УДК 528.2+517.512.2

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ, И. Н. ШОПЯК, Ю. П. ДЕЙНЕКА

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИИ ВНУТРИ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА ЧАСТИЧНОЙ СУММОЙ ОБОБЩЕННОГО РЯДА ФУРЬЕ

При решении ряда геодезических, геофизических и других задач возникает необходимость приближенного аналитического представления изучаемой функции внутри земного эллипсоида. Например, при рассмотрении внутреннего строения Земли окончательным результатом должно быть выражение разнообразных характеристик земных недр (их плотности δ, внутреннего гравитационного потенциала W^i, ускорения силы тяжести g, температуры T, давления P и др.) через координаты точек и величины, получаемые по данным наблюдений. Естественно, что одним из наиболее эффективных является способ представления функции, основанный на использовании обобщенного ряда Фурье для функций многих переменных. Принципиальные основы такого способа очевидны [1, 2]. Однако, учитывая отсутствие в литературе конкретных формул для решения соответствующих задач даже в случае простейших областей, мы вынуждены дать общую формулу приближенного представления функции $f(x, y, z) \in L^2_\tau$ внутри эллипсоида вращения τ $\left(\text{с полярной } b \text{ и экваториальной } a \text{ полуосями и сжатием } \alpha = \frac{a-b}{a}\right)$

$$x = a \sin \vartheta \cos \lambda, \quad y = a \sin \vartheta \sin \lambda, \quad z = b \cos \vartheta \tag{1}$$

частичной суммой ее обобщенного ряда Фурье, построенного по полной ортонормированной в эллипсоиде (1) системе функций на основе исходной линейно-независимой системы одночленов

$$\{x^p y^q z^r\}, \quad (p, q, r = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Начальным этапом решения этой задачи было построение ортонормированной в τ системы функций. Ортогонализация системы (2) выполнялась применением процесса Грамма—Шмидта к системе функций $\{\varphi_i\} = 1, x, y, z, x^2, \ldots$. Из-за трудоемкости получения ортонормированной системы функций в области τ искали не ортогональные ω_{pqr}, а «квазиортогональные» полиномы Ω_{pqr}, которые при любом $m = p + q + r$ ортогональны всем полиномам низших степеней, но не ортогональны уже найденным той же степени. Разложение и по такой системе $\{\Omega_i\}$ сложно в вычислительном отношении, но в результате того, что матрица системы линейных уравнений, определяющих коэффициенты Фурье, в этом случае квазидиагональна, получаемые выражения полиномов Ω_i при каждом m симметричны и их вид не зависит от выбора порядка нумерации функций исходной системы (2), что, безусловно, облегчает вычисления.

Завершающим этапом являлось отыскание коэффициентов ряда Фурье

$$f_n(x, y, z) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{p+q+r=m} d_{pqr} \Omega_{pqr}(x, y, z) \tag{3}$$

под обычным условием

$$\varepsilon_n = \int_\tau (f - f_n)^2 \, d\tau = \min. \tag{4}$$

Из-за громоздкости выводы были выполнены при $n=0, 1, 2, 3, 4$. В результате вычислений получено, например,

$$f_4(x, y, z) = \sum_{m=0}^{4} P_m(x, y, z), \tag{5}$$

где P_m — однородные многочлены с коэффициентами, зависящими от параметров эллипсоида и от размерных степенных моментов исследуемой функции $f(x, y, z)$, которые, как известно, имеют вид

$$J_{pqr}(f) = \int_{\tau} f x^p y^q z^r d\tau. \tag{6}$$

Для удобства использования окончательных формул в выражения типа (5) были введены вместо (6) безразмерные степенные моменты функции $f(x, y, z)$

$$I_{pqr}(f) = \frac{1}{J_{000}\, a^m} J_{pqr}(f), \ (p+q+r=m) \tag{7}$$

,

где $J_{000}=\int_{\tau} f d\tau$ — размерный степенной момент нулевого порядка.

С этой же целью был сделан еще переход от прямоугольных координат x, y, z к криволинейным ρ, ϑ, λ по формулам

$$x=a\rho \sin\vartheta \cos\lambda, \quad y=a\rho \sin\vartheta \sin\lambda, \quad z=b\rho \cos\vartheta. \tag{8}$$

Введенные координаты имеют следующий смысл: λ — географическая долгота; ϑ — «полярное расстояние», связанное с обычным полярным расстоянием σ, то есть с дополнением до $\frac{\pi}{2}$ геоцентрической широты, формулой

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\sigma; \tag{9}$$

а безразмерный параметр $\rho=\text{const}$ $(0\leqslant\rho\leqslant1)$ выделяет внутри τ эллипсоид

$$\frac{x^2}{(a\rho)^2} + \frac{y^2}{(a\rho)^2} + \frac{z^2}{(b\rho)^2} = 1, \tag{10}$$

концентрический и подобный эллипсоиду (1).

С учетом указанных замен из (5) получено окончательное представление $f \in L^2_{\tau}$ частичной суммой ряда Фурье:

$$\frac{f_4(\rho, \vartheta, \lambda)}{f_{\text{ср}}} = \frac{315}{64}\left\{\frac{35}{9} I_{000} - 14\left(I_{200} + I_{020} + \frac{I_{002}}{\varkappa^2}\right) + \right.$$
$$\left. + 11\left[\left(I_{400} + I_{040} + \frac{I_{004}}{\varkappa^4}\right) + 2\left(I_{220} + \frac{I_{202}}{\varkappa^2} + \frac{I_{022}}{\varkappa^2}\right)\right]\right\} +$$

$$+\rho\frac{35}{4}\left\{\left[7I_{100}-9\left(I_{300}+I_{120}+\frac{I_{102}}{\varkappa^2}\right)\right]sl+\left[7I_{010}-9\left(I_{030}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+I_{210}+\frac{I_{012}}{\varkappa^2}\right)\right]sk+\left[7\frac{I_{001}}{\varkappa}-9\left(\frac{I_{003}}{\varkappa^3}+\frac{I_{201}}{\varkappa}+\frac{I_{021}}{\varkappa}\right)\right]c\right\}-$$

$$-\rho^2\frac{315}{32}\left\{\left[7I_{000}-18\left(3I_{200}+I_{020}+\frac{I_{002}}{\varkappa^2}\right)+11\left(5I_{400}+I_{040}+\frac{I_{004}}{\varkappa^4}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+6I_{220}+6\frac{I_{202}}{\varkappa^2}+2\frac{I_{022}}{\varkappa^2}\right)\right]s^2l^2+\left[7I_{000}-18\left(I_{200}+3I_{020}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{I_{002}}{\varkappa^2}\right)+11\left(I_{400}+5I_{040}+\frac{I_{004}}{\varkappa^4}+6I_{220}+2\frac{I_{202}}{\varkappa^2}+6\frac{I_{022}}{\varkappa^2}\right)\right]s^2k^2+$$

$$+\left[7I_{000}-18\left(I_{200}+I_{020}+3\frac{I_{002}}{\varkappa^2}\right)+11\left(I_{400}+I_{040}+5\frac{I_{004}}{\varkappa^4}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2I_{220}+6\frac{I_{202}}{\varkappa^2}+6\frac{I_{022}}{\varkappa^2}\right)\right]c^2-8\left[9I_{000}-11\left(I_{310}+I_{130}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{I_{112}}{\varkappa^2}\right)\right]s^2k^2l-8\left(9\frac{I_{101}}{\varkappa}-11\left(\frac{I_{301}}{\varkappa}+\frac{I_{103}}{\varkappa^3}+\frac{I_{121}}{\varkappa}\right)\right]scl-$$

$$\left.-8\left[9\frac{I_{011}}{\varkappa}-11\left(\frac{I_{031}}{\varkappa}+\frac{I_{013}}{\varkappa^3}+\frac{I_{211}}{\varkappa}\right)\right]sck\right\}+$$

$$+\rho^3\frac{315}{4}\left\{\left[\left(\frac{5}{3}I_{300}+I_{120}+\frac{I_{102}}{\varkappa^2}\right)-I_{100}\right]s^3l^3+\left[\left(\frac{5}{3}I_{030}+I_{210}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{I_{012}}{\varkappa^2}\right)-I_{010}\right]s^3k^3+\left[\left(\frac{5}{3}\frac{I_{003}}{\varkappa^3}+\frac{I_{201}}{\varkappa}+\frac{I_{021}}{\varkappa}\right)-\frac{I_{001}}{\varkappa}\right]c^3+$$

$$+\left[\left(3I_{210}+I_{030}+\frac{I_{012}}{\varkappa^2}\right)-I_{010}\right]s^3kl^2+\left[\left(3\frac{I_{201}}{\varkappa}+\frac{I_{021}}{\varkappa}+\frac{I_{003}}{\varkappa^3}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{I_{001}}{\varkappa}\right]s^2cl^2+\left[3\left(\frac{I_{021}}{\varkappa}+\frac{I_{201}}{\varkappa}+\frac{I_{003}}{\varkappa^3}\right)-\frac{I_{001}}{\varkappa}\right]s^2ck^2+\left[\left(3I_{120}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{I_{102}}{\varkappa^2}+I_{300}\right)-I_{100}\right]s^3k^2l^2+\left[\left(3\frac{I_{102}}{\varkappa^2}+I_{120}+I_{300}\right)-\right.$$

$$\left.-I_{100}\right]sc^2l+\left[\left(3\frac{I_{012}}{\varkappa^2}+I_{210}+I_{030}\right)-I_{010}\right]sc^2k+$$

$$\left.+4\frac{I_{111}}{\varkappa}sckl\right\}+$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+\rho^4\frac{3465}{64}\Bigg\{\Bigg[I_{000}-2\left(5I_{200}+I_{020}+\frac{I_{002}}{\varkappa^2}\right)+\left(\frac{35}{3}I_{400}+I_{040}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{I_{004}}{\varkappa^4}\right)+2\left(5I_{220}+5\frac{I_{202}}{\varkappa^2}+\frac{I_{022}}{\varkappa^2}\right)\Bigg]s^4l^4+\Bigg[I_{000}-2\left(I_{200}+\right.\\
&\quad\left.+5I_{020}+\frac{I_{002}}{\varkappa^2}\right)+\left(I_{400}+\frac{35}{3}I_{040}+\frac{I_{004}}{\varkappa^4}\right)+2\left(5I_{220}+\frac{I_{202}}{\varkappa^2}+\right.\\
&\left.+5\frac{I_{022}}{\varkappa^2}\right)\Bigg]s^4k^4+\Bigg[I_{000}-2\left(I_{200}+I_{020}+5\frac{I_{002}}{\varkappa^2}\right)+\left(I_{400}+I_{040}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{35}{3}\frac{I_{004}}{\varkappa^4}\right)+2\left(I_{220}+5\frac{I_{202}}{\varkappa^2}+\frac{I_{022}}{\varkappa^2}\right)\Bigg]c^4+2\Bigg[I_{000}-2\left(3I_{200}+\right.\\
&\quad\left.+3I_{020}+\frac{I_{002}}{\varkappa^2}\right)+\left(5I_{400}+5I_{040}+\frac{I_{004}}{\varkappa^4}\right)+6\left(3I_{220}+\frac{I_{202}}{\varkappa^2}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{I_{022}}{\varkappa^2}\right)\Bigg]s^4k^2l^2+2\Bigg[I_{000}-2\left(3I_{200}+I_{020}+3\frac{I_{002}}{\varkappa^2}\right)+\\
&\quad+\left(5I_{400}+I_{040}+5\frac{I_{004}}{\varkappa^4}\right)+6\left(I_{220}+3\frac{I_{202}}{\varkappa^2}+\frac{I_{022}}{\varkappa^2}\right)\Bigg]s^2c^2l^2+\\
&\quad+2\Bigg[I_{000}-2\left(I_{200}+3I_{020}+3\frac{I_{002}}{\varkappa^2}\right)+\left(I_{400}+5I_{040}+\right.\\
&\quad\left.+5\frac{I_{004}}{\varkappa^4}\right)+6\left(I_{220}+\frac{I_{202}}{\varkappa^2}+3\frac{I_{022}}{\varkappa^2}\right)\Bigg]s^2c^2k^2-16\Bigg[I_{110}-\\
&\quad-\left(\frac{5}{3}I_{310}+I_{130}+\frac{I_{112}}{\varkappa^2}\right)\Bigg]s^4l^3k-16\Bigg[\frac{I_{101}}{\varkappa}-\left(\frac{5}{3}\frac{I_{301}}{\varkappa}+\frac{I_{103}}{\varkappa^3}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{I_{121}}{\varkappa}\right)\Bigg]s^3cl^3-16\Bigg[I_{110}-\left(\frac{5}{3}I_{130}+I_{310}+\frac{I_{112}}{\varkappa^2}\right)\Bigg]s^4c^3l-\\
&\quad-16\Bigg[\frac{I_{101}}{\varkappa}-\left(\frac{5}{3}\frac{I_{103}}{\varkappa^3}+\frac{I_{301}}{\varkappa}+\frac{I_{121}}{\varkappa}\right)\Bigg]sc^3l-16\Bigg[\frac{I_{011}}{\varkappa}-\left(\frac{5}{3}\frac{I_{031}}{\varkappa}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{I_{013}}{\varkappa^3}+\frac{I_{211}}{\varkappa}\right)\Bigg]s^3ck^3-16\Bigg[\frac{I_{011}}{\varkappa}-\left(\frac{5}{3}\frac{I_{013}}{\varkappa^3}+\frac{I_{031}}{\varkappa}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{I_{211}}{\varkappa}\right)\Bigg]sc^3k-16\Bigg[\frac{I_{011}}{\varkappa}-\left(3\frac{I_{211}}{\varkappa}+\frac{I_{031}}{\varkappa}+\frac{I_{013}}{\varkappa^3}\right)\Bigg]s^3ckl^2-\\
&\quad-16\Bigg[\frac{I_{101}}{\varkappa}-\left(3\frac{I_{121}}{\varkappa}+\frac{I_{103}}{\varkappa^3}-\frac{I_{301}}{\varkappa}\right)\Bigg]s^3ck^2l-16\Bigg[I_{110}-\\
&\qquad-\left(3\frac{I_{112}}{\varkappa^2}+I_{130}+I_{310}\right)\Bigg]s^2c^2kl\Bigg\},
\end{aligned}\right\} \qquad (11)
$$

где для краткости обозначено:

$$\left.\begin{aligned} & s=\sin\vartheta,\ c=\cos\vartheta,\ k=\sin\lambda,\ l=\cos\lambda; \\ & \varkappa=1-\alpha;\ f_{\text{ср}}=\frac{3}{4}\,\frac{1}{\pi a^2 b}\,J_{000}(f). \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Формула (11) дает приближенное представление произвольной функции $f(x, y, z)\in L_\tau^2$ полиномом 4-й степени относительно ρ с коэффициентами, зависящими от угловых координат ϑ и λ.

Кроме параметров эллипсоида в (11) содержатся безразмерные степенные моменты функции f. Если последние даны, то формула (11) выражает решение усеченной проблемы моментов, конечно, при выполнении условий разрешимости ее. Для тех случаев, когда рассматриваемая функция внутри эллипсоида вращения зависит только от одной координаты ρ или от двух координат ρ и ϑ, использование формулы (11) предполагает предварительное усреднение ее по сфере радиуса ρ или по одной координате λ соответственно каждому рассматриваемому случаю.

Формула (11) реализует наилучшее квадратическое приближение функции f при ее аппроксимировании обобщенным полиномом вида (3). При увеличении n средняя квадратическая погрешность приближения ε_n не возрастает и, как известно [1], имеет место равномерная сходимость последовательности $\{f_n(\rho, \vartheta, \lambda)\}$ к $f(\rho, \vartheta, \lambda)$.

Если априори известна принадлежность изучаемой функции к классу непрерывных функций C (а не к классу L_τ^2), то для большинства практических приложений формула (11) приводит к вполне удовлетворительному результату. Если же получаемая при этом точность недостаточна или известно, что функция f имеет внутри эллипсоида разрывы непрерывности первого рода, то необходимо либо построить формулы типа (11) при значительно бóльших n, что, однако, не всегда будет приемлемым, так как при этом сохранится замена разрывной функции функцией явно гладкой, либо распространить эту формулу на случай разрывной функции.

Рассмотрим один из вариантов использования формулы (11) применительно к случаю, когда относительно функции f имеется дополнительная информация, согласно которой на ряде безразмерных глубин $(1-\rho_i)$ имеются k скачков h_i функции f. Тогда, вводя функцию скачков $\sum\limits_{i=1}^{k} h_i\Theta_i$, где $\Theta_i=\begin{cases}0, & \text{если } \rho<\rho_i \\ 1, & \text{если } \rho>\rho_i\end{cases}$, составим непрерывную функцию

$$f^{\text{н}}=f+\sum_{i=1}^{k} h_i\Theta_i, \qquad (13)$$

степенные моменты которой представятся в виде

$$I_{pqr}(f^{\text{н}}) = I_{pqr}(f) + \sum_{i=1}^{k} h_i \Theta_i \int_{\tau} x^p y^q z^r \mathrm{d}\tau. \tag{14}$$

Подставив выражения (13) и (14) в формулу (11), получим после ряда сложных преобразований окончательную формулу для приближенного представления такой разрывной функции f:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{f_4(\rho, \vartheta, \lambda)}{f_{\text{ср}}} &= f_4^{\text{н}}(\rho, \vartheta, \lambda) + \\
&+ \frac{1}{f_{\text{ср}}} \sum_{i=1}^{k} h_i \left\{ \frac{315}{64} \left[\frac{35}{9}(1-\rho_i^3) - \frac{42}{5}(1-\rho_i^5) + \frac{33}{7}(1-\rho_i^7) \right] - \right. \\
&- \rho^2 \frac{315}{32} \left[7(1-\rho_i^3) - 18(1-\rho_i^5) + 11(1-\rho_i^7) \right] + \\
&\left. + \rho^4 \frac{3465}{64} \left[(1-\rho_i^3) - \frac{14}{5}(1-\rho_i^5) + \frac{9}{5}(1-\rho_i^7) \right] \right\} - \frac{1}{f_{\text{ср}}} \sum_{i=1}^{k} h_i \Theta_i,
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где $f_4^{\text{н}}(\rho, \vartheta, \lambda)$ описывается правой частью формулы (11).

Легко видеть, что при $\alpha = 0$ формулы (11) и (15) доставляют выражения частичных сумм ряда Фурье функций, заданных внутри сферы, полученных нами ранее именно для этого случая и использованных при установлении распределения плотности недр Земли, Луны и планет [3—7].

Учитывая, что иногда достаточно использовать ряд Фурье при меньших n, приведем еще частичную сумму этого ряда для функций, заданных внутри эллипсоида, при $n = 2$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{f_2(\rho, \vartheta, \lambda)}{f_{\text{ср}}} &= \frac{5}{4} \left\{ 5 I_{000} - 7 \left(I_{200} + I_{020} + \frac{I_{002}}{\varkappa^2} \right) + 7 \rho^2 \left[\left(3 I_{200} + \right.\right.\right. \\
&\left. + I_{020} + \frac{I_{002}}{\varkappa^2} - I_{000} \right) s^2 l^2 + \left(I_{200} + 3 I_{020} + \frac{I_{002}}{\varkappa^2} - I_{000} \right) s^2 k^2 + \\
&+ \left(I_{200} + I_{020} + 3 \frac{I_{002}}{\varkappa^2} - I_{000} \right) c^2 + 4 \left(I_{110} s^2 kl + I_{101} scl + \right. \\
&\left.\left.\left. + I_{011} sck \right) \right] \right\} + \frac{1}{f_{\text{ср}}} \sum_{i=1}^{k} h_i \frac{5}{4} \left[5(1-\rho_i^3) - \frac{21}{5}(1-\rho_i^5) + \right. \\
&\left. + 7 \rho^2 (\rho_i^3 - \rho_i^5) \right] - \frac{1}{f_{\text{ср}}} \sum_{i=1}^{k} h_i \Theta_i.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилов В. Л. [и др.]. Математический анализ. М., Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.—Л., ГИТТЛ, 1951. Пер. с нем.

3. Мещеряков Г. А. Динамическая фигура Луны и распределение плотности лунных недр. — «Астрономический журнал», 1973, т. 50, № 1.
4. Мещеряков Г. А. О фигуре Марса. — «Астрономический журнал», 1975, т. 52, № 2.
5. Мещеряков Г. А., Голикова А. В. Исследование нового метода вычисления плотности земных недр. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1975, вып. 22.
6. Мещеряков Г. А., Голикова А. В., Дейнека Ю. П. О некоторых новых моделях Земли. — «Геофизический сборник АН УССР», 1974, вып. 60.
7. Мещеряков Г. А., Дейнека Ю. П. Использование стоксовых постоянных Земли при построении ее глобальных механических моделей. — «Studia geophysica et geodaetica», 1975, т. 19.

Работа поступила в редколлегию 12 апреля 1976 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института