УДК 528.721.1(523.43)

Л. И. ПЕРМИТИНА

ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЛИПСА, АППРОКСИМИРУЮЩЕГО ИЗОБРАЖЕНИЕ ГОРИЗОНТА НА КОСМИЧЕСКОМ СНИМКЕ ПЛАНЕТЫ

По космическим снимкам линии видимого горизонта (лимба) планеты можно изучать фигуру ее физической поверхности. Изображение лимба, являющееся проекцией одного из сечений планеты на картинную плоскость снимка, аппроксимируем эллипсом

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+1=0. \qquad (1)$$

Параметры такого эллипса могут быть использованы как исходные данные для определения параметров эллипсоида, аппроксимирующего фигуру физической поверхности планеты.

Точность вычисления параметров эллипсоида зависит от того, насколько точно известно положение космического аппарата в момент фотографирования, и от точности, с какой вычислены параметры эллипса. Коэффициенты уравнения эллипса a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, полученные из решения по способу наименьших квадратов системы нелинейных уравнений вида (1) для совокупности измеренных точек на линии лимба, позволяют определить координаты x_0, y_0 центра аппроксимирующего эллипса и угла наклона ν_x, ν_y плоскости снимка относительно оси конуса проектирующих лучей

$$x_0=\frac{a_{11}a_2-a_{22}a_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}; \quad y_0=\frac{a_{12}a_1-a_{11}a_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}; \qquad (2)$$

$$\nu_x=\arcsin\frac{x_0}{\sqrt{f^2+x_0^2+y_0^2}}; \; \nu_y=\arcsin\frac{y_0}{\sqrt{f^2+y_0^2}}.$$

Сжатие эллипса α и угол разворота A осей эллипса относительно системы координат снимка вычисляют по формулам

$$\alpha=1-\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}; \quad A=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\lambda_2-a_{11}}{a_{12}}\right). \qquad (3)$$

Здесь $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ — корни характеристического уравнения эллипса

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=0. \qquad (4)$$

Оценку точности вычисленных величин выполняем по известным формулам способа наименьших квадратов. Корреляционные матрицы оценок вычисленных величин K_{x_0,y_0}, K_{ν_x,ν_y} и $K_{\alpha,A}$ находим по матрице Q оценок коэффициентов уравнения эллипса, являющейся обратной матрицей системы нормальных уравнений, из решения которой получены коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2:

$$K = D^T Q D. \tag{5}$$

Матрица D для K_{x_0,y_0} составлена из частных производных функций x_0 и y_0 по пяти коэффициентам эллипса:

$$
\begin{gathered}
d_{11} = \frac{\partial x_0}{\partial a_{11}} = \frac{-x_0 a_{22}}{c};\quad d_{12} = \frac{\partial y_0}{\partial a_{11}} = \frac{x_0 a_{12}}{c};\\
d_{21} = \frac{\partial x_0}{\partial a_{12}} = \frac{x_0 a_{12} - y_0 a_{22}}{c};\quad d_{22} = \frac{\partial y_0}{\partial a_{12}} = \frac{-x_0 a_{11} + y_0 a_{12}}{c};\\
d_{31} = \frac{\partial x_0}{\partial a_{22}} = \frac{-y_0 a_{12}}{c};\quad d_{32} = \frac{\partial y_0}{\partial a_{22}} = \frac{-y_0 a_{11}}{c};\\
d_{41} = \frac{\partial x_0}{\partial a_1} = \frac{-a_{22}}{c};\quad d_{42} = \frac{\partial y_0}{\partial a_1} = \frac{-a_{12}}{c};\\
d_{51} = \frac{\partial x_0}{\partial a_2} = \frac{a_{12}}{c};\quad d_{52} = \frac{\partial y_0}{\partial a_2} = \frac{-a_{11}}{c}.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Здесь $c = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

Для вычисления $K_{\alpha,A}$ элементами матрицы D являются частные производные от функций α и A по трем коэффициентам уравнения, так как сжатие и разворот ищем для центрального эллипса, уравнение которого содержит три коэффициента:

$$
\begin{gathered}
a_{11} = \frac{\partial \alpha}{\partial a_{11}} = \frac{2\,a_{22}(a_{11} - a_{22}) - 4\,a_{12}^2}{(a_{11} + a_{22})^2 \cdot g};\\
d_{21} = \frac{\partial \alpha}{\partial a_{12}} = \frac{4\,a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) \cdot g};\\
d_{31} = \frac{\partial \alpha}{\partial a_{22}} = \frac{2\,a_{11}(a_{11} - a_{22}) + 4\,a_{12}^2}{(a_{11} + a_{22})^2 \cdot g};\\
d_{12} = \frac{\partial A}{\partial a_{11}} = -\frac{a_{12}}{g^2};\\
d_{22} = \frac{\partial A}{\partial a_{12}} = \frac{a_{11} - a_{22}}{g^2};\\
d_{32} = \frac{\partial A}{\partial a_{22}} = \frac{a_{12}}{g^2}.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Здесь $g = \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4\,a_{12}^2}$.

Поскольку углы ν_x и ν_y вычисляют как функции от величин x_0, y_0, то матрицу K_{ν_x, ν_y} получают из уравнения

$$K_{\nu_x, \nu_y} = D^T K_{x_0, y_0} D. \tag{8}$$

Матрица K_{x_0,y_0} получена по формулам (5) и (6), а элементы матрицы D как частные производные от функций ν_x и ν_y по x_0 и y_0:

$$d_{11} = \frac{\partial \nu_x}{\partial x_0} = \frac{\sqrt{f^2 + y_0^2}}{f^2 + x_0^2 + y_0^2};$$

$$d_{21} = \frac{\partial \nu_x}{\partial y_0} = \frac{-x_0 y_0}{\sqrt{f^2 + y_0^2}\,(f^2 + x_0^2 + y_0^2)}; \tag{9}$$

$$d_{12} = \frac{\partial \nu_y}{\partial x_0} = 0;$$

$$d_{22} = \frac{\partial \nu_y}{\partial y_0} = \frac{f}{f^2 + y_0^2}.$$

Средние квадратические ошибки определения величин x_0, y_0, ν_x, ν_y, α, A вычислены умножением соответствующих элементов корреляционных матриц на среднеквадратические ошибки единицы веса.

Приведенные выше формулы были реализованы в программе «Лимб», по которой вычисляются параметры эллипса и выполняются оценки их точности. Были осуществлены расчеты для фототелевизионных снимков лимбов Марса по материалам, полученным с космического аппарата «Марс-3». Измерение координат точек лимба Марса выполнялись на стереокомпараторе «Цейс» с точностью 0,01 мм, все измерения приводились к системе координат снимка, вводились поправки за геометрические искажения фототелевизионной системы, за деформацию фотоматериала. Результаты вычислений параметров аппроксимирующего эллипса с σ оценкой их точности для снимков лимбов Марса приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры аппроксимирующего эллипса для снимков лимбов Марса

Номер негатива	ν_x	ν_y	α	A	σ_{x_0}, мм	σ_{y_0}, мм	σ_{ν_x}	σ_{ν_y}	σ_α	σ_A
22	20,5′	27,4′	0,005	—78°	0,11	0,11	1′	1′	0,0005	6,5°
13	56,0	22,0	0,006	28	0,26	0,16	2	1,3	0,001	3,5
15	45,3	23,0	0.017	38	0,11	0,11	1	1	0,001	1,5
21	40,0	22,6	0,020	11	0,11	0,11	1	1	0,0005	1,5
39	26,0	—1°,1′	0,04	—17,5	4,0	0.4	5	0,5	0,0004	1,0
88	53,0	—13′7	0,007	4,1	0,36	0,25	3	2	0,0003	1,3
93	—1°23′	—22,7	0,01	—31,3	0,18	0,15	1,5	1	0,0007	1,3

Таблица 2

Параметры эллипса для различных моделей снимков лимбов

Номер варианта	Длина дуги эллипса	Положение начальной точки φ_0	Число точек m	Исходное сжатие α	σ_{x_0}, мм	σ_{y_0}, мм	$\sigma_{\nu x}$	$\sigma_{\nu y}$	Вычисленное сжатие α	σ_α	Азимут A	σ_A
1	360°	0°	8	$\frac{1}{233}$	0,02	0,02	12″	12″	$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{300000}$	9′	3,0°
2	180	0	100	$\frac{1}{233}$	0,02	0,1	15	1,5′	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{10000}$	84°	3,5
3	360	0	200	$\frac{1}{233}$	0,01	0,01	6	6″	$\frac{1}{238}$	$\frac{1}{500000}$	88	2,4
4	216	0	120	$\frac{1}{233}$	0,02	0,06	12	30	$\frac{1}{263}$	$\frac{1}{10000}$	5	2,5
5	216	90	120	$\frac{1}{233}$	0,05	0,03	30	15	$\frac{1}{234}$	$\frac{1}{10000}$	—30	2,5
6	120	30	80	$\frac{1}{233}$	0,1	0,5	1′	4,5′	$\frac{1}{180}$	$\frac{1}{10000}$	—32	2
7	120	100	80	$\frac{1}{100}$	0,5	0,07	4	35″	$\frac{1}{94}$	$\frac{1}{50000}$	—1°05′	1
8	150	30	15	$\frac{1}{50}$	0,15	0,06	2′	5′	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{300000}$	—8	1
9	360	0	37	$\frac{1}{100}$	0,026	0,026	13″	13″	$\frac{1}{106}$	$\frac{1}{2000}$	26	2
10	360	0	37	0	0,025	0,026	13	13	$\frac{1}{2000}$	$\frac{1}{1000}$	83	34
11	180	0	19	0	0,05	0,27	26	2,3′	$\frac{1}{2000}$	$\frac{1}{1000}$	—50	22

Из анализа результатов табл. 1 можно сделать выводы, что параметры эллипса для большинства снимков получены с точностью, достаточной для выполнения аналитического трансформирования снимков и дальнейшего изучения по ним фигуры физической поверхности и рельефа Марса.

Для проведения анализа ожидаемых точностей вычисления параметров аппроксимирующего эллипса в зависимости от длины дуги лимба, количества измеренных точек, углов наклона снимка, расположения измеряемого участка лимба относительно осей эллипса, были разработаны алгоритм и программа «Эллипс», по которым на ЭВМ осуществлялось математическое моделирование снимка лимба планеты. При построении модели задавались величины $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, число точек лимба m, положение начальной точки лимба (полярный угол φ_0), длина дуги лимба, углы ν_x, ν_y наклона снимка, фокусное расстояние съемочной камеры f. Исходные данные изменялись в определенных пределах и разных сочетаниях, что позволило получить различные модели лимбов. По величинам a, b, m, φ_0 вычисляются прямоугольные координаты точек эллипса в горизонтальной плоскости. Затем координаты пересчитываются по заданным углам наклона снимка на плоскость, повернутую на углы ν_x, ν_y. Далее в координаты наклонного эллипса вносим случайные нормально распределенные числа с дисперсией от 0 до $\pm 0{,}05$ мм, имитирующие ошибки измерений. Полученный массив координат считаем координатами точек лимба и используем как исходный для программы «Лимб».

Результаты вычислений для различных моделей лимба приведены в табл. 2. Оценки точности полученных параметров σ по программе «Лимб» можно рассматривать только по отношению к внутренней сходимости алгоритма, значения их будут несколько завышенными, так как не учитывалась погрешность приближения физической поверхности планеты эллипсоидом вращения, а в модель лимба не вводились случайные поправки за рельеф. При моделировании были заданы величины: $f = 400$ мм, $\nu_x = 55'$; $\nu_y = 5'$; $\tilde{a} = 70$ мм.

Анализ табл. 2 дает возможность высказать ряд замечаний и рекомендаций по использованию снимков лимбов планет для определения параметров аппроксимирующего эллипса методом специальной фотограмметрической обработки:

1. Увеличение числа измеренных точек лимба повышает точность σ определения параметров эллипса (варианты 1, 3, 9), но до некоторого предела. Дальнейшее увеличение количества точек при большом объеме измерительных работ не дает существенного повышения точности (вариант 3). Необходимо исходить из реального соотношения между числом точек и ожидаемой точностью определения искомых параметров.

2. Длина дуги лимба, измеряемая на снимке, влияет на точность σ определения параметров эллипса (варианты 1, 2, 4, 6).

Особенно низкая точность определения параметров получена для лимбов с длиной дуги, меньшей 150° (варианты 2, 6, 8).

3. Точность определения искомых параметров зависит от расположения измеряемой дуги лимба относительно осей эллипса. В случае, если дуга не пересекает одной из осей или пересекает ось только в одной точке, плохо отыскивается связанный с этой осью параметр (варианты 6, 7, 8).

4. Угол разворота осей эллипса устанавливается менее точно, чем все остальные параметры, так как точность его определения зависит от величины сжатия эллипса (варианты 1, 9, 10).

Таким образом, в фотограмметрическую обработку с целью определения параметров аппроксимирующего эллипса рекомендуется включать снимки лимбов планет с длиной дуги лимба не менее 150°. Число измеренных точек должно быть достаточно велико. Предпочтительно, чтобы лимб располагался симметрично относительно осей аппроксимирующего эллипса. Полученные параметры эллипса используются для следующего этапа фотограмметрической обработки снимков лимбов — определения параметров эллипсоида, аппроксимирующего фигуру изучаемой из космоса планеты.

Работа поступила в редколлегию 4 октября 1975 года. Рекомендована лабораторией аэрофотометодов географического факультета Московского государственного университета.