УДК 528.21+517.564

А. Н. МАРЧЕНКО

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТОКСОВЫХ ПОСТОЯННЫХ ПРИ ВРАЩЕНИИ КООРДИНАТНОЙ СИСТЕМЫ

В последнее время внешний гравитационный потенциал планет V обычно представляется рядом шаровых функций

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}}, \quad (1)$$

в котором сферические функции $Y_n(\vartheta, \lambda)$ записываются в виде «игреков Лапласа»

$$Y_n = fMa^n \sum_{m=0}^{n} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta). \qquad (2)$$

В выражениях (1) и (2) r, ϑ, λ — сферические координаты точки в пространстве относительно начала 0 фиксированной в теле планеты прямоугольной системы координат; f — гравитационная постоянная; M — масса планеты; a — ее экваториальный радиус; C_{nm}, S_{nm} — гармонические коэффициенты, называемые стоксовыми постоянными; $P_n^m(\cos \vartheta)$ — присоединенные функции Лежандра.

Известно, что потенциальная функция V инвариантна относительно вращения координатной системы. Поэтому разложение (1) в иной планетоцентрической системе координат $(r, \vartheta^*, \lambda^*)$, связанной с (r, ϑ, λ) вращением, требует задания «новых» стоксовых постоянных C^*_{nm}, S^*_{nm}, также связанных со «старыми» C_{nm}, S_{nm} вращением при условии сохранения в каждой внешней точке пространства потенциала V.

Рассмотрим возможность определения «новых» коэффициентов C^*_{nm}, S^*_{nm} по постоянным C_{nm}, S_{nm} при вращении исходной координатной системы относительно ее центра 0.

Решение этой задачи может быть осуществлено либо «прямыми», либо «косвенными» методами. К первой группе можно отнести способы, устанавливающие непосредственные связи коэффициентов (C^*_{nm}, S^*_{nm}) с (C_{nm}, S_{nm}) с параметрами, характеризующими положение одной координатной системы относительно другой (например, углами Эйлера). Под «косвенными» будем впоследствии понимать способы, разрешающие проблему следующим образом: от разложения (1) внешнего гравитационного потенциала переходим к какому-то иному его представлению при условии, что коэффициенты этого «нового» представления, получаемые из C_{nm}, S_{nm}, легко преобразуются при вращении системы координат. Учитывая теперь для «новых» коэффициентов гравитационного поля вращение и делая обратный переход к разложению (1), найдем стоксовы постоянные C^*_{nm}, S^*_{nm}, уже отнесенные к «новой» системе координат.

Из методов первой группы следует отметить работу [15], в которой решение задачи дается в общем виде (без ограничений до конкретного порядка) и окончательные формулы (хотя и довольно громоздкие) записаны в форме, позволяющей их использовать без дополнительных преобразований.

Кроме того, интересный результат, носящий скорее теоретический, чем практический характер, получен для преобразования сферических гармоник [12] в виде «обобщения теоремы сложения для сферических гармоник». Однако в работах, посвященных преобразованию гармонических коэффициентов внешнего гравитационного потенциала Земли и планет находят место только «прямые» способы, а «косвенное» решение задачи не ставилось. Как пример методов второй группы можно привести лишь работу [14], в которой для преобразования гауссовых коэффициентов магнитного поля Земли используется мультипольное представление потенциала, впервые примененное в электростатике Г. Максвеллом [16] и перенесенное в геомагнетизм Н. А. Умовым [10].

Ниже даем алгоритм «косвенного» определения стоксовых постоянных C^*_{nm}, S^*_{nm} произвольного порядка и степени в «новой» системе координат по постоянным C_{nm}, S_{nm}, отнесенным к «старой» системе. Этот алгоритм основан на свойстве инвариантности максвелловых параметров сферических функций $Y_n(\vartheta, \lambda)$ и включает в себя:

а) вычисление этих параметров по «старым» C_{nm}, S_{nm};

б) преобразование системы сферических координат (переход от «старой» к «новой»), запись максвелловых параметров сферических функций в «новой» координатной системе;

в) вычисление по последним «новых» коэффициентов разложения C^*_{nm}, S^*_{nm}.

В качестве примера выполним приведение стоксовых постоянных Стандартной Земли (Ш) (отнесенных к географической системе координат) к осям естественной системы координат, то есть к главным осям инерции планеты.

По Максвеллу сферическая функция (2) записывается следующим образом [16]:

$$Y_n = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} M_n \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \ldots \partial h_n} \left(\frac{1}{r}\right), \tag{3}$$

за счет чего каждый член ряда (1) трактуется как потенциал V_n мультиполя n-го порядка — точечного объекта в начале системы координат [2]. С учетом последнего в выражении (3) $\vec{h}_i$ — оси ($i=1, 2, 3, \ldots n$) а M_n — момент сферической функции n-го порядка или гравитационного мультиполя того же порядка; $\dfrac{\partial}{\partial h_i}$ — оператор дифференцирования по направлению $\vec{h}_i$. Кроме того, точка пересечения положительного направления оси $\vec{h}_i$ со сферой называется полюсом сферической функции или полюсом соответствующего ей мультиполя. Согласно общей формуле Максвелла (не приводимой здесь) [16, 6], сферическая функция $Y_n(\vartheta, \lambda)$ n-го порядка является функцией $2n$ координат ее полюсов и момента M_n. Тогда n осей сферической функции $Y_n(\vartheta, \lambda)$ можно рассматривать как n векторов с компонентами a_i, b_i, c_i

$$\vec{h}_i = a_i \cdot \bar{i} + b_i \cdot \bar{j} + c_i \cdot \bar{k}; \quad (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \text{ — орты}), \tag{4}$$

причем сферические координаты полюсов Y_n связаны с направляющими косинусами a_i, b_i, c_i следующими соотношениями [7]:

$$\cos\theta_i = c_i;\ \operatorname{tg}\lambda_i = \frac{b_i}{a_i}. \tag{5}$$

Замечательным свойством осей $\overline{h_i}$ и момента M_n сферической функции Y_n является то, что они инвариантны относительно преобразования координатной системы. Поэтому при вращении системы координат момент M_n (скалярная величина) совсем не изменяет своего значения, а компоненты a_i, b_i, c_i осей $\vec{h}_i$ (также с учетом (5) и координаты полюсов ϑ_i, λ_i) просто меняются по известным формулам преобразования составляющих векторов [4]

$$\left.\begin{aligned} a_i^* &= a_i l_1 + b_i m_1 + c_i n_1;\\ b_i^* &= a_i l_2 + b_i m_2 + c_i n_2;\\ c_i^* &= a_i l_3 + b_i m_3 + c_i n_3, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где a_i^* b_i^* c_i^* — компоненты осей сферической функции Y_n в новой системе координат, а элементы преобразования

$$\left.\begin{aligned} &l_1=\cos\psi\cos\varphi-\cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi;\\ &\qquad m_1=\sin\psi\cos\varphi+\cos\vartheta\cos\psi\sin\varphi;\ n_1=\sin\vartheta\sin\varphi;\\ &l_2=-\cos\psi\sin\varphi-\cos\vartheta\sin\psi\cos\varphi;\\ &\qquad m_2=-\sin\psi\sin\varphi+\cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi;\ n_2=\sin\vartheta\cos\varphi;\\ &l_3=\sin\vartheta\sin\psi;\\ &\qquad m_3=-\sin\vartheta\cos\psi;\qquad n_3=\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

выражаются через углы Эйлера (ϑ — угол нутации; ψ — угол прецессии; φ — угол собственного вращения), характеризующие положение «новой» системы координат относительно «старой».

Таким образом, как только будет найден несложный способ перехода от гармонических коэффициентов C_{nm}, S_{nm} к максвелловым параметрам сферических функций и обратно, будет получена очень простая и практичная методика преобразования стоксовых постоянных при вращении координатной системы.

Существует несколько способов нахождения осей сферических функций [10, 14, 20]. Однако наиболее выгодной в практическом отношении, на наш взгляд, является методика [7], основанная на теореме Сильвестра [18, 17], так как она приводит к наиболее простому алгоритму, а именно, к решению алгебраического уравнения степени $2n$ [8, 9]

$$d_0+d_1u+d_2u^2+d_3u^3+\ldots+d_{2n-1}u^{2n-1}+d_{2n}u^{2n}=0 \tag{8}$$

для конкретной сферической функции n-го порядка. Коэффициенты разрешающего уравнения (8) находятся из следующих соотношений:

$$d_j = \sum_{m=0}^{n} D_{m,\,j}^{n};\ (0 \leqslant j \leqslant 2\,n); \tag{9}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&D^n_{m,\,2k+1}=\Phi^m_n S_{nm}\sum_{j=0}^{k}\binom{n-m}{k-j}\cdot(-1)^j\sum_{t=0}^{j}\binom{m}{2t+1}\cdot\binom{m-(2t+1)}{j-t}\cdot 2^{2t+1};\\
&(0\leqslant k\leqslant n-1;\ \ 0\leqslant j\leqslant n-1);\\
&D^n_{m,2k}=\Phi^m_n C_{nm}\sum_{j=0}^{k}\binom{n-m}{k-j}\cdot(-1)^j\sum_{t=1}^{j}\binom{m}{2t}\cdot\binom{m-2t}{j-t}\cdot 2^{2t};\\
&(0\leqslant k\leqslant n;\ \ 0\leqslant j\leqslant n);
\end{aligned}
\right\} \tag{10}
$$

$$
\Phi^m_n=\frac{(2n)!}{2^n n!\,(n-m)!}\,i^{n-m};\ \ (i=\sqrt{-1}); \tag{11}
$$

(величины вида $\binom{p}{q}$ — биноминальные коэффициенты).

Не останавливаясь подробно на сущности дальнейших вычислений, заметим лишь, что, определив по формулам (9)—(11) коэффициенты d_j и вычислив корни уравнения одним из известных методов, согласно работе [9], просто находим величины направляющих косинусов осей сферической функции n-го порядка.

Имея величины a_i, b_i, c_i (направляющих косинусы), легко вычислить момент M_n сферической функции $Y_n(\vartheta,\lambda)$ по формулам, полученным в работе [5]

$$
\left.
\begin{aligned}
M_n&=\frac{fM\cdot a^n\overline{C}_{nm}\cdot n!}{A^m_n}\sqrt{2n+1};\\
M_n&=\frac{fM\cdot a^n\overline{S}_{nm}\cdot n!}{B^m_n}\sqrt{2n+1}.
\end{aligned}
\right\} \tag{12}
$$

Здесь $\overline{C}_{nm}$, $\overline{S}_{nm}$ — стоксовы постоянные, нормированные посредством условия, что интегральное среднее от квадрата каждой сферической гармоники равно 4π, а

$$
\left.
\begin{aligned}
&2A^m_i=a_i\,[(1+\delta_{m1})\,\alpha^m_i A^{m-1}_{i-1}-\beta^m_i A^{m+1}_{i-1}]-b_i\,[\alpha^m_i B^{m-1}_{i-1}+\\
&+\beta^m_i B^{m+1}_{i-1}]+2\,c_i\,\gamma^m_i A^m_{i-1};\\
&2B^m_i=a_i\,[\alpha^m_i B^{m-1}_{i-1}-\beta^m_i B^{m+1}_{i-1}]+b_i\,[(1+\delta_{m1})\,\alpha^m_i A^{m-1}_{i-1}+\\
&+\beta^m_i A^{m+1}_{i-1}]+2\,c_i\,\gamma^m_i B^m_{i-1};\\
&(A^0_0=1,\ \ B^0_0=0{,}1\leqslant i\leqslant n)
\end{aligned}
\right\} \tag{13}
$$

и

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{i+1}^{m} &= \left[\frac{1}{2}(2-\delta_{m1})(i+m)(i+m+1)\right]^{1/2}; \\ \beta_{i+1}^{m} &= \left[\frac{1}{2}(1+\delta_{m0})(i-m)(i-m+1)\right]^{1/2}; \\ \gamma_{i+1}^{m} &= [(i-m+1)(i+m+1)]^{1/2} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

рекуррентные соотношения [13], причем δ_{mp} — символ Кронекера, а $A_n^m=0$, когда $m<0$ или $m>n$ и $B_n^m=0$, когда $m\leqslant 0$ или $m>n$.

Найдя описанным выше образом максвелловы параметры сферической функции $Y_n(\vartheta, \lambda)$ — направляющие косинусы осей a_i, b_i, c_i, а также момент M_n и определив с помощью соотношений (6) и (7) направляющие косинусы ее осей a_i^* b_i^* c_i^* в «новой» системе координат, можно перейти непосредственно к вычислению «новых» гармонических коэффициентов C_{nm}^* S_{nm}^*. Учитывая тот факт, что момент M_n сферической функции Y_n не изменяется при преобразовании координатной системы, достаточно воспользоваться формулами (12), записанными в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \overline{C}_{nm}^* &= \frac{M_n \cdot A_n^{m*}}{fM\cdot a^n\cdot n!\sqrt{2n+1}}; \\ \overline{S}_{nm}^* &= \frac{M_n \cdot B_n^{m*}}{fM\cdot a^n\cdot n!\sqrt{2n+1}}. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Здесь величины A_n^{m*} и B_n^{m*} вычисляются с помощью рекуррентных соотношений (13), в которых вместо a_i, b_i, c_i используются соответственно направляющие косинусы a_i^* b_i^* c_i^*, а коэффициенты $\overline{C}_{nm}^*$, $\overline{S}_{nm}^*$ представляют собой нормированные стоксовы постоянные в «новой» системе координат, причем

$$\left.\begin{matrix} C_{nm}^* \\ S_{nm}^* \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{(n-m)!\,(2n+1)(2-\delta_{0m})}{(n+m)!}} \left\{\begin{matrix} \overline{C}_{nm}^* \\ \overline{S}_{nm}^* \end{matrix}\right. . \quad (16)$$

Таким образом, приводимый выше алгоритм допускает простое и эффективное решение задачи нахождения гармонических коэффициентов C_{nm}^* и S_{nm}^* при вращении координатной системы.

Определенный интерес представляет вопрос о приведении стоксовых постоянных к естественной системе координат, оси которой совпадают с главными осями инерции планеты. Поэтому описываемая выше методика апробировалась на преобразовании стоксовых постоянных Стандартной Земли (Ш) [19] к главным осям инерции. Углы Эйлера при этом с достаточной степенью точности вычислялись по формулам [3]

Таблица 1

Нормированные тессеральные и секториальные гармонические коэффициенты Стандартной Земли (III), приведенные к главным осям инерции.

n	m	$\overline{C}^*_{nm}\cdot 10^6$	$\overline{S}^*_{nm}\cdot 10^6$	n	m	$\overline{C}^*_{nm}\cdot 10^6$	$\overline{S}^*_{nm}\cdot 10^6$
2	2	2,7439	0	10	10	—0,1650	—0,0168
3	1	—1,8728	—0,7303	11	1	0,0312	—0,0698
3	2	1,0509	—0,2677	11	2	0,0138	—0,0647
3	3	0,7284	—1,4302	11	3	—0,0260	0,0278
4	1	0,3760	0,5984	11	4	0,1767	—0,0851
4	2	—0,0368	0,7533	11	5	0,0594	—0,0144
4	3	—0,8216	—0,6471	11	6	0,0270	0,0634
4	4	—0,3609	0,0892	11	7	—0,1326	0,0006
5	1	0,0313	0,0911	11	8	—0,0327	—0,0341
5	2	0,7179	—0,0482	11	9	0,0626	0,0314
5	3	0,2997	0,5275	11	10	—0,0056	0,0934
5	4	—0,0193	—0,1229	11	11	0,0767	—0,0485
5	5	—0,8743	0,0958	12	1	0,0380	0,0786
6	1	0,0743	0,0014	12	2	—0,1076	—0,0083
6	2	0,2237	—0,3403	12	3	—0,1163	—0,0468
6	3	0,0173	—0,0237	12	4	—0,0717	—0,0165
6	4	0,2111	—0,2392	12	5	0,0052	—0,0863
6	5	—0,5520	0,2919	12	6	—0,0352	—0,0209
6	6	0,2630	—0,0312	12	7	0,0382	—0,0209
7	1	—0,2130	—0,1144	12	8	—0,0693	0,0071
7	2	0,0910	0,2519	12	9	—0,0700	0,0924
7	3	—0,4001	0,0910	12	10	0,0616	0,0137
7	4	0,0951	—0,3870	12	11	—0,0206	—0,0439
7	5	0,0747	—0,0566	12	12	0,0279	0,0164
7	6	—0,0881	—0,2743	13	1	—0,0167	0,0291
7	7	—0,0148	0,0218	13	2	0,0359	—0,0840
8	1	0,0019	—0,0496	13	3	0,0577	—0,0122
8	2	0,0446	0,1450	13	4	0,1117	—0,0191
8	3	0,0272	0,0984	13	5	0,0261	—0,0487
8	4	—0,3415	—0,0589	13	6	0,0111	—0,0220
8	5	0,0376	—0,1692	13	7	—0,0084	0,0773
8	6	—0,2816	—0,0953	13	8	—0,0111	—0,0094
8	7	0,2893	—0,1370	13	9	0,0441	0,0593
8	8	—0,1645	0,1021	13	10	—0,0075	—0,0044
9	1	—0,1643	—0,0863	13	11	—0,0486	0,0278
9	2	—0,0311	0,0100	13	12	0,0454	—0,0807
9	3	0,0542	0,0863	13	13	—0,0843	0,0531
9	4	0,0126	—0,0547	14	1	0,0274	—0,0469
9	5	0,0192	0,0559	14	2	—0,0274	0,0158
9	6	—0,1108	0,0497	14	3	—0,0868	—0,0501
9	7	—0,1947	0,1551	14	4	—0,0118	—0,0277
9	8	—0,1238	0,2002	14	5	—0,0562	0,0169
9	9	0,0184	0,0663	14	6	0,0279	—0,0141
10	1	—0,1015	0,0352	14	7	0,0201	—0,0682
10	2	—0,0006	—0,0738	14	8	0,0604	0,0125
10	3	0,0432	0,1453	14	9	0,0262	0,0596
10	4	0,0566	—0,0585	14	10	—0,0074	0,0442
10	5	—0,1131	0,0375	14	11	0,0789	—0,0244
10	6	0,0110	—0,0942	14	12	—0,0007	0,0310
10	7	0,0672	—0,1740	14	13	0,0184	0,0537
10	8	—0,0067	—0,0025	14	14	0,0593	0,0290
10	9	0,0588	—0,0522	15	1	—0,0327	0,0086

n	m	$\overline{C}^*_{nm}\cdot 10^6$	$\overline{S}^*_{nm}\cdot 10^6$	n	m	$\overline{C}^*_{nm}\cdot 10^6$	$\overline{S}^*_{nm}\cdot 10^6$
15	2	0,0237	—0,0659	17	3	—0,0071	0,0182
15	3	0,0734	0,0097	17	4	—0,0807	—0,0029
15	4	0,0014	0,0164	17	5	—0,0356	—0,0333
15	5	—0,0179	—0,0333	17	6	0,0169	—0,0456
15	6	0,0306	0,0098	17	7	—0,0284	—0,0248
15	7	0,0229	—0,0255	17	8	—0,0254	0,0330
15	8	—0,0192	—0,0899	17	9	—0,0416	0,0197
15	9	0,0082	0,0711	17	10	—0,0191	—0,0533
15	10	—0,0497	0,0379	17	11	—0,0436	0,0079
15	11	—0,0440	0,0089	17	12	—0,0318	—0,0058
15	12	0,0419	—0,0066	17	13	0,0220	0,0156
15	13	—0,0391	—0,0155	17	14	0,0084	—0,0036
15	14	—0,0215	0,0191	17	15	0,0133	0,0571
15	15	—0,0648	—0,0139	17	16	—0,0014	0,0284
16	1	0,0236	—0,0498	17	17	—0,0162	—0,0892
16	2	—0,0194	0,0456	18	1	0,0036	0,0781
16	3	—0,0346	—0,0421	18	2	—0,0233	0,0216
16	5	—0,0080	0,0582	18	3	0,0104	0,0392
16	6	0,0351	0,0157	18	4	0,0534	0,0029
16	7	0,0208	—0,0039	18	5	—0,0063	—0,0001
16	4	0,0024	0,0030	18	6	0,0047	0,0239
16	8	0,0903	—0,0692	18	7	—0,0081	—0,0013
16	9	—0,0444	—0,0780	18	8	—0,0072	0,0577
16	10	0,0366	—0,0166	18	9	—0,0039	—0,0033
16	11	—0,0119	0,0343	18	10	—0,0402	0,0148
16	12	—0,0157	0,0130	18	11	0,0304	0,0155
16	13	0,0229	0,0125	18	12	0,0061	—0,0067
16	14	0,0090	0,0143	18	13	—0,0156	—0,0477
16	15	—0,0375	—0,0728	18	14	—0,0240	0,0246
16	16	—0,0095	0,0274	18	15	—0,0177	—0,0415
17	1	—0,0190	0,0375	18	16	+0,0170	—0,0188
17	2	0,0057	—0,0281	18	17	0,0552	0,0207
				18	18	0,0505	—0,0009

Примечание. Приведенные в таблице стоксовы постоянные даны в системе координат, положительное направление оси X-ов которой отклонено от плоскости Гринвического меридиана на 165°04′,6 East. Для отнесения их к координатной системе, ось X-ов которой имеет долготу 14°55′,4 West, необходимо лишь у гармоник с нечетным m изменить знак на противоположный.

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{C_{21}}{S_{21}};\ \operatorname{tg}2(\psi+\varphi) = \frac{S_{22}}{C_{22}};\ \vartheta = \frac{\sqrt{C_{21}^2 + S_{21}^2}}{-C_{20}}, \tag{17}$$

причем для Земли получаем

$$\psi = 0;\ \ \vartheta = 0;\ \ \operatorname{tg}2\varphi = \frac{S_{22}}{C_{22}}, \tag{18}$$

так как $C_{21} = S_{21} = 0$.

В таблице даны рассчитанные описанным выше образом значения тессеральных и секториальных гармонических коэффициентов $\overline{C}^*_{nm}$, S^*_{nm} $(m \neq 0)$, отнесенных к естественной системе координат.

Значения же коэффициентов $\overline{C}^*_{n0}$ не приводятся здесь, так как при переходе от географической к естественной системе координат зональные гармонические коэффициенты Земли не изменяются, то есть $\overline{C}^*_{n0} = \overline{C}_{n0}$. Этот факт просто объясняется рассмотрением нескольких известных соотношений. Так согласно [1]

$$C_{n0} = \iiint_{\tau} \delta \cdot \rho^n P_n (\cos \overline{\vartheta}) d\tau \tag{19}$$

(δ — плотность планеты, $r > \rho$, $d\tau$ — элемент объема), причем в соответствии с [2]

$$P_n (\cos \vartheta) = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r} \right). \tag{20}$$

Поскольку, входящий в правую часть соотношения (19), полином Лежандра (20) включает в себя дифференцирование по направлению оси z, то, следовательно, для двух координатных систем, имеющих общее начало и совпадающие оси z, выражения (19) будут идентичны. Это и указывает на идентичность зональных гармонических коэффициентов, Земли географической и естественной систем координат, то есть в силу (18), (19), (20) $\overline{C}^*_{n0} = \overline{C}_{n0}$.

В заключение отметим, что преобразование гармонических коэффициентов при вращении координатной системы может иметь особый интерес в селенодезии.

Это обусловлено тем, что анализ существующих спутниковых определений C_{nm}, S_{nm} Луны говорит о соответствии каждого набора таких постоянных «своей», усредненной системе координат [11], что значительно усложняет сравнение разных моделей гравитационного поля Луны. Поэтому выгодно сделать приведение гармонических коэффициентов таких моделей к единой системе координат, например, использованием описываемой здесь методики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бровар В. В., Магницкий В. А., Шимбирев Б. П. Теория фигуры Земли. М., Геодезиздат, 1961.

2. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. Л., «Иностранная литература», 1952.

3. Жонголович И. Д. Потенциал земного притяжения. — «Бюлл. ин-та теоретической астрономии», 1957, т. 6, № 8.

4. Кочин Н. В. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Л.—М., ГОНТИ, 1938.

5. Марченко А. Н. О вычислении моментов гравитационных мультиполей Земли. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1977, вып. 25.

6. Мещеряков Г. А. О мультипольном представлении гравитационного потенциала. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, вып. 19.

7. Мещеряков Г. А. О нахождении полюсов сферических функций. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1976, вып. 23.

8. Мещеряков Г. А., Марченко А. Н. Об уравнении, определяющем оси сферических функций. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1976, вып. 24.

9. Мещеряков Г. А., Марченко А. Н. Нахождение осей гравитационных мультиполей Земли. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1977, вып. 25.

10. Умов Н. А. Построение геометрического образа потенциала Гаусса как прием изыскания законов земного магнетизма. Избр. соч. М.—Л., ГИТТЛ, 1950.

11. Чиканов Ю. А. Об определении параметров гравитационного поля Луны по траекторным измерениям ИСЛ. — «Астрономический вестник», 1970, т. 4, № 8.

12. Clapp R. E. Generalized Addition Theorem for Spherical Harmonics. — «Jorn. of Mathemat. Physics.», 1970, v. 11, № 1.

13. James R. W. Transformation of spherical harmonics under change of reference frame. — «Geophysical Journal R. ast. soc.», 1969, v. 17, № 3.

14. James R. W. Multipole analysist. I. Theory and geomagnetice multipoles 1965.0. — «Australian Journ. of Physic.», 1968, v. 21, № 4.

15. Levie S. L., Ir. Transformation of Potential Function Under Coordinate Rotations. — «Journ. of Astron. Science», 1971, v. 18, № 4.

16. Maxwell G. I. A treatise on Electricity and Magnetism. v. 1. 2nd edition, Oxford, 1881.

17. Ostrowski A. Die Maxwellsche Erzeugung der Kugelfunktion. — «Jahrsber. deutsch. Mathem.», 1925, v. 33.

18. Silvester J. J. Note of spherical harmonics, 1876. — «Collected Mathematical Papers», Cambridge, 1909, v. 3.

19. Smitsonian standart Earth (III), 1973, Smiths. Astroph. Observ. special report № 353.

20. Winch D. E., Slaucitajs L. Geomagnetice Multipoles 1965.0. — «Pure and Applied geophysics.», 1966, v. 65.

Работа поступила в редколлегию 22 апреля 1976 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института