РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1971 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 14

УДК 528.181

Ш. Е. КУЗНЕЦОВА

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ВЫПОЛНЕНИЯ УРАВНИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

При уравнивании равноточных величин, связанных условиями, в ряде задач геодезии и аналитической фотограмметрии возникают системы с большим количеством условных уравнений поправок. В этом случае появляется проблема операций с матрицами очень больших порядков при получении системы нормальных уравнений коррелат, при решении системы и определении поправок к уравниваемым величинам. Разрешение проблемы связано с большими трудностями даже при использовании современных ЭВМ, обладающих значительным объемом памяти. К тому же такие операции приводят к большим накоплениям ошибок округления, часто искажающим физический смысл поставленных задач.

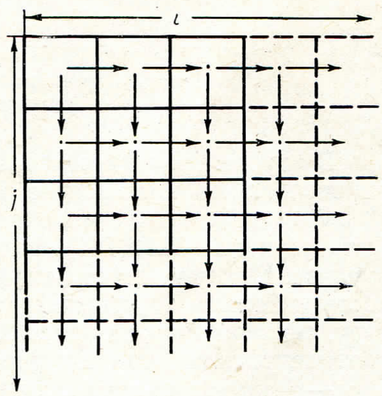

Рис. 1. Схема уравниваемой сети с указанием геометрических связей.

Мы рассмотрим способ, который позволит избежать указанных трудностей для одного частного случая, когда матрица коэффициентов системы уравнений поправок состоит из некоторых комбинаций отрицательных и положительных единиц и нулей. Предлагаемый способ позволяет получать подматрицы малого порядка, составляющие матрицу, обратную матрице коэффициентов системы нормальных уравнений, из простой рекуррентной зависимости, минуя процессы составления системы нормальных уравнений коррелат и непосредственного обращения матрицы большого порядка. Использование этой рекуррентной зависимости требует лишь одного обращения подматрицы малого порядка и операций перемножения подматриц такого же порядка.

Кроме того, опишем способ непосредственного определения вектора поправок к уравниваемым величинам без использования процесса умножения матрицы на вектор коррелат.

Пусть сеть, состоящая из n фигур $(n=ij)$, имеет вид, показанный на рис. 1. Если уравниваемые величины получаются при использовании всех геометрических связей, имеющихся в данной сети и обозначенных на рис. 1 стрелками, тогда матрица A коэффициентов системы условных уравнений поправок

$$AV+W=0 \tag{1}$$

имеет вид, показанный на рис. 2. При этом число условий $c=(j-1)\times\times(i-1)$, а число определяемых поправок $r=i(j-1)(i-1)$. При уравнивании по способу коррелат имеем

$$AA'K+W=0; \tag{2}$$

$$V=A'K, \tag{3}$$

где A' — транспонированная к A матрица. При непосредственном определении вектора коррелат как

$$K=-(AA')^{-1}W \tag{4}$$

необходимо перемножение матриц A и A', после чего система (2) может быть решена любыми известными прямыми или интеративными методами, включая методы обращения матрицы (AA').

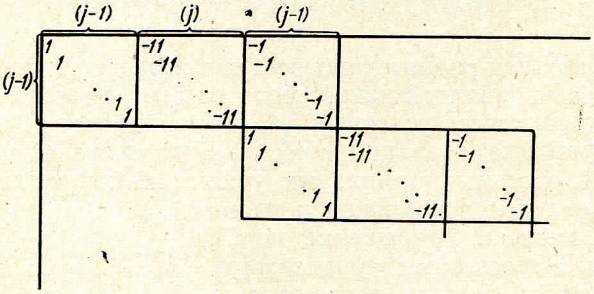

Рис. 2. Структура матрицы A коэффициентов системы условных уравнений поправок.

В случае уравнивания в блоке фототриангуляции величин, принятых за независимо измененные и равноточные, для блока, состоящего из 20 маршрутов по 20 моделей в каждом, размерность матриц A может быть порядка (381×760). И тогда указанные операции провести гораздо труднее. Однако для структуры матрицы A (рис. 2) существует возможность избежать трудностей, так как матрица (AA') всегда имеет структуру, показанную на рис. 3. Очевидно, что матрица (AA') является квазиленточной отрицательно модулированной матрицей. Подматрицы a и $-E$ имеют размерность $(j-1)\times(j-1)$. $-E$ — отрицательная единичная матрица, а a содержит $(j-2)$ — перекрывающиеся элементарные матрицы $\alpha=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Ясно, что при такой однообразной структуре нет необходимости определять матрицу коэффициентов системы нормальных уравнений как произведение AA'. Рассмотрим вид обратной матрицы $(AA')^{-1}$, чтобы найти пути непосредственного определения такой матрицы без обычного процесса обращения. При этом будем рассматривать матрицу $(AA')^{-1}$ как симметричную блочную матрицу, состоящую из $(i-1)\times(i-1)$ клеток b размером $(j-1)\times(j-1)$. Так как

$$(AA')(AA')^{-1}=(AA')^{-1}(\widetilde{AA'})=E,$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots b_{1(i-1)} \\ b_{21} & b_{22} & \dots b_{2(i-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{(i-1)1} & b_{(i-1)2} & \dots b_{(i-1)(i-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -E & & & \\ -E & a & -E & & \\ & -E & a & -E & \\ & & & & \\ & & & -E & a \end{bmatrix} = E, \tag{5}$$

имеем

$$\begin{cases} b_{1\,(i-2)} = b_{1\,(i-1)}\,a \\ b_{1\,(i-3)} = b_{1\,(i-2)}\,a - b_{1\,(i-1)}. \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{12} = b_{13}a - b_{14} \\ b_{11} = b_{12}a - b_{13} \\ b_{11}a - b_{12} = E \end{cases} \qquad (6)$$

Очевидно, что каждый элемент b_{1l} первой строки матрицы $(AA')^{-1}$ может быть получен по следующей рекуррентной формуле

$$b_{1l} = b_{1(l+1)}a - b_{1(l+2)}. \qquad (7)$$

И тогда, если мы найдем крайний элемент $b_{1(i-1)}$ строки, то сможем определить все элементы строки. Заметим, что любой элемент b_{il} может быть выражен как

$$b_{1l} = b_{1(i-1)}Q_l(a), \qquad (8)$$

где $Q_l(a)$ — некоторый многочлен от a (a — известный уже элемент матрицы $(AA')^{-1}$; при этом $Q_l = Q_{(l+1)}a - Q_{(l+2)}$. Тогда первая блочная строка имеет вид: $b_{1(i-1)}[Q_1\ Q_2\ \ldots\ E]$. Так как согласно (6) $b_{1(i-1)}Q_0 = b_{11}a - b_{12} = E$, то $b_{1(i-1)} = Q_0^{-1} = (Q_1a - Q_2)^{-1}$. Таким образом, нахождение исходного элемента $b_{1(i-1)}$ осуществляется по той же рекуррентной зависимости (7). Используя зависимости (5), нетрудно показать, что для верхней треугольной части матрицы $(AA')^{-1}$ зависимость (7) сохраняется для всех строк и столбцов, и кроме того, для матрицы $(AA)^{-1}$ имеет место равенство

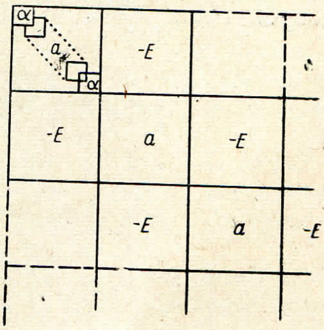

Рис. 3. Структура матрицы (AA) коэффициентов системы нормальных уравнений коррелат.

$$bkl = blk = b\,(i-l)\,(i-k) = b\,(i-k)\,(i-l), \qquad (9)$$

что дает, например, возможность вычислять матрицу $(AA')^{-1}$ по схеме, изображенной на рис. 3.

Итак, для получения обратной матрицы $(AA')^{-1}$ достаточно определить сначала матрицу Q_0 размерности $(j-1)\times(j-1)$ по рекуррентной зависимости (7) как $Q_{(i-1)} = E$; $Q_{(i-2)} = Q_{(i-1)}a - 0$; $Q_{(i-3)} = Q_{(i-2)}a - Q_{(i-1)}; \ldots$. После чего осуществляется обращение матрицы Q_0 и все элементы (подматрицы) обратной матрицы отыскиваются по формуле (8) с использованием свойства, выраженного формулой (9). После отыскания вектора коррелат K (см. (4)) по формуле (3) определяется вектор поправок. Благодаря специфике структуры матрицы A можно определить вектор V без непосредственного решения по формуле (3). Если

$$V_{1\times r} = [V_1\ V_2\ \ldots\ V_J\ \ldots\ V_i], \qquad (10)$$

то для каждого минимального вектора $V_J = [v_1v_2\ldots]$ получаем

$$V_J = [(-L_{J-1} + L_J),\ (L_JB)],$$

где $B_{(j-1)l} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot\ \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$L_j = [K_{(J-1)(j-1)+1},\ K_{(I-1)(j-1)+2}, \ldots\ K_{I(i-1)}]; \qquad L_0 = L_i = 0.$$

9*

Так, для $i=j=5$ имеем $V_{1\times r}=[v_1\ v_2\ v_3\ .\ .\ .\ v_{40}]=[V_1V_2V_3V_4V_5]$. $V_1=[(-L_0+L_1),\ (L_1B)]$; $V_2=[(-L_1+L_2),\ (L_2B)]$; $V_3=[(-L_2+L_3),\ (L_3B)]$; $V_4=[(-L_3+L_4),\ (L_4B)]$; $V_5=[(-L_4+L_5),\ (L_5B)]$; $L_0=L_5=0$. $L_1=[k_1k_2k_3k_4]$; $L_2=[k_5k_6k_7k_8]$; $L_3=[k_9k_{10}k_{11}k_{12}]$; $L_4=[k_{13}k_{14}k_{15}k_{16}]$. $V_1=[k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4],\ (-k_1),\ (k_1-k_2),\ (k_2-k_3),\ (k_3-k_4),\ k_4]$; $V_2=[(-k_1+k_5),\ (-k_2+k_6),\ (-k_3+k_7),\ (-k_4+k_8),\ (-k_5),\ (k_5-k_6),\ (k_6-k_7),\ (k_7-k_8),\ k_8]$; $V_3=[(-k_5+k_9),\ (-k_6+k_{10},\ (-k_7+k_{11}),\ (-k_8+k_{12}),\ (-k_9),\ (k_9-k_{10}),\ (k_{10}-k_{11}),\ (k_{11}-k_{12}),\ (k_{12}]$; $V_4=[(-k_9+k_{13}),\ (-k_{10}+k_{14}),\ (-k_{11}+k_{15}),\ (-k_{12}+k_{16}),\ (-k_{13}),\ (k_{13}-k_{14}),\ (k_{14}-k_{15}),\ (k_{15}-k_{16}),\ k_{16}]$; $V_5=[(-k_{13}),(-k_{14}),(-k_{15}),\ (-k_{16})]$.

Таким образом, весь уравнительный процесс для сети указанного типа сводится к простым и однообразным операциям над матрицами небольшого порядка, легко описываемым несложными логическими схемами. Предлагаемый способ может быть реализован почти на всех современных ЭВМ.

Работа поступила
12 января 1970 года