РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 15

УДК 528.735.2

Ю. С. ТЮФЛИН

ПОСТРОЕНИЕ СВОБОДНОЙ ФОТОГРАММЕТРИЧЕСКОЙ СЕТИ С ВВЕДЕНИЕМ ВЕСОВ ПРИ СОЕДИНЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В настоящее время в Советском Союзе применяются различные способы построения фотограмметрических сетей аналитическим методом. Одним из них является способ независимых моделей, который разработан в ЦНИИГАиК [1, 2]. В нашей статье предлагается при соединении геометрических моделей вводить веса с учетом накопления ошибок их последовательного подсоединения и существующей корреляции между пространственными координатами точек.

После выполнения взаимного ориентирования снимков и вычисления пространственных координат точек в этой условной системе должна быть вычислена ковариационная матрица пространственных координат точек, участвующих при соединении смежных геометрических моделей. Для дальнейшего использования этой матрицы при пространственном фототриангулировании ее удобнее записывать так:

$$(K_0'')_p = \left[\begin{array}{c|c} (K_0'')'_p & (K''_{1-2})_p \\ \hline (K''_{1-2})^T_p & (K''_0)^{*}_p \end{array}\right], \tag{1}$$

где $(K''_0)'_p$ — ковариационная подматрица пространственных координат точек p-й модели, расположенных в зоне общей с предыдущей геометрической моделью, ее порядок $(3m_{p-1}\times 3m_{p-1})$; $(K''_0)^{*}_p$ — ковариационная подматрица пространственных координат точек p-й модели, расположенных в зоне общей с последующей геометрической моделью, ее порядок $(3m_p\times 3m_p)$; $(K''_{1-2})_p$ — подматрица порядка $(3m_p\times 3m_{p-1})$ с ковариациями между пространственными координатами точек двух зон модели; $(K''_{1-2})^T_p$ — подматрица, транспонированная к $(K''_{1-2})_p$.

Соединение смежных геометрических моделей начинают с того, что в системах координат предыдущей и последующей моделей определяют координаты центра тяжести (или взвешенного центра тяжести) фигуры, образованной с помощью точек, по которым выполняют соединение моделей.

После определения координат центров тяжести пространственные координаты точек приводят к одному началу

$$(X_\kappa)''_p-(X_{\text{ц}})''_p=(X_\kappa)''^{*}_p,\ (Y_\kappa)''_p-(Y_{\text{ц}})''_p=(Y_\kappa)''^{*}_p,\ (Z_\kappa)''_p-(Z_{\text{ц}})''_p=(Z_\kappa)''^{*}_p;$$

$$(X_s)''_p-(X_{\text{ц}})''_p=(X_s)''^{*}_p,\ (Y_s)''_p-(Y_{\text{ц}})''_p=(Y_s)''^{*}_p,\ (Z_s)''_p-(Z_{\text{ц}})''_p=(Z_s)''^{*}_p \tag{2}$$

и

$$(X''_k)'_{p+1}-(X''_{\text{ц}})'_{p+1}=(X''_k)'^{*}_{p+1},\ (Y''_k)'_{p+1}-(Y''_{\text{ц}})'_{p+1}=(Y''_k)'^{*}_{p+1},$$

$$(Z''_k)'_{p+1}-(Z''_{\text{ц}})'_{p+1}=(Z''_k)'^{*}_{p+1};$$

$$(X''_s)'_{p+1}-(X''_{\text{ц}})'_{p+1}=(X''_s)'^{*}_{p+1},\ (Y''_s)'_{p+1}-(Y''_{\text{ц}})'_{p+1}=(Y''_s)'^{*}_{p+1}; \tag{3}$$

$$(Z''_s)'_{p+1}-(Z''_{\text{ц}})'_{p+1}=(Z''_s)'^{*}_{p+1},\ k=1,2,\ldots,m_p,$$

где k — номер точки, участвующий при соединении p-й и $(p+1)$-й моделей; $(X_k)''_p$, $(Y_k)''_p$, $(Z_k)''_p$ — пространственные координаты точек p-й модели, участвующие при соединении с $(p+1)$-й моделью, вычисленные в исходной системе координат предыдущих моделей; $(X_s)''_p$, $(Y_s)''_p$, $(Z_s)''_p$ — координаты правого центра проектирования p-й модели в исходной системе координат; $(X''_k)'_{p+1}$, $(Y''_k)'_{p+1}$, $(Z''_k)'_{p+1}$ — пространственные координаты точек $(p+1)$-й независимой модели, вычисленные после выполнения процесса взаимного ориентирования снимков; $(X''_s)'_{p+1}=0$, $(Y''_s)'_{p+1}=0$, $(Z''_s)'_{p+1}=0$ — координаты левого центра проектирования $(p+1)$-й независимой модели.

Чтобы пространственные координаты точек (2) и (3) были равны, необходимо $(X''_k)'^*_{p+1}$, $(X''_s)'^*_{p+1}$, $(Y''_k)'^*_{p+1}$, $(Y''_s)'^*_{p+1}$, $(Z''_k)'^*_{p+1}$, $(Z''_s)'^*_{p+1}$ привести к исходной системе координат предыдущих моделей.

После этого строгие соотношения соединения p-й и $(p+1)$-й моделей запишутся так:

$$(F_1)_p=(X_1)''^*_p-r_p\,[a_1^p(X''_1)'^*_{p+1}+a_2^p(Y''_1)'^*_{p+1}+a_3^p(Z''_1)'^*_{p+1}]+\Delta X_p=0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(F_{m_p})_p=(X_{m_p})''^*_p-r_p\,[a_1^p(X''_{m_p})'^*_{p+1}+a_2^p(Y''_{m_p})'^*_{p+1}+a_3^p(Z''_{m_p})'^*_{p+1}]+\Delta X_p=0;$$

$$(F_{m_p+1})_p=(X_s)''^*_p-r_p\,[a_1^p(X''_s)'^*_{p+1}+a_2^p(Y''_s)'^*_{p+1}+a_3^p(Z''_s)'^*_{p+1}]+\Delta X_p=0;$$

$$(F_{m_p+2})_p=(Y_1)''^*_p-r_p\,[b_1^p(X''_1)'^*_{p+1}+b_2^p(Y''_1)'^*_{p+1}+b_3^p(Z''_1)'^*_{p+1}]+\Delta Y_p=0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(F_{2m_p+1})_p=(Y_{m_p})''^*_p-r_p\,[b_1^p(X''_{m_p})'^*_{p+1}+b_2^p(Y''_{m_p})'^*_{p+1}+b_3^p(Z''_{m_p})'^*_{p+1}]+\Delta Y_p=0;$$

$$(F_{2m_p+2})_p=(Y_s)''^*_p-r_p\,[b_1^p(X''_s)'^*_{p+1}+b_2^p(Y''_s)'^*_{p+1}+b_3^p(Z''_s)'^*_{p+1}]+\Delta Y_p=0; \quad (4)$$

$$(F_{2m_p+3})_p=(Z_1)''^*_p-r_p\,[c_1^p(X''_1)'^*_{p+1}+c_2^p(Y''_1)'^*_{p+1}+c_3^p(Z''_1)'^*_{p+1}]+\Delta Z_p=0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(F_{3m_p+2})_p=(Z_{m_p})''^*_p-r_p\,[c_1^p(X''_{m_p})'^*_{p+1}+c_2^p(Y''_{m_p})'^*_{p+1}+c_3^p(Z''_{m_p})'^*_{p+1}]+\Delta Z_p=0;$$

$$(F_{3m_p+3})_p=(Z_s)''^*_p-r_p\,[c_1^p(X''_s)'^*_{p+1}+c_2^p(Y''_s)'^*_{p+1}+c_3^p(Z''_s)'^*_{p+1}]+\Delta Z_p=0,$$

где

$$r_p=1+\Delta r_p;$$

$$a_1^p=\cos\varepsilon\cos\vartheta-\sin\varepsilon\sin\eta\sin\vartheta;\qquad b_1^p=\cos\eta\sin\vartheta;$$

$$a_2^p=-\cos\varepsilon\sin\vartheta-\sin\varepsilon\sin\eta\cos\vartheta;\qquad b_2^p=\cos\eta\cos\vartheta; \quad (5)$$

$$a_3^p=-\sin\varepsilon\cos\eta;\qquad b_3^p=-\sin\eta;$$

$$c_1^p=\sin\varepsilon\cos\vartheta+\cos\varepsilon\sin\eta\sin\vartheta;$$

$$c_2^p=-\sin\varepsilon\sin\vartheta+\cos\varepsilon\sin\eta\cos\vartheta;$$

$$c_3^p=\cos\varepsilon\cos\eta,$$

ϑ_p, ε_p, η_p, r_p — углы поворота и масштабный коэффициент p-го соединения моделей.

Используя приближенные значения неизвестных $(\lambda_0)_p$ и пространственные координаты точек моделей, вычисляют приближенные значения функций (4)

$$(F_0)_p=[(F_{01})_p,\ldots,(F_{0(m_p+1)})_p,\ (F_{0(m_p+2)})_p,\ldots$$

$$\ldots,(F_{0(2m_p+2)})_p,\ (F_{0(2m_p+3)})_p,\ldots,F_{0(3m_p+3)})_p]^T. \quad (6)$$

После этого для выполнения условий (4) к $(F_0)_p$ необходимо добавить ряд членов

$$(F_0)_p + A_p \Delta\lambda_p + B_p^* (\delta B)_p = 0, \tag{7}$$

где A_p — прямоугольная матрица порядка $(3m_p+3)\times 7$, строками которой являются частные производные функции (4) по каждому неизвестному; B_P^* — прямоугольная матрица, строками которой являются частные производные функции (4) по каждому значению пространственных координат точек; $\Delta\lambda_p$ — матрица-столбец поправок к значениям неизвестных

$$\Delta\lambda_p = [\Delta(\Delta X),\ \Delta(\Delta Y),\ \Delta(\Delta Z),\ \Delta(\Delta r),\ \Delta\vartheta,\ \Delta\varepsilon,\ \Delta\eta]_p^T; \tag{8}$$

$(\delta B)_p$ — матрица-столбец поправок к значениям пространственных координат точек.

Разобьем матрицы B_p^* и $(\delta B)_p$ на две подматрицы, тогда

$$(F_0)_p + A_p \Delta\lambda_p + B_p^{''*} (\delta B)_p^{''} + B_{p+1}^{'*} (\delta B'')_{p+1}^{'} = 0, \tag{9}$$

где

$$(\delta B)_p^{''} = [(\delta X_1)_p^{''}, \ldots, (\delta X_{m_p})_p^{''}, (\delta X_s)_p^{''}, (\delta Y_1)_p^{''}, \ldots$$

$$\ldots, (\delta Y_{m_p})_p^{''}, (\delta Y_s)_p^{''}, (\delta Z_1)_p^{''}, \ldots, (\delta Z_{m_p})_p^{''}, (\delta Z_s)_p^{''}]^T; \tag{10}$$

$$(\delta B'')_{p+1}^{'} = [(\delta X_1^{''})_{p+1}^{'}, \ldots, (\delta X_{m_p}^{''})_{p+1}^{'}, (\delta Y_1^{''})_{p+1}^{'}, \ldots$$

$$\ldots, (\delta Y_{m_p}^{''})_{p+1}^{'}, (\delta Z_1^{''})_{p+1}^{'}, \ldots, (\delta Z_{m_p}^{''})_{p+1}^{'}]^T, \tag{11}$$

$B_p^{''*}$ — квадратная матрица порядка $(3m_p+3)\times(3m_p+3)$, строками которой являются частные производные функций (4) по каждому значению пространственных координат точек p-й модели, участвующих при соединении с $(p+1)$-й моделью; $B_{p+1}^{'*}$ — прямоугольная матрица порядка $(3m_p+3)\times 3m_p$, строками которой являются частные производные функции (4) по каждому значению пространственных координат точек $(p+1)$-й независимой модели, участвующих в p-м соединении моделей.

Матрица-столбец $(\delta B)_p^{''}$ должна быть выражена через пространственные координаты точек независимых моделей и их дифференциалы; такое выражение для $(\delta B)_p^{''}$ будет дано позднее.

Согласно предписанию способа наименьших квадратов квадратичную форму, подлежащую минимизации, представляем так:

$$[(F_0)_p + A_p \Delta\lambda_p]^T [B_p^* K_p B_p^{*T}]^{-1} [(F_0)_p + A_p \Delta\lambda_p] = \min, \tag{12}$$

где K_p — ковариационная матрица исходной информации;

$$[B_p^* K_p B^{*T}]^{-1} = P_p, \tag{13}$$

P_p — матрица весов. Поэтому нормальные уравнения записываем в виде

$$[A_p^T P_p A_p]\, \Delta\lambda_p + [A_p^T P_p (F_0)_p] = 0. \tag{14}$$

Из решения (14) определяем вектор поправок к приближенным значениям неизвестных $(\lambda_0)_p$, то есть

$$\Delta\lambda_p = [A_p^T P_p A_p]^{-1} [-A_p^T P_p (F_0)_p]. \tag{15}$$

После определения $\Delta\lambda_p$ значение $(\lambda_0)_p$ уточняем

$$\lambda_p = (\lambda_0)_p + (\Delta\lambda_p)_{\text{I}}, \tag{16}$$

где $(\Delta\lambda_p)_{\text{I}}$ — первое приближение определения вектора поправок.

Если вычисленные значения неизвестных (16) еще не удовлетворяют условиям (4), то итеративный процесс продолжают, вычисляют новые значения F_0, A и B^*, а затем и вектор поправок $(\Delta\lambda_p)_{\text{II}}$, который суммируют с (16). Окончанием процесса следует считать стабилизацию дисперсии единицы веса

$$\sigma_0^2 = \frac{R_0^2}{N-n}, \quad N = 3m_p + 3, \; n = 7, \tag{17}$$

где $-R_0^2 = (F_0{}^T P F_0)_i + (A^T P F_0)^T (\Delta\lambda_p)_i$ — остаточная сумма квадратов невязок; $(\Delta\lambda_p)_i$ — вектор поправок i-го приближения.

Теперь рассмотрим определение матрицы-столбца $(\delta B)_p''$, входящего в уравнение (9).

Формулы преобразования пространственных координат точек p-й независимой модели, расположенных в зоне смежной с $(p+1)$-й моделью, к исходной системе координат предыдущих моделей имеют вид:

$$(X_1)_p'' = r_{p-1}[a_1^{p-1}(X_1'')_p'' + a_2^{p-1}(Y_1'')_p'' + a_3^{p-1}(Z_1'')_p''] - \Delta X_{p-1} + $$
$$+ r_{p-2}\, a_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta X_{p-2} + \cdots + r_1 a_1' B_2 - \Delta X_1 + B_1;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(X_{m_p})_p'' = r_{p-1}[a_1^{p-1}(X_{m_p}'')_p'' + a_2^{p-1}(Y_{m_p}'')_p'' + a_3^{p-1}(Z_{m_p}'')_p'' - \Delta X_{p-1} +$$
$$+ r_{p-2}\, a_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta X_{p-2} + \cdots + r_1 a_1' B_2 - \Delta X_1 + B_1;$$

$$(X_s)_p'' = r_{p-1}\, a_1^{p-1} B_p - \Delta X_{p-1} + r_{p-2}\, a_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta X_{p-2} + \cdots$$
$$\cdots + r_1 a_1' B_2 - \Delta X_1 + B_1;$$

$$(Y_1)_p'' = r_{p-1}[b_1^{p-1}(X_1'')_p'' + b_2^{p-1}(Y_1'')_p'' + b_3^{p-1}(Z_1'')_p''] - \Delta Y_{p-1} +$$
$$+ r_{p-2}\, b_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta Y_{p-2} + \cdots + r_1 b_1' B_2 - \Delta Y_1;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(Y_{m_p})_p'' = r_{p-1}\, b_1^{p-1}(X_{m_p}'')_p'' + b_2^{p-1}(Y_{m_p}'')_p'' + b_3^{p-1}(Z_{m_p}'')_p''] - \Delta Y_{p-1} +$$
$$+ r_{p-2}\, b_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta Y_{p-2} + \cdots + r_1 b_1' B_2 - \Delta Y_1;$$

$$(Y_s)_p'' = r_{p-1}\, b_1^{p-1} B_p - \Delta Y_{p-1} + r_{p-2}\, b_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta Y_{p-2} + \cdots + r_1 b_1' B_2 - \Delta Y_1$$

$$(Z_1)_p'' = r_{p-1}[c_1^{p-1}(X_1'')_p'' + c_2^{p-1}(Y_1'')_p'' + c_3^{p-1}(Z_1'')_p''] - \Delta Z_{p-1} +$$
$$+ r_{p-2}\, c_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta Z_{p-2} + \cdots + r_1 a_1' B_2 - \Delta Z_1;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(Z_{m_p})_p'' = r_{p-1}[c_1^{p-1}(X_{m_p}'')_p'' + c_2^{p-1}(Y_{m_p}'')_p'' + c_3^{p-1}(Z_{m_p}'')_p'' - \Delta Z_{p-1} +$$
$$+ r_{p-2}\, c_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta Z_{p-2} + \cdots + r_1 a_1' B_2 - \Delta Z_1; \tag{18}$$

$$(Z_s)_p'' = r_{p-1}\, c_1^{p-1} B_p - \Delta Z_{p-1} + r_{p-2}\, c_1^{p-2} B_{p-1} - \Delta Z_{p-2} + \cdots + r_1 c_1' B_2 - \Delta Z_1,$$

где $B_2, \dots, B_{p-1}, B_p$ — базисы фотографирования, принятые для вычисления пространственных координат $2, \dots, (p-1)$, p-й независимых моделей.

Используя (18), записываем $(\delta B)_p''$ в матричном виде

$$(\delta B)_p'' = (A_{p-1}'')_{p-1}''\, \delta\Delta\lambda_{p-1} + (A_{p-2}'')_{p-1}''\, \delta\Delta\lambda_{p-2} + \cdots$$
$$\cdots + (A_2'')_{p-1}''\, \delta\Delta\lambda_2 + (A_1'')_{p-1}''\, \delta\Delta\lambda_1 + (B'')_p''(\delta B'')_p'', \tag{19}$$

где $(A_{p-1}'')_{p-1}''$ — прямоугольная матрица порядка $(3m_p+3)\times 7$, составленная из частных производных функций (23) по каждому неизвестному $(p-1)$-го соединения моделей — λ_{p-1}; $(A_{p-2}'')_{p-1}'', \dots, (A_2'')_{p-1}''$,

$(A_1')''_{p-1}$ — прямоугольные матрицы порядка $(3m_p+3)\times 7$, составленные из частных производных функций (18) соответственно по неизвестным $\lambda_{p-2}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1$; $(B')''_p$ — прямоугольная матрица порядка $(3m_p+ +3)\times 3m_p$, составленная из частных производных функций (18) по каждому значению пространственных координат точек p-й модели;

$$(\delta B')'_p = [(\delta X_1')'_p, \ldots, (\delta X'_{m_p})'_p, (\delta Y_1')'_p, \ldots, (\delta Y'_{m_p})'_p, (\delta Z_1')'_p, \ldots, (\delta Z'_{m_p})'_p]^T.$$

Теперь рассматриваем определения $\delta\Delta\lambda_{p-1}, \ldots, \delta\Delta\lambda_1$, выражая их через известные величины и ошибки пространственных координат точек независимых геометрических моделей.

С помощью нормальных уравнений для последнего приближения итеративного процесса соединения $(p-1)$-й и p-й моделей

$$[A^T_{p-1} P_{p-1} A_{p-1}]\Delta\lambda_{p-1} + [A^T_{p-1} P_{p-1} (F_0)_{p-1}] = 0$$

получаем

$$\delta\Delta\lambda_{p-1} = C_{p-1}[\delta A_{p-1}\Delta\lambda_{p-1} + (\delta F_0)_{p-1}] + Q_{p-1}\delta A^T_p l_{p-1},$$

где

$$Q_{p-1} = -[A_{p-1}P_{p-1}A_{p-1}]^{-1}, \quad C_{p-1} = Q_{p-1}A^T_{p-1}P_{p-1},$$

$$l_{p-1} = P_{p-1}[(F_0)_{p-1} + A_{p-1}\Delta\lambda_{p-1}]$$

или

$$\delta\Delta\lambda_{p-1} = \{[\Delta(\Delta X)_{p-1}C_{p-1}, \Delta(\Delta Y)_{p-1}C_{p-1}, \Delta(\Delta Z)_{p-1}C_{p-1},$$

$$\Delta(\Delta r)_{p-1}, \Delta\vartheta_{p-1}C_{p-1}, \Delta\varepsilon_{p-1}C_{p-1}, \Delta\eta_{p-1}C_{p-1}, C_{p-1}] +$$

$$+[Q_1 l^T_{p-1}, \ldots, Q_7 l^T_{p-1}, 0]\}\cdot[\delta A_{1(p-1)}, \ldots, \delta A_{7(p-1)}, (\delta F_0)_{p-1}]^T,$$

где $Q, \ldots, Q_7$ — столбцы матрицы Q_{p-1}; 0 — нулевая матрица; $\delta A_{1(p-1)}, \ldots, \delta A_{7(p-1)}$ — столбцы матрицы $\delta A_{(p-1)}$. Обозначая

$$[\Delta(\Delta X)_{p-1}C_{p-1} + Q_1 l^T_{p-1}] = (U_1)_{p-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[\Delta\eta_{p-1}C_{p-1} + Q_7 l^T_{p-1}] = (U_7)_{p-1},$$

получаем

$$\delta\Delta\lambda_{p-1} = (U_1)_{p-1}\delta A_{1(p-1)} + \cdots + (U_7)_{p-1}\delta A_{7(p-1)} + C_{p-1}(\delta F_0)_{p-1}.$$

Выражая элементы столбцов матрицы δA_{p-1} через полные дифференциалы коэффициентов матрицы A_{p-1}, состоящие из частных производных каждого элемента по каждому значению пространственных координат точек p-й независимой модели

$$\delta A_{1(p-1)} = (A_1)_{p-1}(\delta B'')'_p \ \ldots, \ \delta A_{7(p-1)} = (A_7)_{p-1}(\delta B'')'_p,$$

$$(\delta F_0)_{p-1} = B''^*_{p-1}(\delta B)''_{p-1} + B'^*_p(\delta B'')'_p,$$

и учитывая, что

$$\delta A_{1(p-1)} = \delta A_{2(p-1)} = \delta A_{3(p-1)} = 0,$$

записываем

$$\delta\Delta\lambda_{p-1} = (U_4)_{p-1}(A_4)_{p-1}(\delta B'')'_p + (U_5)_{p-1}(A_5)_{p-1}(\delta B'')'_p +$$

$$+(U_6)_{p-1}(A_5)_{p-1}(\delta B'')'_p + (U_7)_{p-1}(A_7)_{p-1}(\delta B'')'_p +$$

$$+(C)_{p-1}B''^*_{p-1}(\delta B)''_{p-1} + (C)_{p-1}B'^*_p(\delta B'')'_p. \qquad (20)$$

Вводим обозначения

$$\delta\Delta\lambda_{p-1} = (B'')'_{p-1}(\delta B'')'_{p} + (B)''_{p-1}(\delta B)''_{p-1}, \tag{21}$$

поэтому

$$(\delta B)''_{p} = (B'')''_{p}(\delta B'')''_{p} + (A''_{p-1})''_{p-1}(B'')'_{p-1}(\delta B'')'_{p} +$$
$$+ (A''_{p-1})''_{p-1}(B)''_{p-1}(\delta B)''_{p-1} + (A''_{p-2})''_{p-1}(B'')'_{p-2}(\delta B'')'_{p-1} +$$
$$+ (A''_{p-2})''_{p-1}(B)''_{p-2}(\delta B)''_{p-2} + \cdots + (A''_{2})''_{p-1}(B'')'_{2}(\delta B'')'_{3} +$$
$$+ (A''_{2})''_{p-1}(B)''_{2}(\delta B)''_{2} + (A''_{1})''_{p-1}(B'')'_{1}(\delta B'')'_{2} + (A''_{1})''_{p-1}(B)''_{1}(\delta B)''_{1}. \tag{22}$$

Нашей задачей является выражение $(\delta B)''_{p-1}$, $(\delta B)''_{p-2}$, ..., $(\delta B)''_{2}$, $(\delta B)''_{1}$ через ошибки пространственных координат точек независимых моделей $(\delta B'')''_{p-1}$, $(\delta B'')'_{p-1}$, $(\delta B'')''_{p-2}$, $(\delta B'')'_{p-2}$, ..., $(\delta B'')''_{2}$, $(\delta B'')'_{2}$ $(\delta B'')'_{1}$ и другие известные величины. С этой целью в (22) необходимо последовательно подставлять с соответствующими индексами соединения моделей (22). После таких подстановок и необходимых преобразований получаем

$$(\delta B)''_{p} = [B'_{p}]_{p}(\delta B'')'_{p} + [B''_{p}]_{p}(\delta B'')''_{p} + [B'_{p-1}]_{p}(\delta B'')'_{p-1} +$$
$$+ [B''_{p-1}]_{p}(\delta B'')''_{p-1} + \cdots + [B'_{2}]_{p}(\delta B'')'_{2} + [B''_{2}]_{p}(\delta B'')''_{2} +$$
$$+ [B''_{1}]_{p}(\delta B'')''_{1} \tag{23}$$

$$[B'_{p}]_{p} = (A''_{p-1})''_{p-1}(B'')'_{p-1};$$
$$[B'_{p-1}]_{p} = (A''_{p-2})''_{p-1}(B'')'_{p-2} +$$
$$+ (A''_{p-1})''_{p-1}(B)''_{p-1}(A''_{p-2})''_{p-2}(B'')'_{p-2};$$
$$[B'_{p-2}]_{p} = (A''_{p-3})''_{p-1}(B'')'_{p-3} +$$
$$+ (A''_{p-2})''_{p-1}(B)''_{p-2}(A''_{p-3})''_{p-3}(B'')'_{p-3} +$$
$$+ (A''_{p-1})''_{p-1}(B)''_{p-1}(A''_{p-3})''_{p-2}(B'')'_{p-3} +$$
$$+ (A''_{p-1})''_{p-1}(B)''_{p-1}(A''_{p-2})''_{p-2}(B)''_{p-2}(A''_{p-3})''_{p-3}(B'')'_{p-3} \tag{24}$$

. . . .

и

$$[B''_{p}]_{p} = (B'')''_{p}; \quad [B''_{p-1}]_{p} = (A''_{p-1})''_{p-1}(B)''_{p-1}(B'')''_{p-1};$$
$$[B''_{p-2}]_{p} = (A''_{p-2})''_{p-1}(B)''_{p-2}(B'')''_{p-2} +$$
$$+ (A''_{p-1})''_{p-1}(B)''_{p-1}(A''_{p-2})''_{p-2}(B)''_{p-2}(B'')''_{p-2};$$
$$[B''_{p-3}]_{p} = (A''_{p-3})''_{p-1}(B)''_{p-3}(B'')''_{p-3} +$$
$$+ (A''_{p-2})''_{p-1}(B)''_{p-2}(A''_{p-3})''_{p-3}(B)''_{p-3}(B'')''_{p-3} + \tag{25}$$
$$+ (A''_{p-1})''_{p-1}(B)''_{p-1}(A''_{p-3})''_{p-2}(B)''_{p-3}(B'')''_{p-3} +$$
$$+ (A''_{p-1})''_{p-1}(B)''_{p-1}(A''_{p-2})''_{p-2}(B)''_{p-2}(A''_{p-3})''_{p-3}(B)''_{p-3}(B'')''_{p-3}.$$

Рассматривая (24) и (25), нетрудно заметить рекуррентный закон построения последующих матриц, входящих в (33), то есть $[B'_{p-4}]_p$, $[B'_{p-5}]_p, \ldots, [B'_3]_p, [B'_2]_p$ и $[B''_{p-4}]_p, [B''_{p-5}]_p, \ldots, [B''_2]_p, [B''_1]_p$.

Обозначая

$$\|[B_p]_p \mid [B''_p]_p\| = [B_p]_p. \quad \|[B'_{p-1}]_p \mid [B''_{p-1}]_p\| = [B_{p-1}]_p, \ldots$$

$$\ldots, \|[B'_2]_p \mid [B''_2]_p\| = [B_2]_p;$$

$$\left[\frac{(\delta B'')'_p}{(\delta B'')''_p}\right] = \delta B''_p, \quad \left[\frac{(\delta B'')'_{p-1}}{(\delta B'')''_{p-1}}\right] = \delta B''_{p-1}$$

$$\ldots, \left[\frac{(\delta B'')'_2}{(\delta B'')''_2}\right] = \delta B''_2, \quad (\delta B'')''_1 = \delta B''_1,$$

записываем

$$(\delta B)''_p = [B''_1]_p \delta B''_1 + [B_2]_p \delta B''_2 + \cdots + [B_{p-1}]_p \delta B''_{p-1} + \\ + [B_p]_p \delta B''_p. \tag{26}$$

В связи с этим ковариационная матрица вектора пространственных координат точек с учетом накопления ошибок фотограмметрических построений $(\delta B)_p''$ запишется так:

$$K'_p = I_p \begin{bmatrix} (K''_0)_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (K''_0)_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (K''_0)_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (K''_0)_p \end{bmatrix} I_p^T, \tag{27}$$

где I_p — матрица Якоби,

$$I_p = \|[B''_1]_p \mid [B_2]_p \mid \ldots \mid [B_{p-1}]_p \mid [B_p]_p\|, \tag{28}$$

$(K''_0)_p, (K''_0)_{p-1}, \ldots, (K''_0)_2, (K''_0)_1$ — ковариационные матрицы, аналогичные (1) соответственно p, $(p-1), \ldots \ldots, 2$ и 1-й геометрических моделей, вычисленные после выполнения процессов взаимного ориентирования для всех снимков маршрута.

Диагональные элементы матрицы (27), являющиеся дисперсиями пространственных координат точек и правого центра проектирования могут быть использованы для вычисления взвешенного центра тяжести p-й модели. Для вычисления взвешенного центра тяжести $(p+1)$-й независимой модели используются диагональные элементы матрицы $(K_0'')'_{p+1}$, аналогичной (1).

Для введения весов в пространственном фототриангулировании используется формула (13), которая в развернутом виде записывается так:

$$P_p = [B^*_p K_p B^{*T}_p]^{-1} = [B''^*_p K'_p B''^{*T}_p + B'^*_{p+1} (K''_0)'_{p+1} B'^{*T}_{p+1}]^{-7}.$$

Матрица (27) помимо введения весов при пространственном фототриангулировании может быть использована также для подсчета накопления ошибок в сетях и соответствующих корреляций.

Принципы соединения независимых моделей с введением весов могут быть распространены и на другие способы построения фотограмметрических сетей (например, по триплетам и подблокам).

ЛИТЕРАТУРА

1. Коншин М. Д. и Полякова В. А. Аналитический способ построения одномаршрутных фотограмметрических сетей. Труды ЦНИИГАиК, вып. 165, 1966.
2. Полякова В. А. Результаты исследований новой программы аналитической фототриангуляции. «Геодезия и картография», 1968, № 11.

Работа поступила
9 октября 1970 г.