УДК 528.061.2:528.34

Р. Г. ПИЛИПЮК

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВЫСОТ ИЗ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ

Как известно, приращение геодезической высоты можно найти из формулы

$$h_{\text{г}} = h_{\text{Н}} + \Delta\zeta,$$

где $h_{\text{Н}}$ — приращение нормальной высоты, а $\Delta\zeta$ — приращение высот квазигеоида над референц-эллипсоидом.

Используя метод тригонометрического нивелирования, вычисляют или приращение геодезических высот $h_{\text{г}}$, или приращение нормальных высот $h_{\text{Н}}$. Строгий вывод формулы тригонометрического нивелирования для определения приращения геодезических высот $h_{\text{г}}$ предложен в работе [1]. Однако для нахождения приращений высот по полученной в этой работе формуле

$$h_{\text{г}} = H_2 - H_1 = \frac{S_{12}}{2}(\cos\beta_{12} - \cos\beta_{21}) - \frac{S_{12}}{2}(\vartheta_1 \sin\beta_{12} - \\ - \vartheta_2 \sin\beta_{21}) + (N_2 - N_1 + H_2 - H_1)\sin^2\frac{\psi}{2}$$

необходимо знать параметры референц-эллипсоида, геодезические и астрономические координаты нивелируемых точек, так как N — радиус кривизны нормального сечения эллипсоида в первом вертикале; ϑ — уклонение отвесных линий, а ψ — угол между нормалями к референц-эллипсоиду в соответствующих точках.

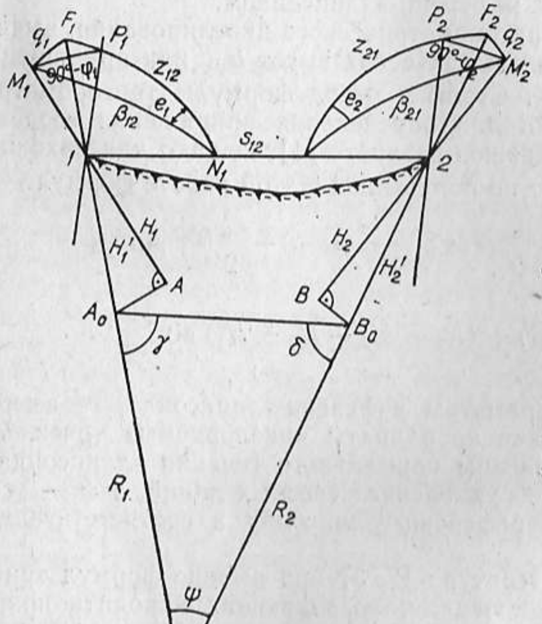
В современной литературе [2, 3] при выводе формул тригонометрического нивелирования, позволяющих находить приращения геодезических или нормальных высот, обычно предполагают, что отвесные линии пересекаются, а участок поверхности относимости, соответствующей линии местности S, — часть окружности радиуса R. Как правило, авторы не приводят формул, позволяющих математически точно оценить степень влияния этих допущений на определенные приращения высот. В результате формулы передачи высот тригонометрическим нивелированием, выведенные с учетом этих предположений, получаются нестрогими. Если же рассматривать триангуляционную сеть как пространственную, то появляется возможность вывести строгую формулу тригонометрического нивелирования для вычисления приращений нормальных высот, а также получить вспомогательные математические выражения, позволяющие оценивать влияние упомянутых выше предположений на результаты нивелирования.

При выводе формулы будем считать зенитные расстояния свободными от влияния вертикальной рефракции. Через точки

1 и *2* (см. рисунок) проводим линии $P_1 1$ и $P_2 2$, параллельные оси вращения Земли, и линии $P_1 1$ и $P_2 2$, а также плоскость, проходящую через сторону *1—2*. Спроектируем отвесные линии на эту плоскость, а на их проекциях получим отрезки $1A_0$ и $2B_0$:

$$1\,A_0 = H_1' = \frac{H_1}{\cos q_1}; \qquad 2\,B_0 = H_2' = \frac{H}{\cos q_2}. \quad (1)$$

Углы между отвесными линиями и плоскостью, на которую они спроектированы, обозначим через q_1 и q_2. Величины этих



Передача высот в пространственной триангуляции:

M_1A и M_2B — отрезки отвесных линий в точках *1* и *2* соответственно; β_{12} и β_{11} — зенитные расстояния в этих точках; s_{12} — расстояние между точками по прямой: $1—A=H_1$ и $2—B=H_2$ — высоты точек над уровенной поверхностью, принятой за исходную для отсчета высот.

углов могут лежать в пределах от 0 до 90° и, в основном, зависят от широты места и азимута линии *1—2*. Чтобы избежать значений углов q, близких к 90°, в близэкваториальной зоне, проектирование отвесных линий в этом случае целесообразно проводить на плоскость, перпендикулярную названной.

Расстояние между точками A_0 и B_0 (см. рисунок) обозначим через $\bar{s}_{12}$, а углы, образованные проекциями отвесных линий и направлением A_0B_0, соответственно через γ и δ.

Используя методику вывода формулы, предложенную в работе [1], найдем проекцию четырехугольника $1A_0B_0 2$ на линию F_1O и на F_2O:

$$H_1' + s_{12}\cos\gamma = H_2'\cos\psi - s_{12}\cos z_{12};$$

$$H_2'+s_{12}\cos\delta=H_1'\cos\psi-s_{12}\cos z_{21}.$$

Из равности этих уравнений находим

$$H_2'-H_1'=\frac{s_{12}}{2\cos^2\frac{\psi}{2}}(\cos z_{12}-\cos z_{21})-\frac{s_{12}}{(2\cos^2\frac{\psi}{2}}(\cos\delta-\cos\gamma)\cdot$$

Учитывая, что $\psi=(z_{21}+z_{12})-180^\circ$ и $\delta+\gamma=180^\circ-\psi$, после некоторых преобразований получим

$$H_2'-H_1'=h_{12}^1=s_{12}\frac{\sin\frac{1}{2}(z_{21}-z_{12})}{\sin\frac{1}{2}(z_{21}+z_{12})}+s_{12}\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(z_{21}+z_{12})}. \quad (2)$$

Подставляя зависимости (1) в (2), записываем

$$H_2=H_1\frac{\cos q_2}{\sin q_1}+s_{12}\cos q_2\frac{\sin\frac{1}{2}(z_{21}-z_{12})}{\sin\frac{1}{2}(z_{21}+z_{12})}+\bar{s}_{12}\cos q_2\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(z_{21}+z_{12})}. \quad (3)$$

Преобразуем первый член правой части формулы (3):

$$H_1\frac{\cos q_2}{\cos q_1}=H_1\frac{\cos(q_2-q_1+q_1)}{\cos q_1}=H_1\cos(q_2-q_1)-H_1\sin(q_2-q_1)\operatorname{tg}q_1.$$

Обозначая $q_2-q_1=\Delta q$ и учитывая, что Δq в смежных пунктах триангуляции выражается в секундах и в редких случаях может достигать минуты, принимаем $\cos\Delta q=1$, а $\sin\Delta q=\frac{\Delta q''}{\rho''}$. Упрощения, сделанные нами, не окажут заметного воздействия на точность определяемого превышения. Так, если $\Delta q=60''$, а $H_1=10$ км, то ошибка в высоте точки H_2, вызванная принятыми упрощениями, будет меньше 0,5 мм и ею можно пренебречь.

С учетом изложенного выше формулу (3) запишем:

$$H_2-H_1=s_{12}\cos q_2\frac{\sin\frac{1}{2}(z_{21}-z_{12})}{\sin\frac{1}{2}(z_{21}+z_{12})}-H_1\operatorname{tg}q_1\frac{\Delta q''}{\rho''}+$$

$$+\bar{s}_{12}\cos q_2\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(z_{21}+z_{12})}. \quad (4)$$

Анализ третьего члена формулы (4) показывает, что разность углов δ и γ выражается в секундах, поэтому примем

$$\sin\frac{1}{2}(\delta-\gamma)=\frac{(\delta-\gamma)''}{2\rho''}.$$

Таким образом, окончательный вид формулы тригонометрического нивелирования такой:

$$H_2-H_1=h_{12}=s_{12}\cos q_2\frac{\sin\frac{1}{2}(z_{21}-z_{12})}{\sin\frac{1}{2}(z_{21}+z_{12})}-H_1\operatorname{tg} q_1\frac{\Delta q''}{\rho''}+$$

$$+\bar{s}_{12}\cos q_2\frac{(\delta-\gamma)''}{2\rho''}. \qquad (5)$$

Или с учетом (1)

$$h_{12}=h'\cos q_2-H_1\operatorname{tg} q_1\frac{\Delta q''}{\rho''}. \qquad (6)$$

Формулы (5) и (6) позволяют вычислять высоты точек в сети пространственной триангуляции.

Величины z и q находим из решения прямоугольных сферических треугольников $M_1F_1N_1$ и $M_2F_2N_2$:

$$\sin q_1=\sin\beta_{12}\sin e_1;\qquad \sin q_2=\sin\beta_{21}\sin e_2;$$

$$\operatorname{tg} z_{12}=\operatorname{tg}\beta_{12}\cos e_1;\qquad \operatorname{tg} z_{21}=\operatorname{tg}\beta_{21}\cos e_2,$$

где e — величина, зависящая как от элементов пространственной сети — горизонтальных углов и зенитных расстояний, так и от координат пунктов и ориентирования линии нивелирования. Формулы для вычисления e приведены в работе [4].

Анализируя формулу (5), нетрудно установить, что первые два члена ее правой части учитывают (в определяемом превышении) как продольное, так и поперечное взаимное уклонение отвесных линий, то есть находим превышение относительно реальных направлений отвесных линий в смежных пунктах сети. Отсюда следует, что при использовании формулы (5) исключается необходимость введения дополнительных поправок в определяемые превышения за нелинейность изменений уклонений отвесных линий от пункта к пункту.

Поправочный член формулы (5) $\bar{s}_{12}\cos q_2\,\frac{\delta-\gamma''}{2\rho''}$ характеризует влияние на вычисляемое превышение отступлений уровенной поверхности отсчета высот от поверхности сферы. Действительно, предположив, что высоты отсчитываются от сферической поверхности, мы получим $\delta=\gamma$ и значение третьего члена становится равным нулю.

Для нахождения расстояния между точками A_0 и B_0—$\bar{s}_{12}$, которое входит в формулу (5), решаем треугольники $1O2$ и A_0OB_0 (см. рисунок) по теореме косинусов:

$$s_{12}^2 = (R_1 + H_1')^2 + (R_2 + H_2')^2 - 2(R_1 + H_1')(R_2 + H_2')\cos\psi;$$

$$\bar{s}_{12}^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos\psi,$$

где $A_0O = R_1$ и $B_0O = R_2$, и после ряда преобразований находим

$$\bar{s}_{12}^2 = \frac{s_{12}^2 - h_{12}^{12} - 2h_{12}'\Delta R_{12} + \dfrac{2H_1'\Delta R_{12}^2}{R_1} + \dfrac{R_{12}'\Delta R_{12}^2}{R_1}}{\left(1 + \dfrac{H_1'}{R_1}\right)\left(1 + \dfrac{H_2'}{R_1 + \Delta R_{12}}\right)}, \qquad (7)$$

где $h_{12}' = H_2' - H_1'$ и $\Delta R_{12} = R_2 - R_1$.

Нетрудно заметить, что формула (7) является более общим выражением для вычисления длины хорды при редукции расстояний, измеренных свето- и радиодальномерами. Вычисление $\bar{s}$ по формуле (7) можно проводить по методу последовательных приближений. Поскольку ΔR и h' не оказывают заметного влияния на $\bar{s}$, то для вычислений, выполняемых в первом приближении, допустимо принимать $\bar{s} = s$.

Чтобы определить ΔR, рассмотрим на рисунке треугольник $1O2$. По теореме синусов записываем: $\dfrac{2O}{1O} = \dfrac{\sin z_{12}}{\sin z_{21}}$. Составив производную пропорцию по этому уравнению, получим:

$$\frac{2O - 1O}{1O + 2O} = \frac{(R_2 + H_2') - (R_1 + H_1')}{(R_1 + H_1') + (R_2 + H_1')} = \frac{\sin z_{12} - \sin z_{21}}{\sin z_{12} + \sin z_{21}}. \qquad (8)$$

Преобразовав уравнение (8), устанавливаем, что

$$\Delta R_{12} = -\left[\frac{2(R_1 + H_1')\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(z_{12} + z_{21})}{1 + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(z_{12} + z_{21})} + h_{12}'\right]. \qquad (9)$$

Решив по аналогичной методике треугольник A_0OB_0, находим разность углов γ и δ:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma - \delta}{2} = \frac{\Delta R_{12}}{(R_1 + R_2)\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}. \qquad (10)$$

Формулы (5), (6), (7), (9), (10) являются решением поставленной задачи.

Таким образом, можно считать, что полученная формула (5), или (6), является определенным уточнением существующих формул тригонометрического нивелирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Теория высот в гравитационном поле Земли. М., «Недра», 1972.
2. Изотов А. А., Пеллинен Л. П. Исследование земной рефракции и методов геодезического нивелирования. — «Тр. ЦНИИГАиК», 1955, вып. 102.
3. Красовский Ф. Н. Избранные сочинения. Т. 3. М., Геодезиздат, 1955.
4. Пилипюк Р. Г. Вычисление астрономических координат и азимута в пространственной триангуляционной сети. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1970, вып. 12.

Работа поступила в редколлегию 29 марта 1976 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Ивано-Франковского института нефти и газа.