

УДК 525.731

И. Ф. КУШТИН

**РЕФРАКЦИЯ СВЕТОВЫХ ЛУЧЕЙ В АТМОСФЕРЕ  
С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

До недавнего времени вопросами рефракции световых лучей занимались преимущественно для учета угловых искажений, которые возникают при астрономических и геодезических наблюдениях в атмосфере Земли. При этом наблюдаемые объекты располагались или в бесконечности, или вблизи поверхности Земли. Трудность строгого решения проблемы рефракции заключается в том, что параметры атмосферы изменяются во времени и пространстве, причем эти изменения содержат как регулярно изменяющуюся, так и случайную компоненту; для строгого решения задачи необходимо иметь для данного момента наблюдения информацию о состоянии атмосферы на всем пути светового луча, что в настоящее время невыполнимо.

Вследствие этого при выводе формул углов рефракции для упрощения часто полагают, что слои воздуха в атмосфере являются плоскими или сферическими, а распределение параметров атмосферы с высотой подчиняется определенным законам, которые, как правило, справедливы только для средних атмосферных условий. Гипотеза о плоском расположении слоев воздуха одинаковой плотности позволяет получать углы рефракции с достаточной для практических целей точностью (1—3"), если зенитные расстояния не превышают 70—75°. В таких случаях согласно теореме Ориани — Лапласа значение угла астрономической рефракции практически зависит только от показателя преломления в точке наблюдения. При зенитных расстояниях, больших 70—75°, учет сферичности слоев воздуха одинаковой плотности приводит к большим ошибкам.

Для модели атмосферы, в которой слои воздуха одинаковой плотности считаются сферическими, решение дифференциального уравнения рефракции, то есть интегрирование, может быть выполнено или разложением подынтегральной функции в ряд, или численным методом. В первом случае под знаком интеграла получается знакпеременный ряд, убывающий, пока зенитное расстояние меньше 90°. Но при  $\zeta$ , близком к 90°, он так медленно сходится, что им практически нельзя пользоваться. Метод численного интегрирования связан с разделением атмосферы на слои небольшой толщины, требует большой информации о состоянии атмосферы в точках траектории светового луча и большого объема вычислительных работ. Следовательно, даже для упрощенной сферической модели атмосферы задача является сложной и строго не решается.

В настоящее время в связи с успешным освоением космического пространства и возможностью выполнять различного рода измерения не только на различных высотах в атмосфере Земли, но и в атмосфере других планет возникла необходимость исследовать вопросы рефракции с более общих позиций, то есть получить формулы, которые позволяли бы учитывать искривление световых лучей в атмосфере с произвольными параметрами и газовым составом. Кроме того, важное значение приобретает наблюдение

при больших зенитных расстояниях движущихся с большой скоростью объектов, таких как спутники и ракеты. Качество результатов наблюдений во многом зависит от точности определения углов рефракции. При этом для быстрого и точного учета данных углов следует иметь достаточно строгие методы, не требующие большой информации и большого объема вычислительных работ.

С точки зрения фотограмметрии в связи с возможностью съемки с летательных аппаратов актуальное значение приобретает учет не только фотограмметрической рефракции, но и внутренней рефракции, возникающей вследствие различных атмосферных условий внутри носителя и за его пределами, и дополнительной рефракции, вызываемой пограничным слоем вблизи летательного аппарата. Параметры пограничного слоя зависят от скорости летательного аппарата и его формы. Известно, что при гиперзвуковых скоростях вокруг летательного аппарата образуется ударная волна. В промежутке между ударной волной и поверхностью летательного аппарата значительно повышается давление и температура, происходит диссоциация воздуха — распад молекул на части. Атомарный кислород и азот взаимодействуют, образуя окись азота, то есть вблизи летательного аппарата протекают химические реакции, и воздух меняет свой химический состав. Следовательно, параметры и газовый состав свободной атмосферы, атмосферы в пограничном слое и внутри носителя аэрофотоаппарата могут быть различными, и это обстоятельство следует учитывать.

Естественно, проблема рефракции в свете решения новых задач значительно усложняется, тем более если поставить вопрос о получении формул рефракции, которые при минимальной информации о состоянии атмосферы и незначительном объеме вычислительных работ позволяли бы с достаточной точностью определять углы рефракции в атмосфере с произвольными параметрами и газовым составом при любых высотах и зенитных расстояниях. Исследованием этих вопросов и занимался автор [5—15]. Им получена формула угла полной рефракции, которым называют угол  $r_c$  между касательными к траектории светового луча в начальной и конечной точках, для атмосферы с произвольными параметрами и газовым составом

$$r_c = r'_c \operatorname{tg} \left[ \zeta - (\varepsilon - r_c) \frac{r'_f}{r'_c} \right], \quad (1)$$

где

$$r'_c = C_0 \left( \frac{p_g}{T_g} - \frac{p_a}{T_a} \right), \quad (2)$$

$$r'_f = C_0 \left[ \frac{R(p_g - p_a)}{g(H_a - H_g)} - \frac{p_a}{T_a} \right], \quad (3)$$

$\varepsilon$  — угол в центре планеты между направлениями на начальную и конечную точки траектории светового луча;  $\zeta$  — видимое зенитное расстояние;  $p_g, T_g; p_a, T_a$  — давление в *мм рт. ст.* и температура в градусах Кельвина в начальной и конечной точках траектории соответственно;  $R, g$  — удельная газовая постоянная атмосферы и ускорение силы тяжести на планете;  $H_a, H_g$  — высота конечной и начальной точек траектории светового луча ( $H_a > H_g$ ).

Для атмосферы с произвольным газовым составом

$$C_0 = \frac{N_0 \cdot T_0}{p_0} 10^{-6}, \quad (4)$$

где  $N_0$  — индекс преломления газовой среды при температуре  $T_0$  и давлении  $p_0$ . Или, если известны индексы преломления компонентов газовой среды, долевое содержание которых по объему  $v_i$ ,

$$C_0 = \frac{T_0}{p_0} 10^{-6} \sum_1^n N_i v_i, \quad (5)$$

причем, значения  $N_i$  и  $v_i$  определены при температуре  $T_0$  и давлении  $p_0$ . Удельная газовая постоянная  $R_c$  для атмосферы с произвольным газовым составом

$$R_c = \frac{\sum_1^n \rho_i v_i R_i}{\sum_1^n \rho_i v_i}, \quad (6)$$

где  $\rho_i$ ,  $v_i$ ,  $R_i$  — плотность компонента смеси газов, его объем и удельная газовая постоянная.

Для атмосферного влажного воздуха

$$C_0 = (A + B\lambda^{-2} + C\lambda^{-4}) \left(1 - 0,132 \frac{e}{p}\right) \frac{T_0}{p_a}. \quad (7)$$

Для атмосферы Земли при  $\lambda = 0,530$  мк (зеленая часть спектра),  $g = 9,81$  м/сек<sup>2</sup>,  $R = 287$  м<sup>2</sup>/сек<sup>2</sup> · град,  $T_0 = 273,16^\circ$  К,  $p = 760$  мм рт. ст. Для сухого воздуха  $C_0 = 21,77$  сек дуги град/мм рт. ст., а для влажного воздуха при  $e = 10$  мм рт. ст.,  $p = 760$  мм рт. ст.

$$C_0 = 21,73 \text{ сек дуги град/мм рт. ст.},$$

то есть в обычных условиях разница в значениях  $C_0$  для сухого и влажного воздуха незначительная. Для атмосферы Земли при указанных значениях аргументов вместо (2) и (3) для сухого воздуха получено

$$r'_c = 21,77'' \left( \frac{p_g}{T_g} - \frac{p_a}{T_a} \right); \quad (8)$$

$$r'_i = 0,6369'' \frac{p_g - p_a}{H_a - H_g} - 21,77'' \frac{p_a}{T_a}; \quad (9)$$

где  $H_a$ ,  $H_g$  — высота в километрах.

Угол  $(\varepsilon - r_c)$ , входящий в формулу (1), можно определить, используя выражение

$$\sin [\zeta - (\varepsilon - r_c)] = \frac{(a + H_g) \left(1 + \frac{C_0 p_g}{T_g}\right)}{(a + H_a) \left(1 + \frac{C_0 p_a}{T_a}\right)} \sin \zeta, \quad (10)$$

где  $a$  — радиус планеты.

Значения углов полной рефракции, вычисленные по формуле (1), сравнивались с табличными данными И. Г. Колчинского [2—4]. Сравнения показали, что при зенитном расстоянии до  $84^\circ$  разность не превышает  $0,7''$ , а при  $\zeta = 88^\circ$  она меньше  $3''$  при высоте до 20 км и возрастает при больших высотах. Так как значения полной рефракции для условий стандартной атмосферы получены И. Г. Колчинским по строгим формулам методом численного интегрирования на ЭВМ, то, полагая эти данные точными, видим, что формула (1) позволяет в земной атмосфере определять значения углов полной рефракции с высокой точностью при зенитных расстояниях до  $84^\circ$ , а при высотах до 20 км и при  $\zeta = 88^\circ$ .

Точность определения  $r_c$  можно значительно повысить при любых высотах и практически при любых зенитных расстояниях, если атмосферу разбить на слои 1, 2, ...,  $n$  и вычисления производить по формуле

$$r_c = \sum_1^n r'_{ci} \operatorname{tg} \left[ \zeta_i - (\varepsilon_i - r_{ci}) \frac{r'_{i+1}}{r'_{ci}} \right], \quad (11)$$

где  $\zeta_{i+1} = \zeta_i - (\varepsilon_i - r_{ci})$  находится из выражения (10). Например, разбив стандартную атмосферу ГОСТ 4401—64 на участки 0—5, 5—10, 10—20, 20—40 км, после вычислений по формуле (11) имеем угол  $r'_c = 1067,6''$ , который отличается от полученного И. Г. Колчинским на  $+0,3''$ .

Если в формуле (11) верхняя граница последнего слоя будет совпадать с границей атмосферы, то по ней можно находить углы астрономической рефракции  $r_a$  с высокой точностью практически для любых зенитных расстояний. Значения углов астрономической рефракции, вычисленные по формуле (11) для атмосферы ГОСТ 4401—64 при ее разделении на 4 слоя, сравнивались с данными таблиц Пулковской обсерватории. Сравнения показали, что при зенитном расстоянии  $87^\circ$  разность равна  $+0,7''$ ; при  $88^\circ$  —  $+1,6''$ ,  $89^\circ$  —  $+8,7''$  и при  $90^\circ$  она достигает  $1'$ . Сравнительно большие разности при зенитных расстояниях  $89$  и  $90^\circ$  можно объяснить не только отличием формулы (11) от теории Г. Н. Гюльдена, на основании которой составлены пулковские таблицы, но также и тем, что модель атмосферы, принятая при вычислении пулковских таблиц, не соответствует атмосфере ГОСТ 4401—64.

Угол фотограмметрической рефракции  $r_f$ , равный углу при центре проектирования  $S$  между касательной к траектории светового луча  $AS$  и прямой, соединяющей центр проектирования  $S$  с точкой  $A$ , практически при любых высотах и зенитных расстояниях можно определить следующим способом. Из выражения (10), в котором  $\xi - (\varepsilon - r_c) = \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между надирным и проектирующим лучами, находим  $\xi$  и  $\varepsilon - r_c = \xi - \varphi$ . Затем по формуле (11) вычисляем угол  $r_c$ . Прибавив к  $(\varepsilon - r_c)$  полученное значение  $r_c$ , имеем  $\varepsilon$ . После этого угол фотограмметрической рефракции можно определить по строгим формулам:

$$r_f = \varphi - \operatorname{arctg} \frac{(a + H_g) \sin \varepsilon}{(a + H_a) - (a + H_g) \cos \varepsilon}; \quad (12)$$

$$\operatorname{tg} r_f = \frac{(a + H_a) \sin \varphi - (a + H_g) \sin (\varphi + \varepsilon)}{(a + H_a) \cos \varphi - (a + H_g) \cos (\varphi + \varepsilon)}. \quad (13)$$

Аналогично угол планетной рефракции, равный углу при точке  $A$  между касательной к траектории светового луча  $AS$  и прямой  $AS$ , можно определить по строгим формулам:

$$r_g = \operatorname{arctg} \frac{(a + H_a) \sin \varepsilon}{(a + H_a) \cos \varepsilon - (a + H_g)} - \xi; \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} r_g = - \frac{(a + H_a) \sin (\xi - \varepsilon) - (a + H_g) \sin \xi}{(a + H_a) \cos (\xi - \varepsilon) - (a + H_g) \cos \xi}. \quad (15)$$

Формула (14) предложена И. Г. Колчинским в [2—4]. Контролем может служить равенство

$$r_f + r_g = r_c.$$

Формулы (1) — (5), (7), (10) — (15) позволяют определять углы рефракции для атмосферы с произвольными параметрами и газовым составом. Для вычисления углов рефракции по этим формулам необходимо знать газовый состав атмосферы планеты, объемное содержание отдельных газов, радиус планеты, ускорение силы тяжести на планете и другие параметры, входящие в формулы рефракции.

При высотах порядка нескольких километров достаточно точные значения углов фотограмметрической и планетной рефракции можно получить по формулам:

$$\left. \begin{aligned} r_f &= r'_f \operatorname{tg} \left[ \varphi + (\varepsilon - r_c) \frac{r'_g}{r'_c} \right], \\ r_f &= r'_f \operatorname{tg} \left[ \xi - (\varepsilon - r_c) \frac{r'_f}{r'_c} \right], \\ r_g &= r'_g \operatorname{tg} \left[ \xi - (\varepsilon - r_c) \frac{r'_f}{r'_c} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Так, например, при высоте 5 км расхождения между вычисленными по формулам (16) значениями  $r_f$ ,  $r_g$  и данными И. Г. Колчинского не превышают 1" при  $\zeta = 86^\circ$ , достигая 1,9" и 1,7" при  $\zeta = 88^\circ$ . Следовательно, формулы (16) при малых высотах позволяют вычислять углы  $r_f$  и  $r_g$  довольно точно даже при зенитных расстояниях порядка  $88^\circ$ . С уменьшением высоты точность, вероятно, будет повышаться. При зенитных расстояниях до  $70^\circ$  при вычислении  $r_f$  и  $r_g$  с точностью до 1—1,5" во второй и третьей формулах (16) членом  $(\varepsilon - r_c) \frac{r_f}{r_c}$  можно пренебречь.

Разбивая атмосферу на слои, в пределах каждого из которых значения углов рефракции  $r_{fi}$  и  $r_{gi}$  можно определять с достаточной точностью по формулам (16), углы фотограмметрической и планетной рефракции для любых высот можно определить по формулам:

$$\begin{aligned} r_f &= \frac{1}{l} [(r_{f_1} + r_{g_1})l_1 + (r_{f_2} + r_{g_2})l_2 + \dots + (r_{f_{(n-1)}} + r_{g_{(n-1)}})l_{n-1} + r_{fn}l] = \\ &= \frac{1}{l} \sum_1^n (r_{fi} + r_{gi})l_i, \\ r_g &= \frac{1}{l} [(r_{f_1} + r_{g_1})l_1 + (r_{f_2} + r_{g_2})l_2 + \dots + (r_{f_{(n-1)}} + r_{g_{(n-1)}})l_{n-1} + r_{gn}l] = \\ &= \frac{1}{l} \sum_0^{n-1} (r_{fi} + r_{gi})l_i, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $r_{fi}$ ,  $r_{gi}$  — углы фотограмметрической и планетной рефракции в точке  $i$ , расположенной на границе слоев;  $l_i$ ,  $l'_i$  — расстояние от точки  $i$  до наблюдаемой (снимаемой) точки. При использовании формул (17), записанных в более общем виде, следует помнить, что в первой формуле  $r_{gn}$ , а во второй  $r_{f_0}$  принимаются равными 0.

При выводе формул углов рефракции предполагалось, что слои воздуха или смеси газов одинаковой плотности являются сферическими и параллельными урванной поверхности. В реальных условиях, особенно вблизи подстилающей поверхности, такое предположение часто не оправдывается: указанные слои воздуха в текущей точке могут иметь различные наклоны по отношению к урванной поверхности. Вследствие этого возникает боковая рефракция, и изменяется рефракция в вертикальной плоскости. Причиной наклона слоев, как известно, является в основном изменение температуры воздуха в горизонтальной плоскости, то есть горизонтальный градиент температуры. Последний может быть равен 0,01—0,02°/м и даже большей величине.

Исследования показали, что горизонтальный градиент температуры вызывает боковую рефракцию, значение которой возрастает приблизительно пропорционально  $\sec \zeta$  и изменение рефракции в вертикальной плоскости, возрастающее примерно пропорционально  $\sec^2 \zeta$ . С увеличением высот боковая фотограмметрическая рефракция и изменение фотограмметрической рефракции в вертикальной плоскости уменьшаются. При высоте  $H = 100$  км даже при горизонтальном градиенте температуры, вблизи подстилающей поверхности равном 0,04°/м, и зенитном расстоянии  $80^\circ$  боковая фотограмметрическая рефракция практически равна нулю, а изменение вертикальной фотограмметрической рефракции равно примерно 0,1" (при  $H = 1$  км угол боковой рефракции при этих же условиях равен 1,6", а изменение вертикальной — 9,2"). Боковая планетная (земная) рефракция и изменение планетной вертикальной рефракции с увеличением высот возрастает, достигая при  $H = 100$  км и отмеченных выше других условиях примерно 3 и 19"

соответственно. Исследования показали, что во время наблюдений объекта, расположенного на большой высоте, наклон атмосферных слоев и ошибки в параметрах атмосферы в промежуточных слоях вызывают примерно одинаковые искажения углов планетной (земной) и полной рефракции. На основании этого можно считать, что при наблюдениях объектов, расположенных на больших высотах, например, искусственных спутников Земли, целесообразно угол планетной (земной) рефракции определять по формуле

$$r_g = r_c - r_f.$$

$r_f$  вычисляется по приведенным формулам, а  $r_c$ , равный при высотах более 50 км углу астрономической рефракции, следует определять из наблюдений опорных звезд, зенитное расстояние и азимут которых примерно равны зенитному расстоянию и азимуту наблюдаемого летательного аппарата. При отличии зенитных расстояний углы  $r_{c0}$ , полученные из наблюдений опорных звезд, следует, очевидно, привести к зенитному расстоянию наблюдаемого объекта. Достаточно точно это можно сделать по формуле

$$r_c = r_{c0} \operatorname{ctg} \left[ \zeta_0 - (\varepsilon_0 - r_{c0}) \frac{r'_{f0}}{r'_{c0}} \right] \operatorname{tg} \left[ \zeta - (\varepsilon - r_c) \frac{r'_f}{r'_c} \right], \quad (18)$$

где параметры для опорной звезды отмечены индексом «0».

Чтобы выявить необходимую точность определения параметров атмосферы в конечных и промежуточных точках траектории светового луча, были выполнены соответствующие исследования. Анализ этих исследований позволил сформулировать теорему, согласно которой при зенитных расстояниях до  $70-75^\circ$  углы полной, фотограмметрической и земной (планетной) рефракций зависят от показателя преломления только в начале и конце траектории светового луча. Из этой теоремы, как частный случай, вытекает теорема Ориани—Лапласа для астрономической рефракции.

Кроме того, установлено, что в атмосфере Земли при вычислении углов рефракции с точностью до  $1-2''$  при зенитных расстояниях до  $86-87^\circ$  необходимо знать с высокой точностью метеорологические данные только в начале и конце траектории светового луча, а при высотах более  $40-50$  км — только в начале траектории. На границах промежуточных слоев достаточно знать средние для данной местности и высоты значения давления и температуры, причем нередко вместо средних значений можно принять данные таблицы стандартной атмосферы, то есть необходимость зондирования атмосферы отпадает. При зенитных расстояниях, больших  $87^\circ$ , требования к точности определения параметров атмосферы на границах слоев повышается, и при зенитных расстояниях, близких к  $90^\circ$ , эти параметры следует определять примерно с такой же точностью, как и для начальной и конечной точек траектории светового луча.

Экспериментальная проверка по материалам зондирования атмосферы и наблюдениям опорных звезд, выполненным в ГАО АН УССР [1] сотрудником обсерватории Н. А. Василенко, показала хорошую согласованность углов рефракции, вычисленных по приведенным формулам и полученных из наблюдений.

Теперь относительно внутренней рефракции. Формулы углов внутренней рефракции при произвольном расположении плоской границы между газовыми средами получены автором, а для частного случая, когда плоская граница параллельна плоскости прикладной рамки, — В. В. Погореловым. Кроме того, автором получены формулы углов внутренней рефракции для случаев, когда границей газовых сред является сфера, боковая поверхность круглого цилиндра и конуса. Эти формулы можно использовать и в том случае, когда газовый состав атмосферы внутри носителя аэрофотоаппарата отличается от газового состава наружной атмосферы.

Для учета пограничного слоя предполагается использовать формулы внутренней рефракции. Для определения параметров внутри пограничного слоя и формы его границы следует выполнить аэродинамические исследования носителя при условиях выполнения аэрофотосъемки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Василенко Н. А. Наблюдения астрономической рефракции в Голосееве на больших зенитных расстояниях. В сб. «Астрометрия и астрофизика», № 5, «Наукова думка», Киев, 1969.
2. Колчинский И. Г. Рефракция света в земной атмосфере. «Наукова думка», Киев, 1967.
3. Колчинский И. Г. Исследование рефракции света в земной атмосфере. Автореферат докт. дисс., Киев, 1969.
4. Колчинский И. Г., Курьянова А. Н., Шмелькина Е. Б. Таблицы поправок за рефракцию при наблюдении объектов в земной атмосфере. В сб. «Астрометрия и астрофизика (Вопросы атмосферной оптики)», № 5, «Наукова думка», Киев, 1969.
5. Куштин И. Ф. Рефракция световых лучей в атмосфере. Изв. вузов, геодезия и аэрофотосъемка, вып. 4, М., 1969.
6. Куштин И. Ф. Фотограмметрическая рефракция. «Геодезия и картография», № 11, 1966.
7. Куштин И. Ф. Исследование фотограмметрической рефракции и ее влияния на цепь пространственной фототриангуляции. Автореферат канд. дисс., МИИГАиК, М., 1967.
8. Куштин И. Ф. Рефракция световых лучей в атмосфере. «Недра», М., 1971.
9. Куштин И. Ф. Боковая и вертикальная фотограмметрические рефракции. Изв. вузов, геодезия и аэрофотосъемка, вып. 1, 1966.
10. Куштин И. Ф. Фотограмметрическая рефракция при съемке с больших высот. Изв. вузов, геодезия и аэрофотосъемка, вып. 4, 1966.
11. Куштин И. Ф. Учет влияния фотограмметрической рефракции на положение точек снимка. Изв. вузов, геодезия и аэрофотосъемка, вып. 2, 1967.
12. Куштин И. Ф. Учет нестабильности земной атмосферы при вычислении поправок за фотограмметрическую рефракцию. «Геодезия и картография», № 11, 1968.
13. Куштин И. Ф. Влияние цвета снимаемого объекта на фотограмметрическую рефракцию и разрешающую способность изображения. Изв. вузов, геодезия и аэрофотосъемка, вып. 5, 1966.
14. Куштин И. Ф. Возможные случаи отражения проектирующих лучей от границы воздушных сред с различной плотностью. Изв. вузов, геодезия и аэрофотосъемка, вып. 3, 1968.
15. Куштин И. Ф. Точность параметров атмосферы, необходимая для вычисления углов полной и астрономической рефракций при больших зенитных расстояниях. В сб. «Проектирование и производство работ в строительстве». Ростов-на-Дону, 1971.
16. Newcomb S. A. Compendium of Spherical Astronomy. New York, Mac — Millan, 1906.

Работа поступила 27 апреля 1971 года.  
Рекомендована кафедрой геодезии и проектирования дорог  
Ростовского инженерно-строительного института.