

А. Л. ОСТРОВСКИЙ, Б. Л. СКУИН, А. Е. ФИЛИППОВ

## ОПЫТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ В ГОРНОМ РАЙОНЕ

Известно, что трудности учета вертикальной рефракции являются одним из основных препятствий для практического применения (даже в горных районах, не говоря уже о равнинных)

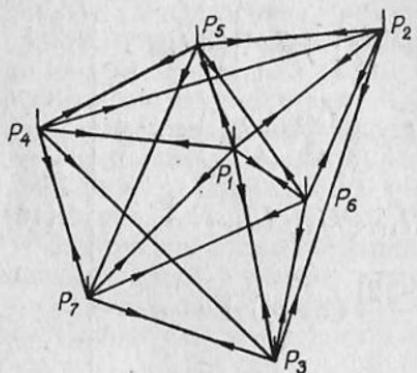


Схема геодезической сети.

чисто геометрического метода определения пространственного положения геодезических пунктов, который не требует редуцирования результатов измерений на отсчетную поверхность. Кроме того, ошибки зенитных расстояний оказывают влияние главным образом на геодезические высоты пунктов и в гораздо меньшей степени на их плановые положения. Основная цель, которую мы преследуем — дать оценку относительного влияния ошибок зенитных расстояний на вычисленные значения плановых координат  $B$ ,  $L$  геодезических пунктов.

Представленная на рисунке сеть трилатерации с измеренными на пунктах вертикальными углами и астрономическими координатами составляет основную часть эталонного геодезического полигона, созданного в 1968—1970 гг. совместными усилиями ЦНИИГАиК и геодезической лаборатории Львовского

политехнического института в горном районе Закарпатской области. Подробная характеристика полигона дана в работе [1], поэтому приводим только основные данные. Длины сторон геодезической сети колеблются от 6 до 25 км (средняя длина — 14 км). Разность отметок смежных пунктов достигает 1200 м. Средний по модулю наклон линий к горизонту составляет 1,9°.

Зенитные расстояния измеряли оптическими теодолитами ОТ-02 и ОТ-02М. В обработку включены средние значения из 15—20 приемов, выполненных в дневное время с 10 до 16 ч. Значение средней квадратической ошибки каждого из этих средних, полученное по внутренней сходимости результатов измерений по каждому направлению, колеблется от  $\pm 0,5$  до  $\pm 0,7''$ . Направления, по которым определяли зенитные расстояния, отмечены на рисунке стрелками. В зенитные расстояния введены поправки за толщину горизонтальной нити, за систематические ошибки делений вертикального круга и за влияние вертикальной рефракции. Поправки за рефракцию вычисляли с постоянным для всех направлений коэффициентом 0,16.

Длина 17 наклонных дальностей измерена светодальномером *NASM-2A* и 1 — светодальномером «Кварц». Средние квадратические ошибки значения линии из всех приемов колебались от  $\pm 3,0$  до  $\pm 6,1$  мм. Результаты измерений наклонных дальностей и зенитных расстояний приведены к центрам знаков.

Астрономические определения широт и долгот, использование которых могло бы ослабить влияние неучтеною части вертикальной рефракции и повысить точность определения геодезических координат, особенно геодезических высот, в обработку не включались.

Совместное уравнивание измеренных значений наклонных дальностей и зенитных расстояний выполнено методом условий. Из 22 условных уравнений, возникающих в сети, 15 — уравнения двугранных углов между взаимными вертикальными плоскостями (уравнения углов  $\gamma$ ) и 7 — уравнения сумм горизонтальных углов. Коэффициенты и свободные члены вычисляли по формулам, приведенным в работе [2]. Численные значения свободных членов уравнений углов  $\gamma$  и уравнений сумм горизонтальных углов находились соответственно в пределах от  $-17,9$  до  $27,6''$  и от  $-2,2$  до  $2,5''$ . При выборе необходимой комбинации независимых уравнений мы старались избегать использования слишком острых или тупых углов. Следует отметить, что введение в зенитные расстояния поправок за толщину нити и за систематические ошибки делений вертикального круга, уменьшило абсолютные значения свободных членов уравнений углов  $\gamma$  примерно на 25%.

Составляющие вектора зенитных расстояний, так же как и составляющие вектора наклонных дальностей, считались равноточными, но для установления соотношения весов результатов измерений того и другого вида нужно было определить достаточно достоверные значения соответствующих средних квадра-

тических ошибок. Мы воспользовались для этого свободными членами условных уравнений. Среднюю квадратическую ошибку  $m_z$  исправленного за влияние вертикальной рефракции зенитного расстояния вычисляли по формуле

$$m_z^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \left( \sum_{k=1}^{k=6} c_{ik}^2 \right)}{n}, \quad (1)$$

где  $w_i$  и  $\sum_{k=1}^{k=6} c_{ik}^2$  — соответственно свободный член и сумма квадратов коэффициентов при поправках зенитных расстояний в уравнении угла  $\gamma$  с номером  $i$ , а  $n$  — число условий  $\gamma$ . Аналогично по свободным членам условных уравнений сумм горизонтальных углов была вычислена средняя квадратическая ошибка  $m_s$  измеренных значений наклонных дальностей.

Достаточно строгую оценку величин  $m_z$  и  $m_s$  по формулам вида (1) можно получить в том случае, если уравнения не содержат общих поправок. Поскольку в рассматриваемой сети таких уравнений явно недостаточно, мы вынуждены были использовать все уравнения одной или другой группы. Из 15 уравнений углов  $\gamma$  и из 7 уравнений сумм горизонтальных углов найдено:  $m_z = \pm 3,5''$  и  $m_s = \pm 0,017$  м.

Значение  $m_s = \pm 0,017$  м согласуется со значением  $m_s' = \pm 0,014$ , выведенным из результатов уравнивания одних лишь наклонных дальностей [1]. Сопоставление же величины  $m_z = \pm 3,5''$  с величиной  $m_z' = \pm 0,6''$ , полученной по внутренней сходимости результатов измерений, говорит о том, что основная часть ошибки  $m_z$  обусловлена неучтенным, остаточным влиянием вертикальной рефракции, изменяющимся от направления к направлению или от пункта к пункту. Постоянная ошибка в значениях зенитных расстояний практически не может быть выявлена по свободным членам уравнений углов  $\gamma$ , так как алгебраическая сумма коэффициентов при поправках  $\delta z_{ij}$  в каждом из этих уравнений близка к нулю.

Из сопоставления ошибок  $m_z$  и  $m_s$  с учетом того, что в рассматриваемой сети среднее расстояние  $s$  между пунктами составляет 14 км, видно явное несоответствие между точностью измерения наклонных дальностей и точностью измерения вертикальных углов. Вертикальный сдвиг конечной точки линии длиной  $s$  выразится величиной  $\Delta q = sm_z / \rho'' \approx 0,24$  м, в то время как продольный составит всего лишь  $\Delta p = m_s \approx 0,02$  м. В связи с этим оценка доли влияния ошибок  $m_z$  на координаты пунктов  $B$ ,  $L$  представляет особый интерес.

При уравнивании принято:  $m_z = \pm 3,5''$ ;  $m_s = \pm 0,2$  дм. Для облегчения вычислений средней квадратической ошибке  $\mu$  единицы веса приписано значение  $0,1 m_z'' = 0,35''$ . Таким образом, результаты измерений наклонных дальностей и зенитных расстояний

введены в обработку соответственно с весами:  $p_s = 3,06$  [(" / дм)<sup>2</sup>],  $p_z = 0,01$ .

Значение средней квадратической ошибки единицы веса после уравнивания оказалось практически равным  $\mu$ , что в некоторой степени свидетельствует о правильном установлении соотношения весов. По уравненным значениям результатов измерений получены горизонтальные углы, а затем астрономические широты  $\varphi_i$ , долготы  $\lambda_i$  и астрономические азимуты  $a_{ij}$  направлений. Исходными данными при этом служили астрономические координаты  $\varphi_1, \lambda_1$  пункта  $P_1$  и астрономический азимут  $a_{1,5}$  направления  $P_1P_5$ . Геодезические координаты  $B, L, H$  вычислялись относительно референц-эллипсоида с элементами Ф. Н. Красовского, ориентированного по астрономическим данным и нормальной высоте в пункте

$$P_1(B_1 = \varphi_1, L_1 = \lambda_1, A_{1,5} = a_{1,5}, H_1 = H_1).$$

Для оценки точности уравненных значений пространственных координат пунктов были составлены необходимые весовые функции. Вычисление обратных весов выполнялось в схеме решения нормальных уравнений коррелат. В результате получены средние квадратические ошибки  $m_u, m_v, m_w$ , характеризующие линейные сдвиги пунктов вдоль координатных линий геодезической системы:  $m_u = (M + H)m_b, m_v = (N + H)\cos B m_L, m_w = m_H$ . В табл. 1 приведены для каждого пункта средние квадратические ошибки  $m_H$  уравненных значений геодезических высот, средние квадратические ошибки  $M_{s,z}$  планового положения пунктов, разности  $\Delta\xi, \Delta\eta$  составляющих относительного ускорения отвеса, полученные по вычисленным  $\varphi'$ ,  $\lambda'$  и измеренным  $\varphi, \lambda$  астрономическим координатам, а также средние квадратические значения  $m_\xi, m_\eta$  этих разностей.

Таблица 1

Ошибки пространственного положения пунктов по результатам уравнивания

Пункты	$m_H$ , м	$M_{s,z} = \sqrt{m_n^2 + m_v^2}$ , м	$\Delta\xi = \varphi' - \varphi$	$\Delta\eta = (\lambda' - \lambda) \cos\varphi$
$P_1$	$\pm 0,00$	$\pm 0,000$	$0,0''$	$0,0''$
$P_2$	$0,15$	$0,043$	$-1,1$	$3,3$
$P_3$	$0,18$	$0,059$	$0,8$	$1,1$
$P_4$	$0,14$	$0,037$	$2,7$	$-8,3$
$P_5$	$0,08$	$0,015$	$-1,7$	$4,4$
$P_6$	$0,10$	$0,038$	$-0,6$	$3,6$
$P_7$	$0,14$	$0,041$	$3,5$	$-0,9$
$m_H^{cp} = \pm 0,13$		$M_{s,z}^{cp} = \pm 0,039$	$m_\xi = \pm 2,0''$	$m_\eta = \pm 4,4''$

Как видим, влияние ошибок зенитных расстояний отразилось главным образом на точности вычисленных геодезических высот и астрономических координат. Среднее значение ошибки  $m_H$

составляет  $\pm 0,13$  м, в то время как среднее значение  $M_{s,z}$  ошибки планового положения пунктов, отражающей совместное влияние ошибок наклонных дальностей и вертикальных углов, равно  $\pm 0,039$  м. Средняя квадратическая ошибка  $m_\theta = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$  вычисленных направлений отвесных линий составляет  $\pm 4,8''$ . Результатов более высокой точности в отношении геодезических высот и направлений отвесных линий нельзя было и ожидать при точности зенитных расстояний  $\pm 3,5''$ .

Обращает на себя внимание большое по абсолютной величине значение  $\Delta\eta$  на пункте  $P_4$ . Это можно объяснить плохими условиями видимости для направлений  $P_4P_5$ ,  $P_4P_1$  и в связи с этим наличием каких-то систематических ошибок. Именно для направлений  $P_4P_5$  и  $P_4P_1$  получены из уравнивания наибольшие по абсолютной величине значения поправок зенитных расстояний  $\delta z_{4,5} = +5,6''$ ,  $\delta z_{4,1} = -7,6''$ . Поскольку азимуты этих направлений близки к  $90^\circ$ , ошибки вертикальных углов отразились главным образом на вычисленных значениях астрономических долгот пункта  $P_4$ , а следовательно, и на величине  $\Delta\eta$ . Если не принимать пункт  $P_4$  во внимание, то для величины  $m_\theta$  получим значение  $\pm 3,3''$ .

Чтобы оценить влияние ошибок зенитных расстояний на плановые координаты  $B$  и  $L$ , мы выполнили обработку результатов измерений, рассматривая настоящую сеть как обычную сеть трилатерации, причем был применен как метод развертывания, так и метод проектирования. В первом варианте редуцирование наклонных дальностей на отсчетный эллипсоид осуществлялось нормальными высотами  $H^a$ , полученными из нивелирования второго класса и гравиметрических измерений. Во втором варианте использовались геодезические высоты  $H = H^a + \zeta$ . Высоты квазигеоида  $\zeta$  определяли из астрономического нивелирования, предположив, что относительные уклонации отвеса между ближайшими смежными пунктами изменяются линейно. Использовались уклонации отвеса, вычисленные по наблюденным астрономическим координатам. Предположение о линейном изменении уклонений отвеса не вполне соответствовало действительности, однако относительно небольшие величины невязок в замкнутых полигонах свидетельствовали о том, что главная часть превышений квазигеоида была вычислена правильно. Превышение квазигеоида между пунктом  $P_1$  и смежными пунктами достигали 20 см, что для длин линий с большими наклонами к горизонту привело к поправкам порядка 1 см, сравнимым с точностью измерений.

Уравнивание выполнялось в геодезических координатах методом необходимых неизвестных. В качестве приближенных значений необходимых неизвестных были приняты значения геодезических координат  $B$ ,  $L$ , полученные из совместной обработки наклонных дальностей и зенитных расстояний. Поэтому искомые поправки  $\delta B$ ,  $\delta L$  можно было рассматривать как величины, характеризующие в известной степени влияние ошибок зенитных расстояний на плановые координаты.

.... Составляя уравнения погрешностей, мы исходили из уравнений вида

$$v_{ij} = -\cos A_{ij} \sin Z_{ij} \delta u_i - \sin A_{ij} \sin Z_{ij} \delta v_i - \cos Z_{ij} \delta w_i - \\ - \cos A_{ji} \sin Z_{ji} \delta u_j - \sin A_{ji} \sin Z_{ji} \delta v_j - \cos Z_{ji} \delta w_j + (s_{ij}^b - s_{ij}^n), \quad (2)$$

которые соответствуют пространственной обработке трилатерации [4]. В выражении (2)  $s_{ij}^n$  — измеренное значение наклонной дальности, а  $s_{ij}^b$  — вычисленное по приближенным значениям необходимых неизвестных. Поправки  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  связаны с поправками  $\delta B$ ,  $\delta L$ ,  $\delta H$  геодезических координат формулами

$$\delta u = (M+H) \delta B, \quad \delta v = (N+H) \cos B \delta L, \quad \delta w = \delta H.$$

Если значения  $s_{ij}^b$  получить из решения пространственных обратных геодезических задач с использованием системы приближенных значений необходимых неизвестных  $B$ ,  $L$ ,  $H$ , считая значения геодезических высот  $H$  твердыми (в нашем случае равными  $H^a$  или  $H^a + \zeta$ ), то в уравнениях (2) следует положить  $\delta w_i = \delta w_j = 0$ , и они примут вид

$$v_{ij} = -\cos A_{ij} \sin Z_{ij} \delta u_i - \sin A_{ij} \sin Z_{ij} \delta v_i - \\ - \cos A_{ji} \sin Z_{ji} \delta u_j - \sin A_{ji} \sin Z_{ji} \delta v_j + (s_{ij}^b - s_{ij}^n). \quad (3)$$

Решение уравнений (3) даст практически тот же результат, что и решение уравнений для длин линий, редуцированных на поверхность отсчетного эллипсоида, поскольку наклоны линий к горизонту в наземных геодезических сетях невелики. Составление и решение уравнений (3) с вычислением матрицы весовых коэффициентов неизвестных выполнено на ЭВМ по программе, записанной на эталонном языке Алгол-60.

Таблица 2  
Результаты различных вариантов уравнивания (м)

Пункты	Расхождения в координатах пунктов в смысле „метод проектирования минус совместная обработка”		Расхождения в координатах пунктов в смысле „метод проектирования минус метод развертывания”		Средние квадратические ошибки положения пунктов	
	$\delta u^P$	$\delta v^P$	$\delta u^n - \delta u^P$	$\delta v^n - \delta v^P$	метод проектирования	метод развертывания
$P_2$	0,008	-0,011	-0,001	0,010	$\pm 0,030$	$\pm 0,029$
$P_3$	0,003	-0,009	0,001	0,010	0,042	0,040
$P_4$	0,012	-0,003	-0,005	0,004	0,027	0,026
$P_5$	0,003	-0,001	-0,002	0,001	0,011	0,010
$P_6$	0,002	-0,003	0,005	0,006	0,028	0,027
$P_7$	-0,001	-0,013	-0,006	0,007	0,030	0,028
$(M_s^n)_{cp} = \pm 0,028 \quad (M_s^p)_{cp} = \pm 0,027$						

Анализ данных табл. 2 показывает, что различия в значениях плановых координат, соответствующих методу развертывания и методу проектирования, оказались несущественными. Естественно, этот вывод нельзя распространять на более обширные сети, так как эти различия носят систематический характер. Незначительны и расхождения  $\delta u^n$ ,  $\delta v^n$  в координатах пунктов, полученных из совместного уравнивания наклонных дальностей и зенитных расстояний и из уравнивания одних лишь наклонных дальностей.

Следует, однако, иметь в виду, что сами по себе численные значения величин  $\delta u^n$ ,  $\delta v^n$  не могут в достаточной мере охарактеризовать степень влияния ошибок зенитных расстояний, поскольку являются следствием единственной, конкретной реализации неизвестных нам истинных ошибок измерений. Мы полагаем, что более достоверную оценку влияния ошибок зенитных расстояний на плановые координаты можно сделать с помощью формулы

$$M_z = \sqrt{M_{s,z}^2 - M_s^2}, \quad (4)$$

где  $M_z$  — средняя квадратическая ошибка положения пункта, обусловленная влиянием ошибок зенитных расстояний. Полагая (на основании данных табл. 1 и 2), что  $M_{s,z} = M_{s,z}^{cp} = \pm 0,039$  м и  $M_s = (M_s^n)_{cp} = \pm 0,028$  м, получим  $M_z = \pm 0,027$  м.

Как видим, несмотря на более низкую точность вертикальных углов по сравнению с точностью наклонных дальностей, влияние ошибок того и другого рода на координаты  $B$ ,  $L$  в рассматриваемом случае оказалось одного порядка.

Относительное влияние ошибок зенитных расстояний на плановые координаты с достаточной для расчетов точностью можно представить в виде

$$\frac{M_z}{M_s} = k \frac{m_z''}{\frac{m_s}{s} \rho''} \beta_{cp}, \quad (5)$$

где  $\beta_{cp}$  — выраженный в радианах средний по модулю наклон линий к горизонту,  $k$  — некоторый коэффициент, численное значение которого зависит от геометрии сети и от количества избыточных исходных данных того или другого вида. По подсчетам А. Е. Филиппова [3],  $k \approx 2,5$  для свободного ряда пространственных треугольников, близких к равносторонним. В нашем случае имеем  $M_z = 0,027$  м,  $M_s = 0,028$  м,  $m_z'' = 3,5''$ ,  $m_s/s = 1,4 \cdot 10^{-6}$ ,  $\beta_{cp}^\circ = 1,9^\circ$ , следовательно  $k = 2,4$ .

Используя это значение коэффициента  $k$ , можно по формуле (5) рассчитать необходимую точность зенитных расстояний при заданной величине отношения  $M_z/M_s$  и известных значениях  $m_s/s$  и  $\beta_{cp}$ . Поставив, например, условие  $M_z = 0,5 M_s$ , придем к выводу, что для его выполнения зенитные расстояния в рассматриваемом случае достаточно знать с точностью до  $2''$ .

Мы полагаем, что полученные нами результаты свидетельствуют о благоприятных перспективах применения чисто геометрического метода определения координат опорных пунктов специальных сетей, поскольку по имеющимся данным можно ожидать в ближайшее время заметное повышение точности измерений зенитных расстояний.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вировец Ю. Б., Наумов Я. В., Островский А. Л. Эталонный геодезический полигон в горном районе. — «Геодезия и картография», 1971, № 12.
2. Филиппов А. Е. Условные уравнения в сети пространственной трилатерации. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1969, вып. 9.
3. Филиппов А. Е. О влиянии ошибок зенитных расстояний на плановые координаты пунктов пространственной триангуляции. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1975, вып. 22.
4. Wolff H. Die Gleichungen der dreidimensionalen Geodäsie in elementarer Darstellung. — «Zeitschrift für Vermessungswesen», 1963, № 6.

Работа поступила в редакцию 22 апреля 1976 года. Рекомендована кафедрой высшей геодезии и астрономии Львовского политехнического института