РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 15

УДК 528.735.2

Ю. С. ТЮФЛИН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ ТОЧЕК ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Во многих фотограмметрических задачах необходимо знать величины дисперсий пространственных координат точек геометрической модели и степень корреляции между ними. Эти данные могут быть получены с помощью ковариационной матрицы пространственных координат после выполнения процесса взаимного ориентирования снимков. Для определения ковариационной матрицы дифференциалы пространственных координат точек геометрической модели надо выразить через дифференциалы измеренных величин, являющихся компонентами построения модели. К таким величинам относятся измеренные координаты всех точек снимков, необходимых для решения задачи взаимного ориентирования.

При использовании формул прямой засечки

$$X=\frac{Bx_t f'}{x_t f'-x'_t f},\quad Y=\frac{By_t f'}{x_t f'-x'_t f},\quad Z=\frac{Bz_t f'}{x_t f'-x'_t f} \tag{1}$$

полные дифференциалы δX_i, δY_i, δZ_i имеют вид:

$$\delta X_i=\frac{\partial X}{\partial\alpha}\delta\alpha+\frac{\partial X}{\partial\varkappa}\delta\varkappa+\frac{\partial X}{\partial\alpha'}\delta\alpha'+\frac{\partial X}{\partial\omega'}\delta\omega'+\frac{\partial X}{\partial\varkappa'}\delta\varkappa'+$$
$$+\frac{\partial X}{\partial x}\delta x+\frac{\partial X}{\partial y}\delta y+\frac{\partial X}{\partial x'}\delta x'+\frac{\partial X}{\partial y'}\delta y';$$
$$\delta Y_i=\frac{\partial Y}{\partial\alpha}\delta\alpha+\frac{\partial Y}{\partial\varkappa}\delta\varkappa+\frac{\partial Y}{\partial\alpha'}\delta\alpha'+\frac{\partial Y}{\partial\omega'}\delta\omega'+\frac{\partial Y}{\partial\varkappa'}\delta\varkappa'+$$
$$+\frac{\partial Y}{\partial x}\delta x+\frac{\partial Y}{\partial y}\delta y+\frac{\partial Y}{\partial x'}\delta x'+\frac{\partial Y}{\partial y'}\delta y';$$
$$\delta Z_i=\frac{\partial Z}{\partial\alpha}\delta\alpha+\frac{\partial Z}{\partial\varkappa}\delta\varkappa+\frac{\partial Z}{\partial\alpha'}\delta\alpha'+\frac{\partial Z}{\partial\omega'}\delta\omega'+\frac{\partial Z}{\partial\varkappa'}\delta\varkappa'+$$
$$+\frac{\partial Z}{\partial x}\delta x+\frac{\partial Z}{\partial y}\delta y+\frac{\partial Z}{\partial x'}\delta x'+\frac{\partial Z}{\partial y'}\delta y', \tag{2}$$
$$i=1,2,\ldots,N,\quad N\geqslant 5.$$

В матричной записи выражение (2) для всех точек, участвующих в процессе взаимного ориентирования, приобретает вид

$$\delta B''=A'\delta\beta+B'\delta b, \tag{3}$$

где A' — матрица порядка $3N \times 5$, строками которой являются частные производные функций (1) по элементам вектора взаимного ориентирования $\beta = [\alpha, \varkappa, \alpha', \omega', \varkappa']^T$,

$$\delta B'' = [\delta X''_1, \ldots, \delta X''_N, \delta Y''_1, \ldots, \delta Y''_N, \delta Z''_1, \ldots, \delta Z''_N]^T; \tag{4}$$

B' — матрица порядка $3N \times 4N$, строками которой являются частные производные функции (1) по всем координатам измеренных точек снимков, участвующих в процессе взаимного ориентирования;

$$B' = \begin{bmatrix} b'_{11} & \cdots & 0 & b'_{1(N+1)} & \cdots & 0 & b'_{1(2N+1)} & \cdots & 0 & b'_{1(3N+1)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & b'_{NN} & 0 & \cdots & b'_{N\cdot 2N} & 0 & \cdots & b'_{N\cdot 3N} & 0 & \cdots & b'_{N\cdot 4N} \\ b'_{(N+1)1} & \cdots & 0 & b'_{(N+1)(N+1)} & \cdots & 0 & b'_{(N+1)(2N+1)} & \cdots & 0 & b'_{(N+1)(3N+1)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & b'_{2N\cdot N} & 0 & \cdots & b'_{2N\cdot 2N} & 0 & \cdots & b'_{2N\cdot 3N} & 0 & \cdots & b'_{2N\cdot 4N} \\ b'_{(2N+1)1} & \cdots & 0 & b'_{(2N+1)(N+1)} & \cdots & 0 & b'_{(2N+1)(2N+1)} & \cdots & 0 & b'_{(2N+1)(3N+1)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & b'_{3N\cdot N} & 0 & \cdots & b'_{3N\cdot 2N} & 0 & \cdots & b'_{3N\cdot 3N} & 0 & \cdots & b'_{3N\cdot 4N} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\delta b = [\delta x_1, \ldots, \delta x_N, \delta y_1, \ldots, \delta y_N, \delta x'_1, \ldots, \delta x'_N, \delta y'_1, \ldots, \delta y'_N]^T. \tag{6}$$

Для выражения $\delta\beta$ в (3) через дифференциалы измеренных величин рассмотрим решение задачи взаимного ориентирования снимков с произвольными углами наклона при использовании способа наименьших квадратов.

Выраженное через измеренные координаты x, y, x', y' левого и правого снимков и направляющие косинусы, условие взаимного ориентирования пары снимков имеет вид

$$\begin{aligned} F_i = {} & xx'(b'_1 c''_1 - b''_1 c'_1) + xy'(b'_1 c''_2 - b''_2 c'_1) - xf'(b'_1 c''_3 - b''_3 c'_1) + \\ & + x'y(b'_2 c''_1 - b''_1 c'_2) + yy'(b'_2 c''_2 - b''_2 c'_2) - yf'(b'_2 c''_3 - b''_3 c'_2) + \\ & + x'fb''_1 c'_3 + y'fb''_2 c'_3 - ff'b''_3 c'_3 = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $b_1', \ldots, c_3'$ и $b_1'', \ldots, c_3''$ — часть направляющих косинусов взаимного ориентирования, отнесенных соответственно к левому и правому снимкам; f, f' — фокусные расстояния левого и правого снимков.

Пусть после измерения координат необходимого количества точек имеем N условий (7). Сначала с использованием приближенных значений неизвестных

$$\beta_0 = [\alpha_0, \varkappa_0, \alpha'_0, \omega'_0, \varkappa'_0]^T$$

и координат точек снимков вычисляют приближенные значения функций (7) F_0.

Для выполнения условий (7) к F_0 необходимо добавить ряд членов

$$-F_0+A\Delta\beta+B\delta b=0, \tag{8}$$

где A — прямоугольная матрица порядка $N\times5$, строками которой являются частные производные функций (7) по каждому неизвестному вектора β; B — прямоугольная матрица порядка $N\times4\,N$, строками которой являются частные производные функций (7) по каждому значению измеренных координат точек снимков.

При использовании способа наименьших квадратов, минимизируя квадратичную форму

$$(F_0-A\Delta\beta)^T(BK_0B^T)^{-1}(F_0-A\Delta\beta)=\min,$$

где K_0 — ковариационная матрица исходной информации, получаем нормальные уравнения

$$[A^TPA]\,\Delta\beta-[A^TPF_0]=0,\ P=(BK_0B^T)^{-1}, \tag{9}$$

из решения которых находим

$$\Delta\beta=[A^TPA]^{-1}[A^TPF_0]. \tag{10}$$

После определения $\Delta\beta_{\mathrm{I}}$ значение вектора β_0 уточняем

$$\beta=\beta_0+\Delta\beta_{\mathrm{I}}, \tag{11}$$

где $\Delta\beta_{\mathrm{I}}$ — вектор поправок к β_0 в первом приближении.

Если неизвестные еще не удовлетворяют условиям (7), то на заданный допуск интеративный процесс продолжается. Затем вычисляют новые A, B и F_0 и определяют поправки $\Delta\beta_{\mathrm{II}},\ldots,\Delta\beta_k$, которые суммируют с (11).

Используя (9), где A, B, F_0 и $\Delta\beta$ — матрицы и векторы последнего приближения итеративного процесса, определяем вектор погрешности решения

$$\delta\Delta\beta=[A^TPA]^{-1}[A^TP][-\delta A\Delta\beta+\delta F_0]+[A^TPA]^{-1}\delta A^TP[F_0-A\Delta\beta]. \tag{12}$$

Обозначая

$$Q=[A^TPA]^{-1},\quad C=QA^TP,\quad l=P(F_0-A\Delta\beta), \tag{13}$$

записываем

$$\delta\Delta\beta=C(-\delta A\Delta\beta+\delta F_0)+Q\delta A^Tl, \tag{14}$$

или

$$\delta\Delta\beta=\{[-\Delta\alpha C,\ -\Delta\varkappa C,\ -\Delta\alpha' C,\ -\Delta\omega' C,\ -\Delta\varkappa' C,\ C]+$$
$$+[Q_1l^T,Q_2l^T,\ldots,Q_5l^T,0]\}\cdot[\delta A_1,\delta A_2,\delta A_3,\delta A_4,\delta A_5,\delta F_0]^T, \tag{15}$$

где $Q_1, Q_2,\ldots,Q_5$ — столбцы матрицы Q; $\delta A_1, \delta A_2,\ldots,\delta A_5$ — столбцы матрицы δA; l^T — матрица-строка, транспонированная к l (13); 0 — нулевая матрица размерности $5\times N$.

Обозначая

$$(-\Delta\alpha C+Q_1l^T)=U_1,\ (-\Delta\varkappa C+Q_2l^T)=U_2,\ldots,(-\Delta\varkappa' C+Q_5l^T)=U_5,$$

записываем

$$\delta\Delta\beta=U_1\delta A_1+U_2\delta A_2+\ldots+U_5\delta A_5+C\delta F_0.$$

Выражаем столбцы матрицы δA и вектора δF_0 через дифференциалы измеренных координат точек снимков, участвующих во взаимном ориентировании,

$$\delta A_1 = \begin{bmatrix} \delta a_{11} \\ \delta a_{21} \\ \vdots \\ \delta a_{N1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} 0 \ldots 0 \frac{\partial a_{11}}{\partial y_1} 0 \ldots 0 \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1'} 0 \ldots 0 \frac{\partial a_{11}}{\partial y_1'} 0 \ldots & 0 \\ 0 \frac{\partial a_{21}}{\partial x_2} \cdots 0\, 0 \frac{\partial a_{21}}{\partial y_2} \cdots 0\, 0 \frac{\partial a_{21}}{\partial x_2'} \cdots 0\, 0 \frac{\partial a_{21}}{\partial y_2'} \cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ 0\, 0 \cdots \quad \frac{\partial a_{N1}}{\partial x_N} 0\, 0 \cdots \frac{\partial a_{N1}}{\partial y_N} 0\, 0 \cdots \frac{\partial a_{N1}}{\partial x_N'} 0\, 0 \cdots & \frac{\partial a_{N1}}{\partial y_N'} \end{bmatrix} \delta b.$$

и т. д. . . . .

Элементы вектора δF_0, выраженные через дифференциалы измеренных координат точек снимка, входят в (8).

Принимая, что

$$\delta A_1 = \Delta A_1 \delta b, \ldots, \delta A_5 = \Delta A_5 \delta b,$$

записываем

$$\delta\Delta\beta = [U_1 \Delta A_1 + \ldots + U_5 \Delta A_5 + CB]\delta b.$$

Матрицы $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_5$ имеют порядок $N \times 4N$, то есть тот же, что и B.

Обозначая сумму перед δb через U, записываем

$$\delta\Delta\beta = U\delta b, \tag{16}$$

где δb — вектор, данный в (6).

Используя (3) и (16), получаем

$$\delta B'' = (A'U + B')\,\delta b, \tag{17}$$

поэтому ковариационную матрицу пространственных координат для точек, участвующих во взаимном ориентировании, можно записать в виде

$$K_B'' = J K_0 J^T, \tag{18}$$

где K_0 — ковариационная матрица исходной информации, матрица диагональная, если измеренные координаты точек снимков являются независимо измеренными величинами; J — матрица Якоби;

$$J = [A'U + B'].$$

В подробной записи K_B'' имеет вид

$$K_B'' = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \cdots & \sigma_{x_1 x_N} & \sigma_{x_1 y_1} & \cdots & \sigma_{x_1 y_N} & \sigma_{x_1 z_1} & \cdots & \sigma_{x_1 z_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{x_N x_1} & \cdots & \sigma_{x_N}^2 & \sigma_{x_N y_1} & \cdots & \sigma_{x_N y_N} & \sigma_{x_N z_1} & \cdots & \sigma_{x_N z_N} \\ \sigma_{y_1 x_1} & \cdots & \sigma_{y_1 x_N} & \sigma_{y_1}^2 & \cdots & \sigma_{y_1 y_N} & \sigma_{y_1 z_1} & \cdots & \sigma_{y_1 z_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{y_N x_1} & \cdots & \sigma_{y_N x_N} & \sigma_{y_N y_1} & \cdots & \sigma_{y_N}^2 & \sigma_{y_N z_1} & \cdots & \sigma_{y_N z_N} \\ \sigma_{z_1 x_1} & \cdots & \sigma_{z_1 x_N} & \sigma_{z_1 y_1} & \cdots & \sigma_{z_1 y_N} & \sigma_{z_1}^2 & \cdots & \sigma_{z_1 z_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{z_N x_1} & \cdots & \sigma_{z_N x_N} & \sigma_{z_N y_1} & \cdots & \sigma_{z_N y_N} & \sigma_{z_N z_1} & \cdots & \sigma_{z_N}^2 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Матрица (19) симметричная, ее диагональные элементы являются дисперсиями пространственных координат точек геометрической модели, а недиагональные — их ковариациями.

Далее рассматриваем определение ковариационной матрицы пространственных координат точек для остальных точек геометрической модели, не участвовавших ранее при решении задачи взаимного ориентирования. Пусть требуется найти оценки точности для p точек $(j=N+$ $+1,\ N+2,\ldots,\ p)$.

Тогда, учитывая (3), записываем

$$\delta B'=A''\delta\beta+B''\delta b', \tag{20}$$

где

$$\delta B'=[\delta X_{N+1},\ldots,\delta X'_p,\ \delta Y'_{N+1},\ldots,\delta Y'_p,\ \delta Z'_{N+1},\ldots,\delta Z'_p]^T,$$

$$\delta b'=[\delta x_{N+1},\ldots,\delta x_p,\ \delta y_{N+1},\ldots,\delta y_p,\ \delta x'_{N+1},\ldots,\delta x'_p,\ \delta y'_{N+1},\ldots,\delta y'_p]^T.$$

Здесь A'' — прямоугольная матрица порядка $(3p\times5)$, аналогичная матрице в (3), B'' — прямоугольная матрица порядка $(3p\times4p)$, аналогичная матрице в (3).

Учитывая (16), записываем

$$\delta B'=A''U\delta b+B''\delta b'. \tag{21}$$

Поэтому ковариационная матрица для точек геометрической модели, не участвовавших ранее в процессе взаимного ориентирования, может быть записана в виде

$$K'_B=J'\left[\begin{array}{c:c} K_0 & 0 \\ \hdashline 0 & K'_0 \end{array}\right]J'^T, \tag{22}$$

где K_0 — матрица, входящая в (18); K'_0 — ковариационная матрица измеренных координат точек снимков с $(N+1)$ по p точки;

$$J'=[A''U \,\vdots\, B'']. \tag{23}$$

Вычисленные таким образом ковариационные матрицы пространственных координат точек геометрической модели могут быть использованы в фотограмметрических работах для следующих целей:

1. Введение весов в пространственной фототриангуляции при соединении геометрических моделей.
2. Оценка точности пространственных координат точек по всему полю геометрической модели.
3. Оценка точности определения расстояний, площадей и объемов, вычисленных с помощью точек геометрической модели.
4. Предвычисление накопления ошибок в сетях пространственной фототриангуляции, при построении которой промежуточным процессом является взаимное ориентирование снимков.

При приближенных оценках членом $\delta A\Delta\beta$, а при хорошей сходимости итеративного процесса и членом $(F_0—A\Delta\beta)$ в (12) можно пренебрегать. В этом случае вычислительные операции по определению ковариационных матриц несколько упростятся.

В ряде задач при указанных использованиях матриц (19) и (22) ковариациями пренебрегают, однако такое пренебрежение ведет к заведомо неправильным оценкам. Практически это подтверждают численные величины ковариаций, рассчитанные для нормального случая съемки со стандартным расположением точек в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. О естественных нормах для оценивания решения конечной вычислительной задачи. ЖВМ и МФ, 1969, т. 9, № 1.

2. Masson D'Autume C. de. The perspective bundle of rays as the basic element in aerial triangulation. «Photogrammetria», 1968, 23, № 2.

Работа поступила
24 марта 1970 г.