в качестве свободных членов можно использовать невязки ходов W', характеризующие качество измерений. Однако невязки ходов W', если их представить свободными членами уравнений (2), сильно меняются, принимая значения в диапазоне от нуля до допустимых для данного класса измерений размеров, и являются случайными и неустойчивыми в отличие от величин M', устойчивых для данного явления. Вследствие этого значения μ, λ и m_β, получаемые из решения системы уравнений поправок, могут оказаться мнимыми. Чтобы избежать мнимых значений неизвестных, мы предлагаем преобразовывать невязки W' таким образом, чтобы их новые значения W'' оказались близкими к среднеквадратическим величинам M'. При этом необходимо принять, что углы и линии во всех ходах измерены равноточно.

Как установлено методом корреляционного анализа, величины M' и $P=a+b+c$ находятся в четко выраженной функциональной зависимости. Коэффициенты корреляции r, полученные по выборкам, содержащим 3; 8 и 31 ход, приведены ниже. Причем выборка в 31 ход содержит ходы разной формы длиной в пределах 1,2—4,4 *км* с различным числом вершин (от 6 до 23). При вычислении получены следующие коэффициенты корреляции величин P и M' (N означает число ходов).

N	3	8	31
r	0,998	0,999	0,997

Основываясь на вычисленных значениях r, мы предлагаем определять значения W'' из выражения

$$W''_i = \frac{\sum_1^N W'_i}{\sum_1^N P_i} P_i. \tag{3}$$

Проверка систем уравнений типа (2), у которых вместо M_i' использовались W_i', по критериям, изложенным в работе [4], показала, что их матрицы достаточно обусловлены, а сами системы устойчивы. Однако, как установлено расчетами, формула (3) дает несколько приближенное значение W''.

Выведем формулу для получения точных свободных членов W_{p}. Согласно (3) записываем

$$W^i_{P_0} = \frac{\sum_1^N W'_i}{\sum_1^N P^i_0} P^i_0, \tag{4}$$

где P_0^i — уточненное значение величины P. Из выражения (3) имеем

$$P_i = \frac{\sum_1^N P_i}{\sum_1^N W'_i} W'_i. \tag{5}$$

Допустим, что значения M_i' заранее известны и $\sum_1^N W'_i = \sum_1^N M'_i$. Тогда, обозначая для этого частного случая W'' через W'_M, из (5) получаем

$$P_i = \frac{\sum_1^N P_i}{\sum_1^N M'_i} W^i_M. \tag{6}$$

Если теперь в формуле (6) принять, что $W^i_M = M'_i$, то $P_i = P^i_0$, то есть

$$P^i_0 = \frac{\sum_1^N P_i}{\sum_1^N M'_i} M'_i. \tag{7}$$

Разделим (7) на (6) и получим

$$P^i_0 = \frac{M'_i}{W^i_M} P_i. \tag{8}$$

Не трудно также показать, что

$$\sum_1^N P^i_0 = \sum_1^N P_i. \tag{9}$$

Подставляя значения P_0^i и $\sum_1^N P_0^i$ из (8) и (9) в (4), получаем окончательную формулу для вычисления $W_{P_0}^i$.

$$W_{P_0}^i = \frac{\sum_1^N W_i'}{\sum_1^N P_i} \cdot \frac{M_i}{M_M^i} P_i. \qquad (10)$$

Пример. Выражения (11) представляют собой составленную по (2) систему из восьми уравнений погрешностей ($N=8$). В качестве свободных членов здесь приняты абсолютные невязки по ходам.

$$\left.\begin{aligned}
2{,}07\,x+3{,}37\,y+\ 3{,}63\,z-18{,}65&=v_1;\\
1{,}45\,x+2{,}09\,y+\ 2{,}08\,z-14{,}03&=v_2;\\
1{,}41\,x+1{,}98\,y+\ 1{,}92\,z-\ 2{,}68&=v_3;\\
1{,}82\,x+3{,}02\,y+\ 3{,}86\,z-\ 3{,}39&=v_4;\\
3{,}04\,x+8{,}54\,y+11{,}50\,z-44{,}42&=v_5;\\
2{,}52\,x+4{,}55\,y+\ 8{,}16\,z-22{,}61&=v_6;\\
2{,}65\,x+4{,}48\,y+\ 7{,}24\,z-18{,}24&=v_7;\\
2{,}19\,x+2{,}04\,y+\ 2{,}83\,z-12{,}52&=v_8.
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Вычисление значений свободных членов W_{P_0} для уравнений (11) представлено табл. 2, причем величины M' были подсчитаны путем подстановки в каждое из уравнений (11) значений $\mu=5\cdot10^{-4}$; $\lambda=2\cdot10^{-5}$ и $m_\beta=\pm5''$, соответствующих данному разряду измерений. Контролем вычислений служит соблюдение равенств

$$\sum_1^N M_i' = \sum_1^N W_M^i;\quad \sum_1^N P_i = \sum_1^N P_0^i;\quad \sum_1^N W_i' = \sum_1^N W_{P_0}.$$

Таблица 2

Вычисление свободных членов W_{P_0} для системы (11)

N	M'	W'	P	W_M	$M':W_M$	P_0	W_{P_0}
1	4,00	18,65	9,07	4,16	0,962	8,72	13,46
2	2,42	14,03	5,62	2,58	0,938	5,27	8,14
3	2,28	2,68	5,31	2.43	0,938	4,98	7,69
4	3,94	3,39	8,70	3,99	0,987	8.59	13,26
5	10,93	44,42	23,08	10,58	1,033	23,84	36,81
6	7,24	22,61	15,23	6,98	1,037	15,79	24,38
7	6,71	18,24	14,37	6.59	1,018	14,63	22,59
8	3,02	12,52	7,06	3.23	0,935	6,60	10,19
$\sum_1^N$	40,54	136,54	88,44	40,54		88,42	136,52

$$\sum_1^N M' : \sum_1^N P = 0{,}4584;\quad \sum_1^N W' \sum_1^N P_0 = 1{,}5442.$$

Решение рассматриваемого примера по способу наименьших квадратов дает следующие значения: $\mu=9{,}1\cdot10^{-4}$; $\lambda=3{,}8\cdot10^{-5}$; $m_\beta=\pm9{,}1''$.

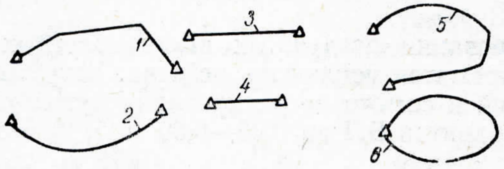
При составлении уравнений погрешностей необходимо для каждого хода знать $[D^2]$. Если этих данных нет, то для экономии времени, их можно быстро и надежно вычислять по упрощенной формуле В. И. Акулова [1]

$$[D^2] \approx \frac{1}{45} n([S]+L)^2. \qquad (12)$$

Ниже приводим значения M для шести ходов различной длины и формы (см. рисунок), предвычисленные по формуле (1) обычным методом (по А. С. Чеботареву) и с применением формулы (12) (по В. И. Акулову). Величины μ, λ и m_β для всех ходов приняты одинаковыми.

Номер хода	1	2	3	4	5	6
$[S]$	9,879	3,250	3,945	1,325	3,661	4,170
L	6,207	2,372	3,940	1,325	1,374	0
n	36	13	16	8	16	20
M при расчете						
по А. С. Чеботареву, *м*	±0,322	±0,093	±0,125	±0,037	±0,077	±0,076
по В. И. Акулову, *м*	±0,354	±0,084	±0,116	±0,039	±0,081	±0,075

Применение формулы (12) при решении данного выше примера приводит к следующим значениям: $\mu=9{,}53\cdot10^{-4}$; $\lambda=3{,}65\cdot10^{-5}$ и $m_\beta=\pm9{,}3''$. Таким образом, формула (12) дает большую экономию времени расчета при незначительной (2—4%) потери точности.



Форма ходов *1—6*.

Предложенный метод совместного определения μ, λ и m_β можно применять к сетям полигонометрии, состоящим из разомкнутых и замкнутых полигонов, независимо от их длины, формы и числа вершин. Отыскание этих величин из большого объема фактического материала будет иметь важное практическое и теоретическое значение для предрасчета точности полигонометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Акулов В. И.** Установление весов ходов при раздельном уравновешивании полигонометрической сети. «Геодезия и картография», 1968, № 2.
2. Коськов Б. И. Справочное руководство по съемке городов. «Недра», М., 1968.
3. Кузин Н. А., Лебедев Н. Н. Практическое руководство по городской полигонометрии. Геодезиздат, М., 1954.
4. Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматиздат, М., 1960.
5. Чеботарев А. С. [и др.] Геодезия, ч. II, Геодезиздат, М., 1962.

Работа поступила
4 ноября 1970 г.