УДК 528.14

В. Д. ШИПУЛИН

ВИД УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЯХ, УРАВНИВАЕМЫХ С УЧЕТОМ ОШИБОК ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

При совместном уравнивании наблюденных и опорных геодезических сетей исходные данные не рассматриваются как жесткие, неизменяемые. Те из них, которые имеют ошибки, надо уточнять, определяя вероятные поправки в результате указанного уравнивания. Понятно, что при таком подходе к уравниванию условные уравнения поправок, содержащие исходные данные, будут иметь вид, несколько отличный от общепринятого.

1. УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Исходные данные и, следовательно, поправки к ним при уравнивании триангуляции входят в условные уравнения дирекционных углов, сумм углов, сторон, базисов, абсцисс и ординат. Рассмотрим каждое из названных условий.

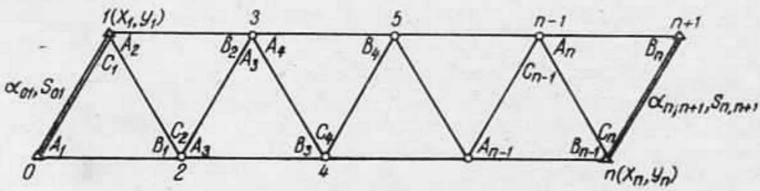

Рис. 1. Схема цепи треугольников.

Условные уравнения дирекционных углов. Избыточные исходные дирекционные углы обусловливают появление в сети условных уравнений дирекционных углов, которые применительно к схеме на рис. 1 имеют вид:

$$(\alpha_{n,\,n+1}+v_{\alpha_{n,\,n+1}})=(\alpha_{01}+v_{\alpha_{01}})\pm 180^\circ-(C_1+v_{C_1})\pm 180^\circ+(C_2+v_{C_2})\pm$$
$$\pm 180^\circ-(C_3+v_{C_3})\pm 180^\circ+(C_4+v_{C_4})\pm\ \dots\ \pm 180^\circ-(C_{n-1}+v_{C_{n-1}})\pm$$
$$\pm 180^\circ+(C_n+v_{C_n}). \tag{1}$$

Обозначая

$$w_\alpha=\alpha_{01}-\alpha_{n,\,n+1}\pm 180^\circ\cdot n-C_1+C_2-C_3+\dots+(-1)^n C_n, \tag{2}$$

получаем

$$-v_{C_1}+v_{C_2}-v_{C_3}+\dots+(-1)^n v_{C_n}+v_{\alpha_{01}}-v_{\alpha_{n,\,n+1}}+w_\alpha=0, \tag{3}$$

или

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(-1)^i v_{C_i}+v_{\alpha_{01}}-v_{\alpha_{n,\,n+1}}+w_\alpha=0}\,. \tag{4}$$

Уравнение (4) справедливо для случая, когда в цепи треугольников первый промежуточный угол C_1 — правый. Если C_1 будет левым углом, то показатель степени при отрицательной единице имеет вид $i+1$.

Условные уравнения сумм углов

При наличии исходных углов β, включающих ряд измеренных углов, возникают условные уравнения сумм углов. Так, для сети на рис. 2 имеем

$$(C_1+v_{C_1})+(C_2+v_{C_2})+\ldots+(C_n+v_{C_n})-(\beta+v_\beta)=0. \tag{5}$$

Полагая

$$w_\beta=C_1+C_2+C_3+\ldots+C_n-\beta, \tag{6}$$

находим

$$v_{C_1}+v_{C_2}+v_{C_3}+\ldots+v_{C_n}-v_\beta+w_\beta=0 \tag{7}$$

или

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}v_{C_i}-v_\beta+w_\beta=0}\,. \tag{8}$$

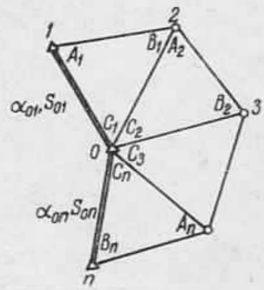

Рис. 2. Схема вставки в исходный угол.

Если угол β определяется дирекционными углами исходных сторон

$$\beta=\alpha_{0,n+1}-\alpha_{01},$$

то для выражения (8) имеем

$$v_\beta=v_{\alpha_{0,n+1}}-v_{\alpha_{01}}, \qquad w_\beta=\sum_{i=1}^{n}C_i-(\alpha_{0,\,n+1}-\alpha_{01}).$$

Условные уравнения сторон, базисов. Если сеть триангуляции опирается на избыточное число исходных сторон или базисов, то возникают условные уравнения сторон или базисов. Для сети, представленной на рис. 1, условное уравнение сторон (базисов) можно выразить формулой

$$\frac{(s_{01}+v_{s_{01}})\cdot\sin(A_1+v_{A_1})\cdot\sin(A_2+v_{A_2})\ldots\sin(A_n+v_{A_n})}{(s_{n,\,n+1}+v_{s_{n,\,n+1}})\cdot\sin(B_1+v_{B_1})\cdot\sin(B_2+v_{B_2})\ldots\sin(B_n+v_{B_n})}=1. \tag{9}$$

Приведение выражения (9) к линейной форме, имеющей сравнительно просто получаемые коэффициенты, выполняют посредством его логарифмирования и последующего разложения компонентов в ряд Тейлора с ограничением двумя членами. Так,

$$\lg\sin(A_i+v_{A_i})=\lg\sin A_i+\operatorname{ctg}A_i\frac{M}{\rho''}v_{A_i}.$$

Умножив обе части этого выражения на 10^m, получаем

$$10^m\lg\sin(A_i+v_{A_i})=10^m\lg\sin A_i+\Delta_{A_i}v_{A_i}, \tag{10}$$

где $\Delta_{A_i} = \operatorname{ctg} A_i \frac{M}{\rho''} \cdot 10^m$ — изменение логарифма синуса угла A_i при изменении его на $1''$, выраженное в единицах m-го знака мантиссы $\lg \sin A$; поправки vA_i выражаются в секундах. Подобным образом находим

$$\lg(s_j + v_{s_j}) = \lg s_j + \frac{M}{s_j} v_{s_j}, \qquad 10^m \lg(s_j + v_{s_j}) = 10^m \lg s_j + \Delta_{s_j} \cdot v_{s_j}, \quad (11)$$

где $\Delta_s = \frac{M}{s} 10^m$ — выраженное в единицах m-го знака мантиссы изменение логарифма стороны, если длину стороны изменить на единицу выбранной линейной размерности (на 1 *м*, 1 *дм*, 1 *см*, 1 *мм*). Очевидно, что в таком случае размерность поправки равна этой выбранной размерности.

С учетом (10), (11) выражение (9) преобразуется к виду

$$\Delta_{A_1} v_{A_1} + \Delta_{A_2} v_{A_2} + \ldots + \Delta_{A_n} v_{A_n} - \Delta_{B_1} v_{B_1} - \Delta_{B_2} v_{B_2} - \ldots - \Delta_{B_n} v_{B_n} +$$
$$+ \Delta_{s_{01}} v_{s_{01}} - \Delta_{s_{n,\,n+1}} v_{s_{n,\,n+1}} + w_s = 0, \quad (12)$$

где

$$w_s = 10^m \lg \frac{s_{01} \sin A_1 \sin A_2 \ldots \sin A_n}{s_{n,\,n+1} \sin B_1 \sin B_2 \ldots \sin B_n} \quad (13)$$

или в окончательном виде

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \Delta_{A_i} v_{A_i} - \sum_{i=1}^{n} \Delta_{B_i} v_{B_i} + \Delta_{s_{01}} v_{s_{01}} - \Delta_{s_{n,\,n+1}} v_{s_{n,\,n+1}} + w_s = 0} \quad (14)$$

Условные уравнения координат. При наличии избыточных исходных пунктов, не связанных между собой сторонами сети, и примыкающих к ним по меньшей мере одной исходной стороны s_{01} с дирекционным углом α_{01} в сети возникают условия абсцисс и условия ординат.

Условное уравнение абсцисс для сети, представленной на рис. 1, имеет вид

$$(x_1 + v_{x_1}) + (\Delta x_{12} + v_{\Delta x_{12}}) + (\Delta x_{23} + v_{\Delta x_{23}}) + \ldots + (\Delta x_{n-1,\,n} + v_{\Delta x_{n-1,\,n}}) = (x_n - v_{x_n}) \quad (15)$$

или

$$\sum_{i=1}^{n-1} v_{\Delta x_{i,\,i+1}} + v_{x_1} - v_{x_n} + w_x = 0, \quad (16)$$

где

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_{i,\,i+1} + x_1 - x_n = w_x. \quad (17)$$

Здесь $\Delta x_{i,i+1}$ — приращение абсцисс, вычисленное по измеренным углам i-треугольников и исходным данным α_{01}, s_{01}. Чтобы выразить поправки $v_{\Delta x_{i,\,i+1}}$ в приращения координат через поправки в измеренные углы и исходные данные α_{01}, s_{01}, дифференцируя известное выражение

$$\Delta x_{i,i+1} = s_{i,i+1} \cos \alpha_{i,i+1},$$

находим

$$d\Delta x_{i,\,i+1} = \cos \alpha_{i,\,i+1} \, ds_{i,\,i+1} - s_{i,\,i+1} \sin \alpha_{i,\,i+1} \frac{d\alpha_{i,\,i+1}}{\rho''}$$

или

$$d\Delta x_{i,\,i+1}=\Delta x_{i,\,i+1}\frac{ds_{i,\,i+1}}{s_{i,\,i+1}}-\Delta y_{i,\,i+1}\frac{d\alpha''_{i,\,i+1}}{\rho''}. \tag{18}$$

Имея в виду, что $\dfrac{ds}{s}=\dfrac{d\lg s\cdot 10^m}{M\cdot 10^m}$, преобразуем выражение (18)

$$M\cdot 10^m\cdot v_{\Delta x_{i,\,i+1}}=\Delta x_{i,\,i+1}\cdot 10^m\cdot d\lg s_{i,\,i+1}-K\cdot\Delta y_{i,\,i+1}\cdot d\alpha''_{i,\,i+1}, \tag{19}$$

где $K=\dfrac{10^m\cdot M}{\rho''}$, $M=0{,}43429$; если $m=6$, то $K=2{,}106$.

Дифференцируя известные функции

$$\lg s_{i,\,i+1}=\lg s_{01}+\sum_{j=1}^{i}\lg\sin A_j-\sum_{j=1}^{i}\lg\sin B_j$$

и переходя от дифференциалов аргументов к поправкам в аргументы, в соответствии с принятыми обозначениями в (10), (11) для (19) находим

$$10^m\cdot d\lg_{i,\,i+1}=\Delta_{s_0}v_{s_{01}}+\sum_{j=1}^{i}\Delta_{A_j}v_{A_j}-\sum_{j=1}^{i}\Delta_{B_j}v_{B_j}. \tag{20}$$

Дифференцируя выражение

$$\alpha_{i,\,i+1}=\alpha_{01}+\sum_{j=1}^{i}(-1)^j(C_j-180^\circ),$$

для (19) получаем

$$d\alpha_{i,\,i+1}=v\alpha_{01}+\sum_{j=1}^{i}(-1)^j v_{C_j}. \tag{21}$$

Согласно (19), (20), (21), выражение (16) преобразуется к окончательному виду

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n-1}\Delta x_{in}\cdot\Delta_{A_i}v_{A_i}-\sum_{i=1}^{n-1}\Delta x_{i,n}\,\Delta_{B_i}v_{B_i}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\Delta y_{in}Kv_{C_i}-\Delta y_{1n}Kv_{\alpha_{01}}+\\+\Delta x_{1n}\cdot\Delta_{s_{01}}v_{s_{01}}+4{,}343v_{x_1}-4{,}343v_{x_n}+4{,}343w_x=0\end{gathered}}, \tag{22}$$

если принять $m=6$, и Δx, Δy выражать в километрах, Δ_A, Δ_B — в единицах шестого знака логарифма синуса угла при изменении его на 1″, Δ_s — в единицах шестого знака логарифма стороны при изменении ее длины на 1 *см*, $v_{s_{01}}$, v_{x_1}, v_{x_n}, w_x — в сантиметрах, v_A, v_B, v_C, $v_{\alpha_{01}}$ — в секундах.

Подобным образом можно получить условное уравнение ординат

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n-1}\Delta y_{in}\Delta_{A_i}v_{A_i}-\sum_{i=1}^{n-1}\Delta y_{in}\Delta_{B_i}v_{B_i}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\Delta x_{in}Kv_{C_i}+\Delta x_{1n}Kv_{\alpha_{01}}+\\+\Delta y_{1n}\Delta_{s_{01}}v_{s_{01}}+4{,}343v_{y_1}-4{,}343v_{y_n}+4{,}343w_y=0\end{gathered}}, \tag{23}$$

2. УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛИГОНОМЕТРИИ

При строгом уравнивании полигонометрического хода (рис. 3) возникают три условных уравнения — дирекционных углов, абсцисс, ординат, аргументами в которых являются и исходные данные.

или

$$d\Delta x_{i,\,i+1}=\Delta x_{i,\,i+1}\frac{ds_{i,\,i+1}}{s_{i,\,i+1}}-\Delta y_{i,\,i+1}\frac{d\alpha^{*}_{i,\,i+1}}{\rho''}. \qquad (18)$$

Имея в виду, что $\frac{ds}{s}=\frac{d\lg s\cdot 10^m}{M\cdot 10^m}$, преобразуем выражение (18)

$$M\cdot 10^m\cdot v_{\Delta x_{i,\,i+1}}=\Delta x_{i,\,i+1}\cdot 10^m\cdot d\lg s_{i,\,i+1}-K\cdot\Delta y_{i,\,i+1}\cdot d\alpha^{*}_{i,\,i+1}, \qquad (19)$$

где $K=\frac{10^m\cdot M}{\rho''}$, $M=0{,}43429$; если $m=6$, то $K=2{,}106$.

Дифференцируя известные функции

$$\lg s_{i,\,i+1}=\lg s_{01}+\sum_{j=1}^{i}\lg\sin A_j-\sum_{j=1}^{i}\lg\sin B_j$$

и переходя от дифференциалов аргументов к поправкам в аргументы, в соответствии с принятыми обозначениями в (10), (11) для (19) находим

$$10^m\cdot d\lg_{i,\,i+1}=\Delta_{s_0}v_{s_{01}}+\sum_{j=1}^{i}\Delta_{A_j}v_{A_j}-\sum_{j=1}^{i}\Delta_{B_j}v_{B_j}. \qquad (20)$$

Дифференцируя выражение

$$\alpha_{i,\,i+1}=\alpha_{01}+\sum_{j=1}^{i}(-1)^j(C_j-180^\circ),$$

для (19) получаем

$$d\alpha_{i,\,i+1}=v\alpha_{01}+\sum_{j=1}^{i}(-1)^j v_{C_j}. \qquad (21)$$

Согласно (19), (20), (21), выражение (16) преобразуется к окончательному виду

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n-1}\Delta x_{in}\cdot\Delta_{A_i}v_{A_i}-\sum_{i=1}^{n-1}\Delta x_{i,n}\,\Delta_{B_i}v_{B_i}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\Delta y_{in}Kv_{C_i}-\Delta y_{1n}Kv_{\alpha_{01}}+\\&+\Delta x_{1n}\cdot\Delta_{s_{01}}v_{s_{01}}+4{,}343v_{x_1}-4{,}343v_{x_n}+4{,}343w_x=0\end{aligned}}, \qquad (22)$$

если принять $m=6$, и Δx, Δy выражать в километрах, Δ_A, Δ_B — в единицах шестого знака логарифма синуса угла при изменении его на 1″, Δ_s — в единицах шестого знака логарифма стороны при изменении ее длины на 1 *см*, $v_{s_{01}}$, v_{x_1}, v_{x_n}, w_x — в сантиметрах, v_A, v_B, v_C, v_{α_0} — в секундах.

Подобным образом можно получить условное уравнение ординат

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n-1}\Delta y_{in}\Delta_{A_i}v_{A_i}-\sum_{i=1}^{n-1}\Delta y_{in}\Delta_{B_i}v_{B_i}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\Delta x_{in}Kv_{C_i}+\Delta x_{1n}Kv_{\alpha_{01}}+\\&+\Delta y_{1n}\Delta_{s_{01}}v_{s_{01}}+4{,}343v_{y_1}-4{,}343v_{y_n}+4{,}343w_y=0\end{aligned}}, \qquad (23)$$

2. УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛИГОНОМЕТРИИ

При строгом уравнивании полигонометрического хода (рис. 3) возникают три условных уравнения — дирекционных углов, абсцисс, ординат, аргументами в которых являются и исходные данные.

Условное уравнение дирекционных углов. Измерение избыточного угла β_1 или β_n приводит к необходимости составить условное уравнение дирекционных углов, которое при уравнивании с учетом ошибок исходных данных имеет вид

$$(\alpha_{01} + v_{\alpha_{01}}) + \sum_{i=1}^{n} (\beta_i + v_{\beta_i}) - 180^\circ\, n = \alpha_{n,\,n+1} + v_{\alpha_{n,\,n+1}}. \tag{24}$$

Подразумевая под свободным членом выражение

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i - 180^\circ\, n + \alpha_{01} - \alpha_{n,\,n+1} = w_\alpha, \tag{25}$$

вместо (24) получаем

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} v_{\beta i} + v_{\alpha_{01}} - v_{\alpha_{n,\,n+1}} + w_\alpha = 0}\,. \tag{26}$$

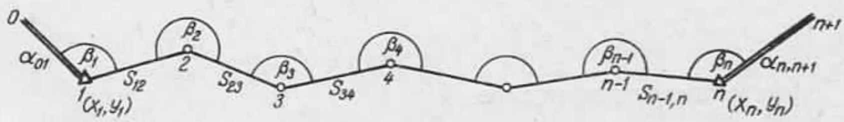

Рис. 3. Схема полигонометрического хода.

Условное уравнение абсцисс определяется формулой

$$x_n + v_{x_n} = x_1 + v_{x_1} + \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta x_{i,\,i+1} + v_{\Delta x_{i,\,i+1}}). \tag{27}$$

Если считать, что свободный член представляется выражением

$$x_1 - x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_{i,\,i+1} = w_x, \tag{28}$$

то (27) можно привести к виду

$$\sum_{i=1}^{n-1} v_{\Delta x_{i,\,i+1}} + v_{x_1} - v_{x_n} + w_x = 0. \tag{29}$$

Чтобы выразить поправки в приращения координат через поправки в измеренные углы и длины линий, дифференцируют известные равенства

$$\Delta x_{i,i+1} = s_{i,i+1} \cos \alpha_{i,i+1},$$

в результате чего получают

$$d\Delta x_{i,\,i+1} = \cos \alpha_{i,\,i+1} \cdot ds_{i,\,i+1} - \Delta y_{i,\,i+1} \frac{d\alpha_{i,\,i+1}}{\rho}. \tag{30}$$

Поскольку

$$\alpha_{i,\,i+1} = \alpha_{01} + \sum_{j=1}^{i} \beta_j - 180^\circ\, i,$$

следовательно,

$$d\alpha_{i,\,i+1} = d\alpha_{01} + \sum_{j=1}^{i} d\beta_j. \tag{31}$$

Рассматривая дифференциалы как поправки, преобразуем (29)

$$\sum_{i=1}^{n-1} \cos\alpha_{i,\,i+1} v_{s_{i,-i+1}} - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\Delta y_{i,\,i+1}\frac{1}{\rho} v_{\alpha_{01}} + \Delta y_{i,\,i+1}\frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{i} v_{\beta_j}\right) + v_{x_1} - v_{x_n} + w_x = 0 \tag{32}$$

или

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n-1} \cos\alpha_{i,\,i+1} v_{s_{i,i+1}} - \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n-1} \Delta y_{in} v_{\beta_i} - \frac{1}{\rho}\Delta y_{1n} v_{\alpha_{01}} + v_{x_1} - v_{x_n} + w_x = 0}\,. \tag{33}$$

Условное уравнение ординат. Аналогично выводу условного уравнения абсцисс можно получить условное уравнение ординат

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n-1} \sin\alpha_{i,\,i+1} v_{s_{i,\,i+1}} + \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_{in} v_{\beta_i} + \frac{1}{\rho}\Delta x_{1n} v_{\alpha_{01}} + v_{y_1} - v_{y_n} + w_y = 0}\,. \tag{34}$$

3. УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРИЛАТЕРАЦИИ

В трилатерации, которая опирается на избыточное число исходных данных, в зависимости от схемы построения могут возникать условные уравнения избыточных абсцисс, ординат, избыточных сторон, избыточных дирекционных углов, содержащие поправки в исходные данные. Рассмотрим эти условия.

Условное уравнение абсцисс. Для трилатерации, схема которой представлена на рис. 1, условное уравнение абсцисс записывается равенством (27). Если выполнить преобразования, подобные переходу от (27) к (33), можно прийти к выражению

$$\sum_{i=1}^{n-1} \cos\alpha_{i,\,i+1} v_{s_{i,\,i+1}} - \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \Delta y_{in} v_{c_i} - \frac{1}{\rho}\Delta y_{1n} v_{\alpha_{01}} + v_{x_1} - v_{x_n} + w_x = 0, \tag{35}$$

где свободный член представляет собой разность между приращением абсцисс пунктов *1* и n, вычисленным по результатам измерений, и его исходным значением, то есть

$$w_x = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_{i,\,i+1} - (x_n - x_1). \tag{36}$$

В выражении (35) поправки v_{ci} в углы c_i необходимо заменить через поправки в результаты измерения длин линий. Для этого можно использовать известную зависимость

$$v_{c_i} = \frac{\rho}{h_i}\left(v_{s_{i-1,\,i+1}} - \cos A_i v_{s_{i-1,\,i}} - \cos B_i v_{s_{i,\,i+1}}\right), \tag{37}$$

которая получается вследствие дифференцирования формулы косинуса угла c_i. Здесь h_i — высота i-вершины над основанием $s_{i-1,\,i+1}$ в i-треугольнике. Заметим, что для указанной цели могут быть использованы и другие зависимости. Однако возможность получения коэффициента выражения (37) графическим путем после некоторых преобразований делает его предпочтительным.

Подставляя (37) в (35), после приведения подобных членов получаем

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n-1}\left\{(-1)^i\frac{\Delta y_{in}}{h_i}\cos B_i+\cos\alpha_{i,\,i+1}+(-1)^{i+1}\frac{\Delta y_{i+1,\,n}}{h_{i+1}}\cos A_{i+1}\right\}v_{s_{i,\,i+1}}-\\&-\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\frac{\Delta y_{in}}{h_i}v_{s_{i-1,i+1}}-\frac{\Delta y_{1n}}{h_1}\cos A_1 v_{s_{01}}-\frac{\Delta y_{1n}}{\rho}v_{\alpha_{01}}+v_{x_1}-v_{x_n}+w_x=0\end{aligned}}\;. \tag{38}$$

Условное уравнение ординат. Таким же образом для схемы трилатерации на рис. 1 можно получить условное уравнение ординат

$$\boxed{\begin{aligned}&-\sum_{i=1}^{n-1}\left\{(-1)^i\frac{\Delta x_{in}}{h_i}\cos B_i-\sin\alpha_{i,\,i+1}+(-1)^{i+1}\frac{\Delta x_{i+1,\,n}}{h_{i-1}}\cos A_{i+1}\right\}v_{s_{i,\,i+1}}+\\&+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\frac{\Delta x_{in}}{h_i}v_{s_{i-1,i+1}}+\frac{\Delta x_{1n}}{h_1}\cos A_1 v_{s_{01}}+\frac{\Delta x_{1n}}{\rho}v_{\alpha_{01}}+v_{y_1}-v_{y_n}+w_y=0\end{aligned}}\;. \tag{39}$$

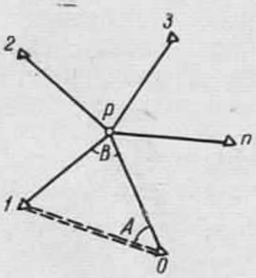

Рис. 4. Схема многолучевой линейной засечки.

Условное уравнение избыточной стороны. Условие избыточной стороны заключается в соблюдении равенства между результатом измерений избыточной стороны и соответствующим значением, вычисленным по другим измеренным сторонам с использованием координат точек. Ввиду наличия ошибок в результатах измерения сторон и в исходных данных, это условие будет выполняться лишь при уравненных элементах. Так, для трилатерации, схема которой представлена на рис. 1, условное уравнение избыточной стороны $s_{n-1,\,n+1}$ имеет вид

$$\sqrt{\{(x_{n+1}+v_{x_{n+1}})-(x_{n-1}-v_{x_{n-1}})\}^2+\{(y_{n+1}+v_{y_{n+1}})-(y_{n-1}+v_{y_{n-1}})\}^2}-$$
$$-(s_{n-1,\,n+1}+v_{s_{n-1,\,n+1}})=0. \tag{40}$$

Применяя ряд Тейлора к выражению (40), можно получить линейную форму

$$-\cos\alpha_{n-1,\,n+1}v_{x_{n-1}}-\sin\alpha_{n-1,\,n+1}v_{y_{n-1}}-v_{s_{n-1,\,n+1}}+$$
$$+\cos\alpha_{n-1,\,n+1}v_{x_{n+1}}+\sin\alpha_{n-1,\,n+1}v_{y_{n+1}}+w_s=0, \tag{41}$$

где

$$w_s=\sqrt{(x_{n+1}-x_{n-1})^2+(y_{n+1}-y_{n-1})^2}-s_{n-1,\,n+1}. \tag{42}$$

Здесь поправки $v_{x_{n-1}}$, $v_{y_{n-1}}$ необходимо выразить через поправки в измеренные линии, по которым получены приближенные координаты x_{n-1}, y_{n-1}. Для этого дифференцируем выражение

$$x_{n-1}=x_1+\sum_{i=1}^{n-2}\Delta x_{i,\,i+1}=x_1+\sum_{i=1}^{n-2}s_{i,\,i+1}\cos\alpha_{i,\,i+1}, \tag{43}$$

в результате чего получаем

$$dx_{n-1}=dx_1+\sum_{i=1}^{n-2}\left(\cos\alpha_{i,\,i+1}ds_{i,\,i+1}-\Delta y_{i,\,i+1}\frac{d\alpha_{i,\,i+1}}{\rho}\right). \tag{44}$$

Так как

$$\alpha_{i,\,i+1} = \alpha_{01} + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i C_i,$$

следовательно,

$$d\alpha_{i,\,i+1} = d\alpha_{01} + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i \, dC_i. \tag{45}$$

Если заменить дифференциалы поправками с учетом (45), (37), выражение (44) приводится к виду

$$v_{x_{n-1}} = \sum_{i=1}^{n-2} \left\{ (-1)^i \frac{\Delta y_{i,\,n-1}}{h_i} \cos B_i + \cos \alpha_{i,i+1} + (-1)^{i+1} \frac{\Delta y_{i+1,\,n-1}}{h_{i+1}} \cos A_{i+1} \right\} \times$$
$$\times v^s_{i,\,i+1} - \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i \frac{\Delta y_{i,\,n-1}}{h_i} v_{s_{i-1,\,i+1}} - \frac{\Delta y_{i,\,n-1}}{h_i} \cos A_1 v_{s_{01}} - \frac{\Delta y_{1,\,n-1}}{\rho} v_{\alpha_{01}} + v_{x_1}. \tag{46}$$

$$v_{y_{n-1}} = -\sum_{i=1}^{n-2} \left\{ (-1)^i \frac{\Delta x_{i,\,n-1}}{h_i} \cos B_i - \sin \alpha_{i,\,i+1} + (-1)^{i+1} \frac{\Delta x_{i+1,n-1}}{h_{i+1}} \cos A_{i+1} \right\} \times$$
$$\times v_{s_{i,i+1}} + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i \frac{\Delta x_{i,\,n-1}}{h_i} v_{s_{i-1,\,i+1}} + \frac{\Delta x_{1,\,n-1}}{h_i} \cos A_1 v_{s_{01}} + \frac{\Delta x_{1,\,n-1}}{\rho} v_{\alpha_{01}} + v_{y_1}. \tag{47}$$

Подставляя (46), (47) в (41), находим окончательно вид условного уравнения избыточной стороны

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n-2} \left\{ (-1)^i \frac{e_i}{h_i} \cos B_i - \cos(\alpha_{i,i+1} - \alpha_{n-1,\,n+1}) + (-1)^{i+1} \frac{e_{i+1}}{h_{i+1}} \cos A_{i+1} \right\} \times \\ &\times v_{s_{i,\,i+1}} - \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i \frac{e_i}{h_i} v_{s_{i-1,i+1}} + v_{s_{n-1,\,n+1}} - \frac{e_1}{\rho} v_{\alpha_{01}} - \frac{e_1}{h_1} \cos A_1 v_{s_{01}} - \\ &- \cos \alpha_{n-1,\,n+1} v_{x_1} - \sin \alpha_{n-1;\,n+1} v_{y_1} + \cos \alpha_{n-1,\,n+1} v_{x_{n+1}} + \\ &+ \sin \alpha_{n-1,\,n+1} v_{y_{n+1}} + w_s = 0 \end{aligned}} \tag{48}$$

где

$$e_i = \Delta x_{i,\,n-1} \sin \alpha_{n-1,\,n+1} - \Delta y_{i,\,n-1} \cos \alpha_{n-1,\,n+1}.$$

Условные уравнения избыточных сторон в $(n+1)$-лучевой линейной засечке определяемого пункта P на основании (48) имеют вид

$$\frac{e_j}{h_1} v_{s_{0P}} - \left\{ \frac{e_j}{h_1} \cos B + \cos(\alpha_{1P} - \alpha_{Pj}) \right\} v_{s_{1P}} + v_{s_{jP}} - \frac{e_j}{h_1} \cos A v_{s_{01}} - \frac{e_j}{\rho} v_{\alpha_{01}} -$$
$$- \cos \alpha_{Pj} v_{x_1} - \sin \alpha_{Pj} v_{y_1} + \cos \alpha_{Pj} v_{x_j} + \sin \alpha_{Pj} v_{y_j} + w_{s_{jP}} = 0. \tag{49}$$

Здесь

$$e_j = \Delta x_{1P} \sin \alpha_{Pj} - \Delta y_{1P} \cos \alpha_{Pj} \qquad (j = 2,\ 3 \ldots,\ n).$$

Условное уравнение дирекционных углов. Для трилатерации, схема которой представлена на рис. 1, условное уравнение дирекционных углов можно записать формулой (4), если в ней поправки

v_{c_i} в углы c_i выризить через поправки в измеренные стороны v_s посредством зависимости (37) следующим образом

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{\rho}{h_i}(v_{s_{i-1,\,i+1}}-\cos A_i v_{s_{i-1,\,i}}-\cos B_i v_{s_{i,\,i+1}})+v_{\alpha_{01}}-v_{\alpha_{n,\,n+1}}+w_\alpha=0. \quad (50)$$

После перегруппировки и объединения подобных членов, (50) преобразуется к окончательному виду

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\left(-\frac{\rho}{h_i}\cos B_i+\frac{\rho}{h_{i+1}}\cos A_{i+1}\right)v_{s_{i,\,i+1}}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{\rho}{h_i}v_{s_{i-1,\,i+1}}+\\&+\frac{\rho}{h_1}\cos A_1 v_{s_{01}}-(-1)^n\frac{\rho}{h_n}\cos B_n v_{s_{n,\,n+1}}+v_{\alpha_{01}}-v_{\alpha_{n,\,n+1}}+w_\alpha=0\end{aligned}}, \quad (51)$$

Конечно, условное уравнение дирекционных углов для трилатерации на рис. 1 образуется проще, чем условное уравнение избыточной стороны.

Работа поступила
11 мая 1970 года