

С. В. ГРОМОВ

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИГУРЫ ФИЗИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ ЧЕРЕЗ АНОМАЛИИ ВЕРТИКАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА УСКОРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Классический динамический метод определения фигуры геоида, предложенный Стоксом в 1849 году [8], основан на использовании значений первой (вертикальной) производной потенциала  $W$  ускорения силы тяжести в точках определяемой поверхности. М. С. Молоденский [4] решил задачу определения фигуры физической поверхности Земли. Решение это также основано на знании распределения аномалий силы тяжести в точках определяемой поверхности. Наряду с большой теоретической ценностью оно имеет исключительно важное практическое значение, так как из всех производных потенциала  $W$  в настоящее время лучше всего мы умеем измерять первую вертикальную производную ( $g$ ).

Но не лишены интереса и методы определения фигуры Земли, когда используются другие производные от  $W$ , массовое измерение которых еще не налажено в данное время или производится с недостаточной точностью. Так, в 1949 году Н. К. Мигаль [2] дает строгое решение задачи определения фигуры уровенной поверхности потенциала силы тяжести через значения суммы главных радиусов кривизны последней. Значения главных радиусов кривизны поверхности  $W = \text{const}$  могут быть получены в каждой точке через ускорение силы тяжести  $g$  и производные  $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$ ,  $\left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)$ , а также вторую вертикальную производную потенциала силы тяжести  $\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$  или, как часто говорят, вертикальный градиент  $p$  силы тяжести. На практике данное решение едва ли может иметь существенное значение, так как при приведении измеренных производных с физической поверхности Земли на уровенную в поле реальной Земли можно встретить непреодолимые трудности. Кроме того, для получения необходимых данных нужно в каждом пункте производить комплексные измерения различными инструментами, по крайней мере трех видов: гравиметром ( $g$ ), гравитационным вариометром  $\left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)$  и вертикальным градиентометром  $\left( \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)$ . Причем последний прибор еще находится в стадии разработок. В 1966 году И. Ф. Монин [5] решает задачу определения фигуры физической поверхности Земли  $S$  через значения производной смешанной аномалии силы тяжести ( $g - \gamma$ ) по направлению нормали к уровенному эллипсоиду относимости (нормальная Земля). Эта производная не является чисто физической величиной (ведь  $\gamma$  — ускорение силы тяжести в воображаемом гравитационном поле) и не может быть получена в результате измерений каким-либо прибором. Затем в другой работе И. Ф. Монин [6] показал, что

упомянутая производная равняется

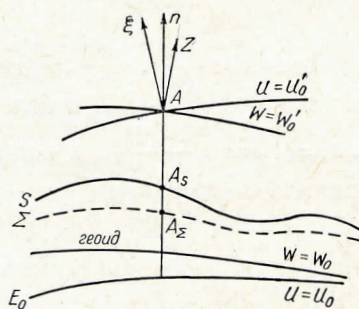
$$\Delta\rho + \frac{2(g-\gamma)}{\rho}, \quad (1.0)$$

где  $\Delta\rho$  — смешанная аномалия вертикального градиента силы тяжести, а  $\rho$  — радиус-вектор соответствующей точки вспомогательной поверхности. Правда, выражение (1.0) для производной, о которой идет речь, недостаточно точно, так как его автор не делал различия между направлением нормали к уровенному эллипсоиду и отвесной линией. Для точек физической поверхности Земли это различие в отдельных случаях может достигать  $1'$ , ошибка в выражении (1.0) может иметь порядок  $0,1E$ , что в несколько десятков раз превосходит требуемую точность измерения вертикального градиента силы тяжести. Поэтому фактически решение, данное И. Ф. Мониным [6], требует для своей даже приближенной реализации измерения двух различных физических величин в точках земной поверхности: силы тяжести и ее вертикального градиента. В этой же работе [6] И. Ф. Монин, пользуясь краевым условием Стокса—Молоденского, исключает аномалию силы тяжести из (1.0). Он получает приближенное краевое условие, связывающее возмущающий потенциал и  $\Delta\rho$ . Решается внешняя краевая задача теории потенциала с этим приближенным краевым условием. Решение сводится к решению серии интегральных уравнений первого рода.

Несколько ранее работ И. Ф. Монины вышла работа автора данной статьи [1], в которой решается задача определения фигуры геоида через одни аномалии  $\Delta\rho$  вертикального градиента силы тяжести. Здесь мы постараемся решить аналогичную задачу применительно к определению фигуры физической поверхности Земли. Так как краевое условие в решении Стокса—Молоденского получается в приближенном виде, мы не будем им пользоваться как исходным при получении краевого условия в нашей задаче. В противном случае в нашем краевом условии можно упустить заметные величины, так как придется дифференцировать приближенные выражения.

## 1. КРАЕВОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ ВОЗМУЩАЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА

Пусть точка  $A$  находится вблизи физической поверхности Земли  $S$ , вне ее (см. рисунок). Рассмотрим в  $A$  три направления:  $z$  — направление внешней нормали к поверхности  $W=W_0$ , проходящей через  $A$ ;  $n$  — направление внешней нормали, опущенной из  $A$  на уровенный эллипсоид вращения  $E_0$ ; направление  $\xi$  внешней нормали к уровенной поверхности  $U=U_0$ , проходящей через  $A$ . Уровенный эллипсоид  $E_0$  ориентируем в теле Земли абсолютным образом. Угловые скорости вращения Земли и эллипсоида  $E_0$  примем равными и оси вращения — совпадающими. В таком случае возмущающий потенциал  $T = W - U$ , где  $U$  — нормальный потенциал; эффект вращения Земли и эллипсоида  $E_0$  из  $T$  будет исключен, и  $T$  будет гармонической функцией вне  $S$  и  $E_0$  и регулярной на бесконечности. Размеры и форму поверхности  $E_0$  выберем так, чтобы она была достаточно близка к поверхности геоида. Примем точку  $A$  за начало трех систем прямоугольных координат:  $m, q, n$ ;  $x, y, z$  и  $\xi, \eta, \zeta$ . Оси  $m, x, \xi$  выберем в плоскостях меридианов места (северное направление), соответствующих отвесам  $n, z, \zeta$ ; оси  $q, y, \eta$  направим в восточном направлении.



Примерное расположение некоторых поверхностей и нормалей к ним в точке  $A$ .

Положение любой точки пространства можем определить в любой из трех систем координат; причем между координатами имеет место ряд зависимостей, например:

$$\begin{aligned} m &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, & \xi &= a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ q &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, & \eta &= a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ n &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, & \zeta &= a_3 x + b_3 y + c_3 z, \end{aligned} \quad (1.1) \quad (1.2)$$

где  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, a_i, b_i, c_i$  суть направляющие косинусы,  $i = 1, 2, 3$ . Потенциал  $W$  силы тяжести реальной Земли можем записать в виде  $W(x, y, z) = U[\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z)] + T[m(x, y, z), q(x, y, z), n(x, y, z)]$ . (1.3)

Дифференцируя (1.3) по  $z$ , учитывая (1.1) и (1.2), получаем

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial m} \gamma_1 + \frac{\partial T}{\partial q} \gamma_2 + \frac{\partial T}{\partial n} \gamma_3 + \frac{\partial U}{\partial \xi} c_1 + \frac{\partial U}{\partial \eta} c_2 + \frac{\partial U}{\partial \zeta} c_3. \quad (1.4)$$

Дифференцируя (1.4) еще раз по  $z$ , записываем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} &= \gamma_1 \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial m^2} \gamma_1 + \frac{\partial^2 T}{\partial m \partial q} \gamma_2 + \frac{\partial^2 T}{\partial m \partial n} \gamma_3 \right] + c_1 \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} c_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} c_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \zeta} c_3 \right] + \\ &+ \gamma_2 \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial q \partial m} \gamma_1 + \frac{\partial^2 T}{\partial q^2} \gamma_2 + \frac{\partial^2 T}{\partial q \partial n} \gamma_3 \right] + c_2 \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \xi} c_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} c_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \zeta} c_3 \right] + \\ &+ \gamma_3 \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial n \partial m} \gamma_1 + \frac{\partial^2 T}{\partial n \partial q} \gamma_2 + \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} \gamma_3 \right] + c_3 \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta \partial \xi} c_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta \partial \eta} c_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} c_3 \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Слагаемые в правой части (1.5) имеют различную величину, некоторые из них могут быть опущены вообще. На самом деле, углы  $\theta, \theta'$  между осями  $z$  и  $\zeta$ , а также  $z$  и  $n$  в точках поверхности Земли и в непосредственной близости к ней могут достигать значений в  $1'$ ; угол  $\mu$  между осями  $\zeta$  и  $n$  равен поправке за кривизну силовой линии в нормальном поле. Для максимальных высот на Земле он составит всего  $1,5''$ . Вторые производные в  $A$  в (1.5) имеют следующие величины:  $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta \partial \eta} = 0$ ;  $\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta \partial \xi} \cong 8E$ ;  $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cong \cong -1500E$ ;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cong -1500E; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \cong 3000E \text{ (этвеш)}.$$

Производные  $\frac{\partial^2 T}{\partial m^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial q^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial m \partial q}, \frac{\partial^2 T}{\partial m \partial n}, \frac{\partial^2 T}{\partial q \partial n}$  могут принимать значения, достигающие  $100-200$  и более *этвеш*. Учитывая, что  $\alpha_1 \cong \beta_2 \cong \gamma_3 \cong a_1 \cong \cong b_2 \cong c_3 \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}$ , а остальные косинусы имеют порядок  $\theta$ , мы можем написать в точке  $A$ :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 2\gamma_1 \frac{\partial^2 T}{\partial m \partial n} + 2\gamma_2 \frac{\partial^2 T}{\partial q \partial n} + \gamma_3^2 \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}, \quad (1.6)$$

причем ошибка этого равенства менее  $0,005 E$ . Совершая ошибки  $\cong 1,10^{-4} E$ , записываем

$$\gamma_3^2 \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} = 2\gamma_3 \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial n^2}.$$

Помня, что  $\gamma_1 \frac{\partial^2 T}{\partial m \partial n} + \gamma_2 \frac{\partial^2 T}{\partial q \partial n} + \gamma_3 \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial n \partial z}$ , напомним (1.6):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial n} - \frac{\partial^2 T}{\partial n^2}. \quad (1.7)$$

С той же точностью после устремления  $A$  к  $A_S$  получаем

$$\left. \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right|_S = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \right|_S + \left[ 2 \frac{\partial^2 T}{\partial n \partial z} - \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} \right]_S. \quad (1.8)$$

Но

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \right|_S = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \right|_\Sigma + \left. \frac{\partial^3 U}{\partial n^3} \right|_\Sigma N + \dots, \quad (1.9)$$

где  $N$  — аномалия высоты или высота квазигеоида над эллипсоидом  $E_0$ . С пренебрегаемо малой ошибкой можем в (1.9)  $\left. \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \right|_\Sigma$  заменить через нормальный вертикальный градиент силы тяжести  $\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta'^2} \right|_\Sigma$ . Выразим  $N$  по формуле Брунса [3] и после подстановки в (1.8) получим

$$\Delta p = \left[ 2 \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial n} - \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} \right]_S + \left. \frac{\partial^3 U}{\partial n^3} \right|_\Sigma \left( \frac{T_S + U_0 - W_0}{\gamma_\Sigma} \right), \quad (1.10)$$

где  $\Delta p = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right| - \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta'^2} \right|_\Sigma$  — смешанная аномалия вертикального градиента ускорения силы тяжести,  $\gamma_\Sigma$  — нормальное значение ускорения силы тяжести в точке  $A_\Sigma$ . Совершая ошибку в (1.10) не более  $0,0005E$ , можем  $\left. \frac{\partial^3 U}{\partial n^3} \right|_\Sigma$  заменить через  $\frac{6\gamma_\Sigma}{\rho_\Sigma^2}$ . Этим самым в качестве отсчетной поверхности  $E_0$  мы принимаем сферу некоторого радиуса  $R$ . В таком случае вместо (1.10) получаем равенство

$$\left[ 2 \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial \rho} - \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} \right]_S - \frac{6T_S}{\rho_\Sigma^2} = \Delta p + \frac{6(U_0 - W_0)}{\rho_\Sigma^2}, \quad (1.11)$$

где  $\rho$  — расстояние, измеряемое от центра отсчетной сферы. Так как физическая поверхность Земли нам неизвестна, то в первом приближении условие (1.11) считаем отнесенным к вспомогательной поверхности  $\Sigma$  [3], полученной откладыванием от  $E_0$  нормальных высот. Итак, мы пришли к тому, что необходимо решение внешней краевой задачи теории потенциала с краевым условием

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} - \frac{6T}{\rho^2} + 2\gamma_1 \frac{\partial^2 T}{\partial m \partial \rho} + 2\gamma_2 \frac{\partial^2 T}{\partial q \partial \rho} = \Delta p + \frac{6(U_0 - W_0)}{\rho^2}. \quad (1.12)$$

## 2. ОСНОВНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Направляющие косинусы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  являются также проекциями угла между осями  $n$  и  $z$  на плоскости  $nAm$  и  $nAq$ . Совершая ошибку, равную поправке за кривизну силовой линии в нормальном поле (не более  $1, 5''$ ), можем написать:

$$\gamma_1 = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial m}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial q}.$$

После этого краевое условие (2.12) примет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} - \frac{6T}{\rho^2} - \frac{2}{\gamma} \left[ \frac{\partial T}{\partial m} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial m \partial \rho} + \frac{\partial T}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial q \partial \rho} \right] = -\delta_p, \quad (2.1)$$

где  $\delta_p = \Delta p + \frac{6(U_0 - W_0)}{\rho^2}$ . Уже внешний вид краевого условия (2.1) свидетельствует о трудности решения задачи определения потенциала  $T$ . Правда, решение упрощается тем, что третий член правой части (2.1) есть

величина малая, едва ли могущая достигнуть  $0,2-0,3E$ . В равнинных районах при отсутствии резких скачков плотности масс земной коры им, по-видимому, вообще можно пренебречь. Поэтому наметим следующий путь решения задачи: в первом приближении решим краевую задачу, пренебрегая третьим членом в условии (2.1). Найдя потенциал  $T$  в первом приближении, определим  $\frac{\partial T}{\partial m}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial m \partial \rho}$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial q \partial \rho}$  и подставим их в (2.1). После переноса этих членов в правую часть (2.1) приходим снова к условию вида

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} - \frac{6T}{\rho^2} = -\delta\rho. \quad (2.2)$$

Надо полагать, что дальше второго приближения идти не придется. Точный же ответ на это могут дать фактические расчеты с наблюдаемыми данными. Теперь нам следует решать внешнюю краевую задачу теории потенциала с более простым краевым условием (2.2). Для этого представим гармоническую функцию вне  $\Sigma$  и регулярную на бесконечности  $\rho \frac{\partial T}{\partial \rho}$  [7] в виде потенциала простого слоя некоторой плотности  $\mu$ , распределенного на поверхности Земли  $\Sigma$  первого приближения, то есть можем написать:

$$\rho \frac{\partial T}{\partial \rho} = \int_{\Sigma} \frac{\mu}{r} d\Sigma, \quad (2.3)$$

где  $r^2 = \rho'^2 + \rho^2 - 2\rho\rho' \cos \psi$ ,  $\rho'$  — радиус-вектор текущей точки на  $\Sigma$ ,  $\rho$  — радиус-вектор фиксированной точки  $\Sigma$ , в которой определяется значение потенциала  $T$ ,  $\psi$  — угол между  $\rho$  и  $\rho'$ . Разделив (2.3) на  $\rho$  и проинтегрировав обе части равенства по  $\rho$  от  $\rho$  до бесконечности, И. Ф. Монин [5] получил

$$-T = \int_{\Sigma} \mu L d\Sigma, \quad \text{где } L = \frac{1}{\rho'} \ln \frac{\rho' - \rho \cos \psi + r}{2\rho \sin^2 \frac{\psi}{2}}. \quad (2.4)$$

Из (2.3) находим также

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} = -\frac{1}{\rho^2} \int_{\Sigma} \frac{\mu}{r} d\Sigma + \frac{1}{\rho} \int_{\Sigma} \mu \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{r} \right) d\Sigma. \quad (2.5)$$

После подстановки (2.4) и (2.5) в краевое условие (2.2) и перехода на поверхность  $\Sigma$ , используя формулу Племели, получаем

$$\frac{2\pi\mu}{\rho} \cos \alpha - \frac{1}{\rho^2} \int_{\Sigma} \mu \left[ 6L - \frac{3}{2r} + \frac{\rho'^2 - \rho^2}{2r^3} \right] d\Sigma = \delta\rho, \quad (2.6)$$

где  $\alpha$  — угол между  $\rho$  и нормалью к поверхности Земли. Совершая ошибку в несколько десятитысячных этвеша, можем положить

$$\delta\rho = -\Delta\rho - \frac{6(U_0 - W_0)}{R^2}.$$

Интегральное уравнение (2.6) относительно плотности простого слоя  $\mu$  будем решать методом малого параметра [3]. Для этого введем новую вспомогательную плотность  $\chi$  простого слоя, определяемую равенством  $\chi = \mu \sec \alpha$ . Тогда возмущающий потенциал представится в виде

$$-T = \int_{\omega} \chi L \rho'^2 d\omega, \quad (2.7)$$

где  $d\omega$  — элементарный телесный угол. Уравнение (2.6) может быть записано:

$$\frac{2\pi\chi \cos^2 \alpha}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \int_{\omega} \chi F \rho'^2 d\omega = \delta\rho, \quad (2.8)$$

где  $F = 6L - \frac{3}{2r} + \frac{\rho'^2 - \rho^2}{2r^3}$ . Для решения интегрального уравнения (2.8) возьмем другую краевую поверхность  $\bar{\Sigma}$ , для которой радиус-вектор  $\bar{\rho} = R + kH$ , где  $0 \leq k \leq 1$ . Предположим, что аномалии  $\delta\rho$  заданы на  $\bar{\Sigma}$ , тогда получаем некоторый другой вспомогательный потенциал  $\bar{T}$ . Согласно (2.7)

$$-\bar{T} = \int_{\omega} \bar{\chi} \bar{L} \bar{\rho}'^2 d\omega, \quad (*)$$

где  $\bar{\chi}$  — новая плотность простого слоя, которая должна удовлетворять интегральному уравнению, аналогичному (2.8), то есть уравнению

$$\frac{2\pi\bar{\chi} \cos^2 \bar{\alpha}}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{\rho}^2} \int_{\omega} \bar{\chi} \bar{F} \bar{\rho}'^2 d\omega = \delta\rho, \quad (2.9)$$

$$\bar{F} = 6\bar{L} - \frac{3}{2r} + \frac{\bar{\rho}'^2 - \bar{\rho}^2}{2r^3}.$$

Так как  $\text{tg} \bar{\alpha} = k \text{tg} \alpha$  [3], то при  $\alpha < 45^\circ$  для всех  $k$  в ранее указанных пределах  $\cos^2 \bar{\alpha} = 1 - k^2 \text{tg}^2 \alpha + k^4 \text{tg}^4 \alpha + \dots$ , а

$$\bar{r} = r_0 \left[ 1 + \frac{k}{2} \left( \frac{H' + H}{R} \right) + \frac{k^2}{2} \chi^2 - \frac{1}{4} k^3 \chi^2 \left( \frac{H' + H}{R} \right) - \frac{k^4 \chi^4}{8} + \dots \right],$$

где  $\chi = \frac{H' - H}{r_0}$ ,  $H'$  и  $H$  — нормальные высоты текущей и фиксированной точек,  $r_0$  — расстояние между точками на основной сфере, соответствующими текущей и фиксированной точкам  $\Sigma$ . Возмущающий потенциал  $\bar{T}$  и плотность  $\bar{\chi}$  представим рядами:

$$\bar{T} = \sum_0^{\infty} k^n T_n; \quad \bar{\chi} = \sum_0^{\infty} k^n \chi_n, \quad (2.10)$$

где  $\chi_n$  и  $T_n$  — пока неизвестные нам функции, не зависящие от  $k$ . Найдя  $T_n$  и  $\chi_n$ , легко получаем  $T$  и  $\chi$ , так как при  $k = 1$   $\bar{\Sigma}$  переходит в  $\Sigma$ , а  $\bar{T}$  и  $\bar{\chi}$  переходят в  $T$  и  $\chi$  соответственно; интегральное уравнение (2.9) переходит при этом в (2.8). Возмущающий потенциал  $T$  существует, как и плотность  $\chi$ , то есть ряды (2.10) сходятся при  $k = 1$ . А тогда при  $0 \leq k < 1$  они сходятся абсолютно, и с ними можно обращаться как с конечными суммами. Пред-

ставив  $\bar{L}$  в виде  $\sum_0^{\infty} k^n L_n$  и подставляя (2.10) в (\*), находим

$$-\sum_0^{\infty} k^n T_n = \int_{\omega} \left( \sum_0^{\infty} k^n \chi_n \right) \left( \sum_0^{\infty} k^n L_n \right) (R + kH')^2 d\omega. \quad (2.11)$$

В (2.11), приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $k$ , получаем систему равенств

$$\begin{aligned} -T_0 &= R^2 \int_{\omega} \chi_0 L_0 d\omega; \\ -T_n &= R^2 \int_{\omega} (\chi_0 L_n + \chi_1 L_{n-1} + \dots + \chi_n L_0) d\omega, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В этих выражениях, начиная с  $T_1$ , отброшены малые члены порядка  $T_0 \left( \frac{H'}{R} \right)$  и выше.

Для определения величин  $T_n$ , как следует из (2.12), необходимо найти величины  $\chi_n$ . Последние же могут быть получены из решений интегральных уравнений, нахождением которых мы сейчас займемся.

Уравнение (2.9) напишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{R} (1 - k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + k^4 \operatorname{tg}^4 \alpha + \dots) \times \\ & \times \left( \sum_0^{\infty} k^n \chi_n \right) \left[ 1 - k \left( \frac{H}{R} \right) + k^2 \left( \frac{H}{R} \right)^2 - \dots \right] - \\ & - \left[ 1 - 2k \left( \frac{H}{R} \right) + 3k^2 \left( \frac{H}{R} \right)^2 - \dots \right] \int_{\omega} \left( \sum_0^{\infty} \chi_n k^n \right) \times \\ & \times \left( \sum_0^{\infty} k^n F_n \right) \left[ 1 + 2k \left( \frac{H'}{R} \right) + k^2 \left( \frac{H'}{R} \right)^2 \right] d\omega = \delta p. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $k$ , получаем серию интегральных уравнений второго рода с одним и тем же ядром  $F_n$  при этом отброшены малые величины порядка  $\chi_0 \left( \frac{H}{R} \right)^2$  и выше. Итак, имеем

$$\frac{2\pi}{R} \chi_n - \int_{\omega} \chi_n F_0 d\omega = \delta p_n, \quad n(0, 1, 2 \dots), \quad (2.13)$$

$$\text{где } \delta p_0 = \delta p, \quad \delta p_1 = \frac{2\pi}{R} \cdot \frac{H}{R} \chi_0 + \int_{\omega} \chi_0 F_1 d\omega - \frac{2}{R} \int_{\omega} (H - H') \chi_0 F_0 d\omega;$$

$$\begin{aligned} \delta p_2 = \frac{2\pi}{R} \chi_0 \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{2\pi}{R} \cdot \frac{H}{R} \chi_1 + \int_{\omega} (\chi_1 F_1 + \chi_0 F_2) d\omega - \\ - \frac{2}{R} \int_{\omega} (H - H') (\chi_1 F_0 + \chi_0 F_1) d\omega \end{aligned} \quad \text{и т. д.}$$

Будем искать решение интегрального уравнения (2.13) в виде  $\chi_n = \sum_{m=0}^{\infty} (\chi_n)_m$ , где  $(\chi_n)_m$  — сферическая функция  $m$ -го порядка. В результате получаем

$$\chi_n = (\chi_n)_1 - \frac{R}{64\pi^2} \int_{\omega} \delta p_n d\omega + \frac{R}{16\pi^2} \int_{\omega} \Phi(\psi) \delta p_n d\omega,$$

где  $\Phi(\psi) = \sum_2^{\infty} \frac{(m+1)(2m+1)^2}{(m-1)(m+4)} P_m(\cos \psi)$ , а  $P_m(\cos \psi)$  — полином Лежандра степени  $m$ ;  $(\chi_n)_1$  пока остается произвольной. В замкнутой форме  $\Phi(\psi)$  может быть записана:

$$\begin{aligned} \Phi(\psi) = \frac{397}{20} - \frac{237}{25} \cos \psi - \frac{134}{5} \sin \frac{\psi}{2} - \frac{147}{2} \cos^2 \psi + \\ + 49 \sin \frac{\psi}{2} \cos \psi + 147 \sin \frac{\psi}{2} \cos^2 \psi - \frac{3}{\sin \frac{\psi}{2}} - \end{aligned}$$

$$- \frac{18}{5} \cos \psi \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) - \frac{147}{10} (3 \cos \psi - 5 \cos^3 \psi) \ln \left( 1 + \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \right)$$

$$L_0 = \frac{1}{R} \ln \left( 1 + \frac{2R}{r_0} \right); \quad F_0 = 6L_0 - \frac{3}{2r_0};$$

$$L_1 = \frac{\alpha}{R}; \quad F_1 = 6L_1 + \frac{3}{4r_0} \left( \frac{H' + H}{R} \right) + \frac{R\alpha}{r_0^2};$$

$$L_2 = -\frac{\kappa^2 r_0 + 4H\kappa}{4R^2}; \quad F_2 = 6L_2 + \frac{3\kappa^2}{4r_0} - \frac{\kappa(H' + H)}{r_0^2};$$

$$L_3 = -\frac{\kappa^3}{6R}; \quad F_3 = 6L_3 - \frac{9\kappa^2}{8r_0} \left( \frac{H' + H}{R} \right) - \frac{3R}{2r_0^2} \kappa^3.$$

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОПРАВОЧНОГО ЧЛЕНА В ОСНОВНОМ КРАЕВОМ УСЛОВИИ

Для вычисления небольшого слагаемого в (2.1)  $\frac{2}{\gamma} \left( \frac{\partial T}{\partial m} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial m \partial \rho} + \frac{\partial T}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial q \partial \rho} \right)$  нужно знать возмущающий потенциал и его производные в приближенном виде. Если за приближенное значение потенциала примем главный член  $T_0$  в его разложении, то для вычисления  $T_0$  не понадобится решать интегральные уравнения, так как выражение  $T_0$  через  $\Delta\rho$  уже найдено ранее [1]. На самом деле, решая задачу по определению фигуры геоида, мы получим краевое условие на сфере для определения возмущающего потенциала. Если не требовать равенства масс геоида и уровенного эллипсоида и принять совпадающими центры масс, то получаем

$$T_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \Delta\rho \left[ \Omega(\psi) - \frac{1}{4} \right] d\sigma - \frac{3}{2} (U_0 - W_0). \quad (3.0)$$

Вне сферы радиуса  $R$

$$T_0(\rho) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \Delta\rho \left[ \Omega(\rho, \psi) - \frac{R}{4\rho} \right] d\sigma - \frac{3}{2} (U_0 - W_0) \frac{R}{\rho}.$$

Отсюда имеем в точках основной сферы

$$\frac{\partial T_0}{\partial \rho} = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \Delta\rho \left[ \Gamma(\psi) + \frac{1}{4R} \right] d\sigma + \frac{3}{2} \left( \frac{U_0 - W_0}{R} \right), \quad (3.1)$$

где  $\Gamma(\psi) = \left. \frac{\partial \Omega(\rho, \psi)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R}$ . Дифференцируя (3.1) по  $m$  и  $q$ , получаем после изменения порядка дифференцирования

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial m \partial \rho} = \frac{\partial \left( \frac{\partial T_0}{\partial \rho} \right)}{R \partial \psi} = -\frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} \Delta\rho \frac{d\Gamma}{d\psi} \cos \bar{\alpha} d\sigma, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial q \partial \rho} = \frac{\partial \left( \frac{\partial T_0}{\partial \rho} \right)}{R \cos \varphi \partial \lambda} = -\frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} \Delta\rho \frac{d\Gamma}{d\psi} \sin \bar{\alpha} d\sigma. \quad (3.3)$$

Здесь  $\varphi$  и  $\lambda$  — широта и долгота точки на сфере  $\sigma$ , а  $\bar{\alpha}$  — ее азимут. Из (3.0) имеем

$$\frac{\partial T_0}{\partial m} = -\frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} \Delta\rho \frac{d\Omega}{d\psi} \cos \bar{\alpha} d\sigma, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial q} = -\frac{1}{4\pi R} \int_{\sigma} \Delta\rho \frac{d\Omega}{d\psi} \sin \bar{\alpha} d\sigma. \quad (3.5)$$

Итак, все необходимое для вычисления поправочного члена в (2.1) дается формулами (3.2), (3.3), (3.4) и (3.5).

Результаты, полученные в [1], позволяют несколько упростить решение основной задачи данной работы. На самом деле, если принять  $H = H' = 0$ , то краевое условие (2.2) будет задано в точках поверхности сферы радиуса  $R$ , и мы придем только к одному интегральному уравнению



$\frac{2\pi}{R} \chi_0 - \int_{\omega} \chi_0 F_0 d\omega = \delta\rho$ . Решение краевой задачи будет согласно (2.7) —

$-R^2 \int_{\omega} \chi_0 L_0 d\omega$ , а раньше мы уже получили это решение в виде

$-\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \delta\rho \left[ \Omega(\psi) - \frac{1}{4} \right] d\sigma + X_1$ . Правда, там отсутствовали в потенци-

але гармонике нулевого и первого порядков, здесь же мы их удерживаем. Этим самым мы не предполагаем равенства масс Земли и эллипсоида, а также не предполагаем совпадения центров масс обоих тел. Итак, имеем

$$R^2 \int_{\sigma} \chi_0 L_0 d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \delta\rho \left[ \Omega(\psi) - \frac{1}{4} \right] d\sigma + X_1. \quad (3.6)$$

Полагая в краевом условии вместо  $\delta\rho$   $\delta\rho_1$ , а затем  $\delta\rho_2 \dots$ , можем на основании предыдущего получить

$$R^2 \int_{\sigma} \chi_1 L_0 d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \delta\rho_1 \left[ \Omega(\psi) - \frac{1}{4} \right] d\sigma + X'_1 \quad \text{и т. д.} \quad (3.7)$$

Так как  $T = T_0 + T_1 + \dots$ , то согласно (2.12), (3.4), (3.7) можем написать

$$T = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} (\Delta\rho - \delta\rho_1 - \delta\rho_2 - \dots) \left[ \Omega(\psi) - \frac{1}{4} \right] d\sigma -$$

$$- \frac{3}{2} (U_0 - W_0) + Y_1 - \int_{\sigma} \chi_0 (L_1 + L_2 + \dots) d\sigma -$$

$$- \int_{\sigma} \chi_1 (L_1 + L_2 + \dots) d\sigma - \int_{\sigma} \chi_2 (L_1 + L_2 + \dots) d\sigma + \dots \quad (3.8)$$

Здесь  $Y_1$  — произвольная сферическая функция первого порядка. Формула (3.8) и решает поставленную задачу.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Громов С. В. Определение фигуры Земли через аномалии вертикального градиента ускорения силы тяжести. Уч. зап. Ленинград. ун-та, № 307, сер. мат. наук, вып. 36, Л., 1962.
2. Мигаль Н. К. Теория совместного определения фигуры и размеров Земли. Научн. зап. Львов. политехн. ин-та, сер. геодез., № 1, Львов, 1949.
3. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 131, Геодезиздат, М., 1960.
4. Молоденский М. С. Основные вопросы геодезической гравиметрии. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 42, Геодезиздат, М., 1945.
5. Монин И. Ф. Об определении топографической поверхности Земли по аномалиям вертикального градиента силы тяжести. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 4, Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1966.
6. Монин І. Ф. Про визначення фігури Землі за аномаліями вертикального градієнта сили тяжіння. Доповіді АН УРСР, сер. Б, 4, Київ, 1968.
7. Субботин М. Ф. Курс небесной механики, т. III. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
8. Stokes G. G. On the variation of gravity at the surface of the Earth. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, v. 8, 1849.

Работа поступила 25 марта 1971 года  
Рекомендована кафедрой небесной механики  
Ленинградского университета.