УДК 528.14:528.414

Н. С. ШЕВЧУН

УРАВНИВАНИЕ ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ХОДА СОВМЕСТНО С УРАВНИВАНИЕМ ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН НА СТАНЦИЯХ

В полигонометрических сетях специального назначения с целью получения вероятнейших значений уравненных элементов сети при уравнивании и оценке точности появляется необходимость обращаться к непосредственно измеренным величинам.

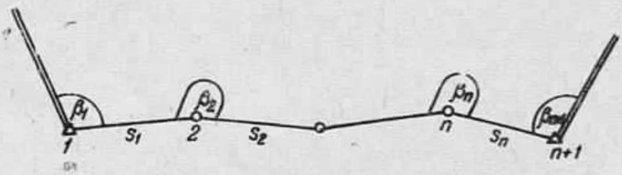

Схема полигонометрического хода:
β_i— горизонтальный угол, s_i— расстояние между пунктами.

Допустим, имеем полигонометрический ход произвольной формы (см. рисунок), в котором углы на станции измерены Ф раз, а линии между пунктами П раз. Число сторон обозначим через n, тогда число углов будет $n+1$.

Условно для простоты дальнейших выводов примем $\Phi=2$, $\Pi=3$. Согласно указанной конструкции полигонометрического хода составим условные уравнения с разбивкой по группам:

I группа

$$\left.\begin{aligned} \delta_{\beta_{i1}} - \delta_{\beta_{i2}} + V_{\beta_i} = 0 \\ \delta_{s_{i1}} - \delta_{s_{i2}} + V_{s_i} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

II группа

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{\beta_{11}} + \delta_{\beta_{21}} + \ldots + \delta_{\beta_{n1}} + \delta_{\beta_{n+1,1}} + f_\beta = 0 \\ &\delta_{s_{i2}} - \delta_{s_{i3}} + W_{s_i} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

III группа

$$\left.\begin{aligned} \delta_{\Delta x_1} + \delta_{\Delta x_2} + \ldots + \delta_{\Delta x_n} + f_x = 0 \\ \delta_{\Delta y_1} + \delta_{\Delta y_2} + \ldots + \delta_{\Delta y_n} + f_y = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Здесь $\delta_{\beta_{i1}}, \delta_{\beta_{i2}}, \ldots, \delta_{\beta_{i\Phi}}, \delta_{s_{i1}}, \delta_{s_{i2}}, \ldots, \delta_{s_{i\Pi}}$ — поправки углов и сторон. Первый индекс при поправках указывает номер пункта или номер стороны, второй — j-тый результат определения измеряемой величины, где $j=1, 2, \ldots, \Phi$ для углов и $j=1, 2, \ldots, \Pi$ для сторон.

Первичные поправки углов и сторон найдем из решения уравнений I группы:

$$\delta'_{\beta_{i1}} = \delta'_{\beta_{i2}} = -\frac{V_{\beta_i}}{2}, \qquad \delta_{s_{i1}} = \delta_{s_{i2}} = -\frac{V_{s_i}}{2}. \tag{4}$$

Условные уравнения II группы составляем по исправленным первичными поправками углам и сторонам. Преобразование коэффициентов этих уравнений производим по известному механическому правилу (I). Учитывая то, что сюда отнесены уравнения с неповторяющимися неизвестными, нормальные уравнения II группы будут иметь вид:

$$\frac{n+1}{2} k_\beta + f_\beta = 0, \qquad \frac{3}{2} k_{s_i} + W_{s_i} = 0. \tag{5}$$

Вторичные поправки углов и сторон получат выражения:

$$\delta''_{\beta_{i1}} = -\delta''_{\beta_{i2}} = -\frac{1}{n+1} f_\beta, \qquad \delta''_{s_{i2}} = -\delta''_{s_{i1}} = -\frac{1}{3} W_{s_i}, \qquad \delta''_{s_{i3}} = -\frac{2}{3} W_{s_i}. \tag{6}$$

Очевидно, что уравнивание измеренных величин на станциях сводится к вычислению их среднего арифметического значения.

Коэффициенты условных уравнений координат подлежат двойному преобразованию. Первичное преобразование произведем по известному механическому правилу, а вторичное — согласно общей теории трехгруппового метода [1].

Вторично преобразованные коэффициенты при поправках углов имеют вид (табл. 1).

$$\begin{aligned} A_{\beta_{i1}} &= -A_{\beta_{i2}} = a'_{\beta_{i1}} + \Delta a_{\beta_{i1}} = a'_{\beta_{i1}} + \left(-\frac{1}{n+1}\right)[a']^{\mathrm{II}}, \\ B_{\beta_{i1}} &= -B_{\beta_{i2}} = b'_{\beta_{i1}} + \Delta b_{\beta_{i1}} = b'_{\beta_{i1}} + \left(-\frac{1}{n+1}\right)[b']^{\mathrm{II}}, \end{aligned} \tag{7}$$

но

$$[a']^{\mathrm{II}} = -\frac{1}{2}\left[(n+1)\, y_{n+1} - \sum_1^{n+1} y_i\right], \quad [b']^{\mathrm{II}} = +\frac{1}{2}\left[(n+1)\, x_{n+1} - \sum_1^{n+1} x_i\right], \tag{8}$$

следовательно,

$$A_{\beta_{i1}} = -A_{\beta_{i2}} = \frac{1}{2}(y_i - y_0) = \frac{1}{2}\eta_i, \quad B_{\beta_{i1}} = -B_{\beta_{i2}} = -\frac{1}{2}(x_i - x_0) = -\frac{1}{2}\xi_i, \tag{9}$$

где

$$y_0 = \frac{1}{n+1}\sum_1^{n+1} y_i, \qquad x_0 = \frac{1}{n+1}\sum_1^{n+1} x_i. \tag{10}$$

Вторично преобразованные коэффициенты при поправках сторон получают выражение (табл. 1)

$$A_{s_{i1}} = -A_{s_{i2}} = -A_{s_{i3}} = -\frac{1}{3}\cos T, \qquad B_{s_{i1}} = -B_{s_{i2}} = -B_{s_{i3}} = -\frac{1}{3}\sin T. \tag{11}$$

Увеличивая число определений разнородных величин, подобным путем можно показать, что при вторично преобразованных коэффициентах углов мы будем иметь множитель $\frac{1}{\Phi}$ и линий множитель $\frac{1}{\Pi}$ с числом

Преобразование коэффициентов

№ углов и сторон	$\frac{1}{P}$	a	b	a'
β_{11}		$-(y_{n+1}-y_1)$	$x_{n+1}-x_1$	$-\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_1)$
β_{12}				$+\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_1)$
.		.	.	.
$\beta_{\kappa 1}$		$-(y_{n+1}-y_\kappa)$	$x_{n+1}-x_\kappa$	$-\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_\kappa)$
$\beta_{\kappa 2}$	$\frac{1}{P_{\beta\rho}}=\frac{10^9 m_\beta^2}{\mu^2\rho^2}$			$+\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_\kappa)$
.		.	.	.
β_{n1}		$-(y_{n+1}-y_n)$	$x_{n+1}-x_n$	$-\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_n)$
β_{n2}				$+\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_n)$
$\beta_{n+1,1}$		$-(y_{n+1}-y_{n+1})$	$x_{n+1}-x_{n+1}$	$-\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_{n+1})$
$\beta_{n+1,2}$				$+\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_{n+1})$
s_{11}	$s_1^{\kappa м}$			$-\frac{1}{2}\cos T_1$
s_{12}	s_1	$\cos T_1$	$\sin T_1$	$+\frac{1}{2}\cos T_1$
s_{13}	s_1			
.	.	.	.	.
$s_{\kappa 1}$	s_κ			$-\frac{1}{2}\cos T_\kappa$
$s_{\kappa 2}$	s_κ	$\cos T_\kappa$	$\sin T_\kappa$	$+\frac{1}{2}\cos T_\kappa$
$s_{\kappa 3}$	s_κ			
.	.	.	.	.
s_{n1}	s_n			$-\frac{1}{2}\cos T_n$
s_{n2}	s_n	$\cos T_n$	$\sin T_n$	$+\frac{1}{2}\cos T_n$
s_{n3}	s_n			

условных уравнений третьей группы

b'	Δa	Δb	A	B
$+\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_1)$	$+\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_0)$	$-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_0)$	$+\frac{1}{2}\eta_1$	$-\frac{1}{2}\xi_1$
$-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_1)$	$-\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_0)$	$+\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_0)$	$-\frac{1}{2}\eta_1$	$+\frac{1}{2}\xi_1$
.	.	.	.	.
$+\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_\kappa)$	$+\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_0)$	$-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_0)$	$+\frac{1}{2}\eta_\kappa$	$-\frac{1}{2}\xi_\kappa$
$-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_\kappa)$	$-\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_0)$	$+\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_0)$	$-\frac{1}{2}\eta_\kappa$	$+\frac{1}{2}\xi_\kappa$
.	.	.	.	.
$+\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)$	$+\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_0)$	$-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_0)$	$+\frac{1}{2}\eta_n$	$-\frac{1}{2}\xi_n$
$-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)$	$-\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_0)$	$+\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_0)$	$-\frac{1}{2}\eta_n$	$+\frac{1}{2}\xi_n$
$+\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_{n+1})$	$+\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_0)$	$-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_0)$	$+\frac{1}{2}\eta_{n+1}$	$-\frac{1}{2}\xi_{n+1}$
$-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_{n+1})$	$-\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_0)$	$+\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_0)$	$-\frac{1}{2}\eta_{n+1}$	$+\frac{1}{2}\xi_{n+1}$
$-\frac{1}{2}\sin T_1$	$+\frac{1}{6}\cos T_1$	$+\frac{1}{6}\sin T_1$	$-\frac{1}{3}\cos T_1$	$-\frac{1}{3}\sin T_1$
$+\frac{1}{2}\sin T_1$	$-\frac{1}{6}\cos T_1$	$-\frac{1}{6}\sin T_1$	$+\frac{1}{3}\cos T_1$	$+\frac{1}{3}\sin T_1$
	$+\frac{1}{3}\cos T_1$	$+\frac{1}{3}\sin T_1$	$+\frac{1}{3}\cos T_1$	$+\frac{1}{3}\sin T_1$
.	.	.	.	.
$-\frac{1}{2}\sin T_\kappa$	$+\frac{1}{6}\cos T_\kappa$	$+\frac{1}{6}\sin T_\kappa$	$-\frac{1}{3}\cos T_\kappa$	$-\frac{1}{3}\sin T_\kappa$
$+\frac{1}{2}\sin T_\kappa$	$-\frac{1}{6}\cos T_\kappa$	$-\frac{1}{6}\sin T_\kappa$	$+\frac{1}{3}\cos T_\kappa$	$+\frac{1}{3}\sin T_\kappa$
	$+\frac{1}{3}\cos T_\kappa$	$+\frac{1}{3}\sin T_\kappa$	$+\frac{1}{3}\cos T_\kappa$	$+\frac{1}{3}\sin T_\kappa$
.	.	.	.	.
$-\frac{1}{2}\sin T_n$	$+\frac{1}{6}\cos T_n$	$+\frac{1}{6}\sin T_n$	$-\frac{1}{3}\cos T_n$	$-\frac{1}{3}\sin T_n$
$+\frac{1}{2}\sin T_n$	$-\frac{1}{6}\cos T_n$	$-\frac{1}{6}\sin T_n$	$+\frac{1}{3}\cos T_n$	$+\frac{1}{3}\sin T_n$
	$+\frac{1}{3}\cos T_n$	$+\frac{1}{3}\sin T_n$	$+\frac{1}{3}\cos T_n$	$+\frac{1}{3}\sin T_n$

соответствующих секций уравнений I группы. Перейдем теперь к нормальным уравнениям коррелат в общем случае.

$$\left\{+\frac{1}{\Phi P_{\beta\rho}}[\eta^2]+\frac{1}{\Pi}[\Delta x\cos T]\right\}k_1+\left\{-\frac{1}{\Phi P_{\beta\rho}}[\eta\xi]+\frac{1}{\Pi}[\Delta x\sin T\right\}k_2+f_x=0,$$
$$\left\{\frac{1}{\Phi P_{\beta\rho}}[\eta\xi]+\frac{1}{\Pi}[\Delta x\sin T\right\}k_1+\left\{+\frac{1}{\Phi P_{\beta\rho}}[\xi^2]+\frac{1}{\Pi}[\Delta y\sin T]\right\}k_2+f_y=0. \qquad (12)$$

Сравнивая (12) с (17) работы профессора А. И. Кобылина [2] легко заметить, что их можно получить, если обратный вес измеренных величин умножить соответственно на $\frac{1}{\Phi}$ и $\frac{1}{\Pi}$ при двухгрупповом способе уравнивания полигонометрического хода, в котором условно положить Φ и Π равными единице. Для искомых третичных поправок имеем:

$$\delta_{\beta_i}=\frac{1}{\Phi\tau P_{\beta\rho}}(k_1\eta_i-k_2\xi_i),\qquad \delta_{s_i}=\frac{1}{\Pi}(\Delta x_i k_1+\Delta y_i k_2), \qquad (13)$$

где k_1 и k_2 получены из решения нормальных уравнений (12).

В результате изложенного наметим следующий порядок работы при уравнивании полигонометрического хода совместно с уравниванием измеренных величин на станциях:

1. Определяем на каждой станции средние арифметические значения измеренных разнородных величин.

2. По средним значениям измеренных величин составляем условные уравнения. При этом полагаем, что обратные веса средних значений равны обратным весам измеренных разнородных величин, умноженные соответственно на $\frac{1}{\Phi}$ для углов и $\frac{1}{\Pi}$ для сторон.

3. Согласно принятым весам средних значений измеренных величин и значений преобразованных коэффициентов условных уравнений координат при двухгрупповом способе уравнивания, составляем нормальные уравнения коррелат.

4. Решив нормальные уравнения коррелат, определяем третичные поправки в измеренные величины по формулам (13). Формулы (13) наглядно показывают, что с увеличением числа определений одной из разнородных величин третичные поправки их приближаются к нулю. При этом предполагается, что результаты измеренных значений содержат преобладающие ошибки случайного характера.

Таблица 2

Поправки в измеренные величины при $\Phi=4$ и $\Pi=1$

№ вершины	δ_s, *мм*	δ''_β	δ''_α	$\delta_{\Delta x}$, *мм*	$\delta_{\Delta y}$, *мм*	δ_x, *мм*	δ_y, *мм*
32							
16	−2,5	−3,3	−3,3	+5	+5	+5	+5
15	+0,6	−1,2	−4,5	+2	+5	+7	+10
14	+11,0	+0,1	−4,4	+10	+11	+17	+16
13	+6,0	+0,9	−3,5	+2	+6	+19	+27
38	+6,0	+1,5	−2,0	+1	+7	+20	+34
1		+2,0	0,0				
12							
Всего		0,0		+20	+34		

Приведем пример на вычисление поправок в измеренные величины при различных значениях Ф и П (табл. 2) для данных из работы [3]. При этом будем полагать, что среднее арифметическое значение измеренных величин, независимо от числа определений, соответствует значениям уравниваемых величин рассматриваемого примера.

Сравнивая данные табл. 2 и работы [3], отмечаем, что с увеличением числа определений углов их поправки уменьшаются. Уменьшение поправок в углы вызывает увеличение поправок в линии почти в два раза. Максимальное расхождение в местоположении вершин по оси ординат достигает 10 *мм*. Следовательно, при строгом уравнивании полигонометрических ходов, не отягощенных ошибками исходных данных, необходимо учитывать число повторных определений разнородных величин. Применение трехгруппового метода обработки для решения поставленной задачи не вызывает увеличения объема уравнительных вычислений, а распределение ошибок в результате совместного уравнивания происходит с учетом их накопления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кобылин А. И. Групповое уравнивание рудничной триангуляции. Металлургиздат, 1955.
2. Кобылин А. И. Уравнивание полигонометрического хода и оценка точности. Научн. тр. Харьковского горного ин-та, т. 4, 1958.
3. Кузин Н. А. и Лебедев Н. Н. Практическое руководство по городской и инженерной полигонометрии. Геодезиздат, М., 1954.

Работа поступила
13 декабря 1969 года