

УДК 528.32.35

НГУЕН ВАН ТЕУ
**ПОПЕРЕЧНЫЙ СДВИГ ПОЛОЖЕНИЯ ПУНКТОВ ЦЕПИ
 ЛИНЕЙНО-УГЛОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ,
 ПРОЛОЖЕННОЙ МЕЖДУ ТВЕРДЫМИ ПУНКТАМИ**

Пусть имеем цепь из n равносторонних треугольников (здесь n принято нечетным) с измерением всех углов и сторон (см. рисунок). Расположим эту цепь так, чтобы нижнее основание ее совпадало с осью ординат Y . Начало координат полагаем в исходном пункте 0 . Ходовую линию передачи

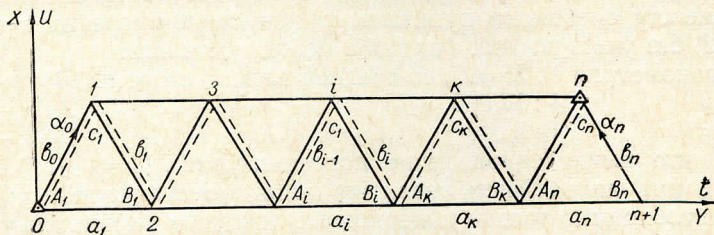


Схема цепи линейно-угловой триангуляции между твердыми пунктами.

дирекционных углов и приращения координат выбираем по связующим сторонам и отмечаем на рисунке пунктирной линией.

В этой цепи, как показано в [3], возникает n условий фигур, $2n$ синусных условий, одно условие дирекционных углов и два условия координат. Весовая функция для определения поперечного сдвига положения пункта с номером k (здесь k — нечетное) запишется так:

$$\frac{2}{s\sqrt{3}} du_k = \sum_{i=0}^{k-1} (\ln b_i) (-1)^i + \delta [+ (k-1)(C_1) - (k-2)(C_2) + \dots - (C_{k-1})], \quad (1)$$

где i — порядковый номер треугольника; s — длина стороны равносторонних треугольников; $(\ln b_i)$ — вероятнейшие поправки к натуральным логарифмам измеренных сторон; (C_i) — вероятнейшие поправки к измеренным углам, выраженные в радианной мере; $\delta = \text{ctg } 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Для совместного уравнивания измеренных углов и сторон необходимо определить их вес. Как написано в [3], для такой цепи можно принять вес измеренных углов равным единице, а вес логарифмов сторон равным $\frac{1}{q}$.

Причем

$$q = \left(\frac{m_s}{s} \cdot \frac{\rho''}{m_p} \right)^2, \quad (2)$$

где m_β , m_s — средние квадратические ошибки измеренных углов и сторон. Если обозначим

$$\nu = \frac{m_\beta''}{\rho''} : \frac{m_s}{s} \quad (3)$$

соотношение ошибки измеренных углов, выраженной в радианной мере, к относительной ошибке измеренных сторон), то имеем

$$q = \frac{1}{\nu^2}. \quad (4)$$

Для решения нормальных уравнений двухгрупповым методом отнесем в первую группу все условия фигур, во вторую — все остальные условия весовую функцию (1). После преобразования во второй группе n синусных условий имеют вид

$$-(\ln b_{i-1}) + (\ln a_i) - \delta(C_i) + \delta(B_i) + \omega_a = 0; \quad (5)$$

и синусных условий —

$$+(\ln b_i) - (\ln b_{i-1}) + \delta(B_i) - \delta(A_i) + \omega_b = 0; \quad (6)$$

условие дирекционных углов

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n [-(A_i) - (B_i) + 2(C_i)] (-1)^i + \omega_c = 0; \quad (7)$$

условие абсциссы

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\ln b_i) (-1)^i + \frac{\delta}{3} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) [(A_i) + (B_i) - 2(C_i)] (-1)^i + \omega_d = 0; \quad (8)$$

условие ординаты

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\ln b_i) + \delta [-(A_2) - (B_2) + 2(C_2) - (A_4) - (B_4) + 2(C_4) + \dots \dots - (A_{n-1}) - (B_{n-1}) + 2(C_{n-1})] + \omega_e = 0 \quad (9)$$

и весовая функция

$$\frac{2}{\sqrt{3}} du_k = \sum_{i=0}^{k-1} (\ln b_i) (-1)^i + \frac{\delta}{3} \sum_{i=1}^{k-1} (k-i) [(A_i) + (B_i) - 2(C_i)] (-1)^i. \quad (10)$$

Средний поперечный сдвиг определяется формулой

$$m_{u_k} = \pm \mu \sqrt{\frac{1}{P_{u_k}}}, \quad (11)$$

где μ — среднеквадратическая ошибка единицы веса; $\frac{1}{P_{u_k}}$ — обратный вес поперечного сдвига.

Если обозначим коэффициенты условных уравнений (5) через a , уравнений (6) — через b , уравнений (7) — через c , уравнений (8) — через d , уравнений (9) — через e и функцию (10) — через f_u , то можем найти $\frac{1}{P_{u_k}}$:

$$\left(\frac{2}{s\sqrt{3}}\right)^2 \frac{1}{P_{u_k}} = [qf_u f_u] - \sum_{i=1}^n \frac{[qa_i f_u \cdot (i-1)]^2}{[qa_i a_i \cdot (i-1)]} - \sum_{i=1}^n \frac{[qb_i f_u \cdot (n+i-1)]^2}{[qb_i b_i \cdot (n+i-1)]} - \frac{[qcf_u \cdot 2n]^2}{[qcc \cdot 2n]} - \frac{[qdf_u \cdot (2n+1)]^2}{[qdd \cdot (2n+1)]} - \frac{[qef_u \cdot (2n+2)]^2}{[qee \cdot (2n+2)]}. \quad (12)$$

Все знаменатели формулы (12) были выведены в [3], а именно:

$$[qa_i a_i \cdot (i-1)] = 2\gamma; \quad (13)$$

$$[qb_i b_i \cdot (n + i - 1)] \approx B; \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{2} (B_1 + \sqrt{B_1^2 - q^2});$$

$$B_1 = \frac{3}{2} \gamma - \frac{q^2}{2\gamma}; \quad \gamma = \delta^2 + q;$$

$$[qcc \cdot 2n] = + nC_1; \quad (15)$$

$$[qdd \cdot (2n + 1)] = + \frac{n(n^2 + 11)}{36} C_1; \quad (16)$$

$$[qee \cdot (2n + 2)] = + nE_1. \quad (17)$$

Коэффициенты C_1 и E_1 вычисляются эмпирическими формулами

$$C_1 = + 0,065v^2 - 0,414v + 0,789, \quad (18)$$

$$E_1 = + \frac{0,430}{v^2} + \frac{0,189}{v} - 0,014. \quad (19)$$

Определим остальные члены формулы (12). Из выражений (5), (6), (7), (8), (9) и (10) найдем

$$\begin{aligned} [qf_u f_u] &= kq + \frac{2}{3} \delta^2 [(k-1)^2 + (k-2)^2 + \dots + 2^2 + 1] = \\ &= kq + \frac{\delta^2}{9} k(k-1)(2k-1). \end{aligned} \quad (20)$$

При $1 \leq i \leq k$

$$[qa_i f_u] = (-1)^i [(k-i)\delta^2 + q]; \quad (21)$$

при $1 \leq i \leq k-1$

$$[qb_i f_u] = (-1)^i \cdot 2q; \quad [qb_k f_u] = -q; \quad (22)$$

при $(k+1) \leq i \leq n$

$$[qa_i f_u] = [qb_i f_u] = 0.$$

Далее

$$[qcf_u] = -\frac{2}{3} \delta [(k-1) + (k-2) + (k-3) + \dots + 1] = -\frac{1}{3} \delta k(k-1); \quad (23)$$

$$\begin{aligned} [qdf_u] &= kq + \frac{2}{3} \delta^2 [(k-1)(n-1) + (k-2)(n-2) + \dots + (n-k+1)] = \\ &= kq + \frac{\delta}{9} k(k-1)(3n-k-1); \end{aligned} \quad (24)$$

$$[qef_u] = -\frac{(k-1)^2}{2} \delta^2 + q. \quad (25)$$

Первые n синусных уравнений (5) не зависят друг от друга, поэтому при решении нормальных уравнений по схеме Гаусса имеем

$$[qa_i f_u \cdot (i-1)] = [qa_i f_u]; \quad 1 \leq i \leq n.$$

Для остальных членов

$$[qb_1 f_u \cdot n] = + \delta^2 t_1 + \left(\frac{q}{2\gamma} - \frac{3}{2} q \right); \quad (26)$$

$$[qb_2 f_u \cdot (n+1)] = + \delta^2 (-t_2 + t_1 r) - \left(\frac{q}{2\gamma} - \frac{3}{2} q \right) (1-r); \quad (27)$$

$$[qb_3 f_u \cdot (n+2)] = + \delta^2 (t_3 - t_2 r + t_1 r^2) + \left(\frac{q}{2\gamma} - \frac{3}{2} q \right) (1-r+r^2); \quad (28)$$

.....

и i нечетном

$$[qb_{if_u} \cdot (n + i - 1)] = + \delta^2 (+ t_i - t_{i-1}r + t_{i-2}r^2 - \dots + t_1r^{i-1}) + \left(\frac{q}{2\gamma} - \frac{3}{2}q \right) (1 - r + r^2 - \dots + r^{i-1}). \quad (29)$$

где i четное

$$[qb_{if_u} \cdot (n + i - 1)] = + \delta^2 (- t_i + t_{i-1}r - t_{i-2}r^2 + \dots + t_1r^{i-1}) - \left(\frac{q}{2\gamma} - \frac{3}{2}q \right) (1 - r + r^2 - \dots - r^{i-1}); \quad (30)$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{k-1}{2} + \frac{k-2}{2} \frac{q}{\gamma}; \\ t_2 &= \frac{k-2}{2} + \frac{k-3}{2} \cdot \frac{q}{\gamma}; \\ &\dots \dots \dots \\ t_{i-1} &= \frac{(k-i+1)}{2} + \frac{(k-i)}{2} \cdot \frac{q}{\gamma}; \\ t_i &= \frac{k-i}{2} + \frac{(k-i-1)}{2} \frac{q}{\gamma}; \quad r = \frac{q}{2B}. \end{aligned}$$

Проведя суммирование (29), (30), находим их общие выражения при $i \leq k-1$

$$[qf_u \cdot (n + i - 1)] = (-1)^i \left\{ G' \frac{1 - (-r)^i}{1+r} + H \frac{[i + (i+1)r + (-r)^{i+1}]}{(1+r)^2} \right\}, \quad (31)$$

$$G' = \frac{q}{\gamma} (2\delta^2 + q) - k\delta^2 h; \quad H = \delta^2 h; \quad h = \frac{1}{2} + \frac{q}{2\gamma}.$$

и $k \leq i \leq n$

$$[qb_{if_u} \cdot (n + i - 1)] = Rr^{i-k},$$

$$R = -G' \frac{1+r^k}{1+r} - \frac{H}{(1+r)^2} [k + (k+1)r + r^{k+1}] + q \frac{(3\delta^2 + q)}{2\gamma}.$$

тогда

$$\begin{aligned} [qcf_u \cdot 2n] &= -\frac{1}{3} k(k-1)\delta + \frac{\delta}{2\gamma} \sum_{i=1}^k [(k-i)\delta^2 + q] - \\ &- \frac{\delta h}{B} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1 - (-r)^i}{1+r} \left[G' \frac{1 - (-r)^i}{1+r} + H \frac{i + (i+1)r + (-r)^{i+1}}{(1+r)^2} \right] - \\ &- \frac{\delta h}{B} \sum_{i=k+1}^n \frac{1 - (-r)^i}{1+r} Rr^{i-k} - Rr^{n-k} \left[\frac{\delta h (1+r^n)}{B(1+r)} + \frac{\delta}{2\gamma} \right]. \quad (32) \end{aligned}$$

После суммирования (32) с некоторым приближением получим

$$[qcf_u \cdot 2n] = -\frac{k(k-1)}{2\sqrt{3}} C_1, \quad (33)$$

$$[qdf_u \cdot (2n + 1)] = + k(k-1)(3n - k - 1) \frac{\delta^2}{9} + kq -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2\gamma} \sum_{i=1}^k [(n-i)\delta^2 + q] [(k-i)\delta^2 + q] - \\
& - \frac{1}{B} \sum_{i=1}^k \left[G \frac{1 - (-r)^i}{1+r} + H \frac{i + (i+1)r + (-r)^{i+1}}{(1+r)^2} \right] \times \\
& \quad \times \left[G' \frac{1 - (-r)^i}{1+r} + H' \frac{i + (i+1)r + (-r)^{i+1}}{(1+r)^2} \right] - \\
& - \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{n-k} \left[G \frac{1 - (-r)^{k+i}}{1+r} + H \frac{i + (i+1)r + (-r)^{k+i+1}}{(1+r)^2} \right] Rr^i + \\
& + q \frac{(3\delta^2 + q)}{2\gamma B} \left[Rr^{n-k} + G \frac{1+r^k}{1+r} + H \frac{k + (k+1)r + r^{k+1}}{(1+r)^2} \right] - \\
& \quad - \frac{[qcd \cdot 2n][qcf_u \cdot 2n]}{[qcc \cdot 2n]}. \tag{34}
\end{aligned}$$

Из [3] имеем

$$[qcd \cdot 2n] = - \frac{n(n-1)}{2\sqrt{3}} C_1, \quad G = \frac{q}{\gamma} (2\delta^2 + q) - n\delta^2 h.$$

После преобразований и пренебрежения некоторыми малыми величинами найдем

$$\begin{aligned}
[qdf_u \cdot (2n+1)] &= + \frac{C_1}{36} [k(k-1)(3n-2k+1) + 12k]; \tag{35} \\
[qef_u \cdot (2n+2)] &= [qef_u] - \sum_{i=1}^n \frac{[qa_i e \cdot (i-1)][qaf_u \cdot (i-1)]}{[qa_i a_i \cdot (i-1)]} - \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{[qb_i e \cdot (n+i-1)][qbf_u \cdot (n+i-1)]}{[qb_i b_i \cdot (n+i-1)]} - \frac{[qce \cdot 2n][qcf_u \cdot 2n]}{[qcc \cdot 2n]} - \\
& \quad - \frac{[qde \cdot (2n+1)][qdf_u \cdot (2n+1)]}{[qdd \cdot (2n+1)]}. \tag{36}
\end{aligned}$$

Из [3] знаем, что для нечетных i

$$\begin{aligned}
[qa_i e \cdot (i-1)] &= -q, \\
[qb_i e \cdot (n+i-1)] &= M \frac{1-r^{i+1}}{1-r^2} + Nr \frac{1-r^{i-1}}{1-r^2};
\end{aligned}$$

для четных i

$$\begin{aligned}
[qa_i e \cdot (i-1)] &= -3\delta^2 - q, \\
[qb_i e \cdot (n+i-1)] &= (N + Mr) \frac{1-r^i}{1-r^2},
\end{aligned}$$

где

$$M = -\frac{\delta^2 q}{\gamma}; \quad N = \frac{\delta^2}{2\gamma} (3\delta^2 + 4q),$$

а

$$[qce \cdot 2n] = + \frac{\sqrt{3}}{2} nC_1, \quad [qde(2n+1)] = + \frac{n}{12} C_1.$$

Подставив соответствующие величины в (36), с некоторым приближением имеем

$$[qef_u(2n+2)] = + \left[\frac{k(n^2 + 2k^2 - 3k) - 3kn(k-1)}{12(n^2 + 11)} \right] C_1. \tag{37}$$

Если обозначим

$$Q_1 = [qf_u f_u] - \sum_{i=1}^m \frac{[qa_i f_u \cdot (i-1)]^2}{[qa_i a_i \cdot (i-1)]} - \sum_{i=1}^n \frac{[qb_i f_u \cdot (n+i-1)]^2}{[qb_i b_i \cdot (n+i-1)]},$$

$$Q_2 = \frac{[qcf_u \cdot 2n]^2}{[qcc \cdot 2n]}, \quad Q_3 = \frac{[qdf_u \cdot (2n+1)]^2}{[qdd \cdot (2n+1)]}, \quad Q_4 = \frac{[qef_u \cdot (2n+2)]^2}{[qee \cdot (2n+2)]}, \quad (38)$$

то (12) можно записать

$$\left(\frac{2}{s\sqrt{3}}\right)^2 \frac{1}{P_{u_k}} = Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_4. \quad (39)$$

Подставив соответственно полученные значения в (38), получим следующие приближенные выражения:

$$Q_1 = [k(k-1)(2k-1) + 6k] \frac{C_1}{18}, \quad (40)$$

$$Q_2 = \frac{k^2(k-1)^2}{12n} C_1, \quad (41)$$

$$Q_3 = \frac{[k(k-1)(3n-2k+1) + 12k]^2}{36n(n^2+11)} C_1, \quad (42)$$

$$Q_4 = \frac{[k(n^2+2k^2-3k) - 3kn(k-1)]^2}{144n(n^2+11)} \frac{C_1^2}{E_1}. \quad (43)$$

Практические подсчеты показывают, что при $v = 1$, $n = 17$ и

$$k = 1, \quad Q_4 = 0,037,$$

$$k = 7, \quad Q_4 = 0,079,$$

$$k = 16, \quad Q_4 = 0,016.$$

Поэтому Q_4 можно пренебречь. Тогда формула (39) имеет вид

$$\left(\frac{2}{s\sqrt{3}}\right)^2 \frac{1}{P_{u_k}} = \frac{C_1}{36} \left\{ 2k(k-1)(2k-1) + 12k - \frac{3k^2(k-1)^2}{n} - \frac{[k(k-1)(3n-2k+1) + 12k]^2}{n(n^2+11)} \right\}. \quad (44)$$

Если учитывать только условия фигур, синусные условия и условия дирекционных углов, то есть для цепи, проложенной только между исходными азимутами, на основании (40) и (41) получим

$$\left(\frac{2}{s\sqrt{3}}\right)^2 \frac{1}{P_{u_k}} = \frac{C_1}{36} \left\{ 2k(k-1)(2k-1) + 12k - \frac{3k^2(k-1)^2}{n} \right\}. \quad (45)$$

Вопросы оценки точности цепи линейно-угловой триангуляции, проложенной между исходными азимутами, рассматриваются в работах [1—4]. Переходя к формулам поперечного сдвига, имеем для цепи между твердыми пунктами

$$m_{u_k} = \pm \frac{\mu''}{\rho''} s \sqrt{\frac{C_1}{48} \left\{ 2k(k-1)(2k-1) + 12k - \frac{3k^2(k-1)^2}{n} - \frac{[k(k-1)(3n-2k+1) + 12k]^2}{n(n^2+11)} \right\}}, \quad (46)$$

для цепи между исходными дирекционными углами

$$m_{u_k} = \pm \frac{\mu''}{\rho''} s \sqrt{\frac{C_1}{48} \left\{ 2k(k-1)(2k-1) + 12k - \frac{3k^2(k-1)^2}{n} \right\}}. \quad (47)$$

С целью проверки выведенных формул мы решили числовые примеры по схеме Гаусса. При этом приняли, что цепь состоит из равносторонних треугольников, $v = 1$, $n = 9$ и $k = 5$; $n = 16$ и $k = 8$; $n = 17$ и $k = 7, 8$. Затем сравнили свои результаты, полученные по формуле (47), с результатами, полученными из строгого уравнивания цепи С. Г. Судаковым в [5] ($n = 20$, $k = 21$, $m_B'' = 0,7'' \frac{m_s}{s} = 1 : 300\ 000$, $s = 20$ км) (табл. 1).

Таблица 1

Результаты исследования точности полученных формул

Число треугольников в цепи, n	№ пункта, k	Для цепи между твердыми пунктами			Для цепи между исходными азимутами		
		по формуле (46)	по схеме Гаусса	погрешность, %	по формуле (47)	по схеме Гаусса	погрешность, %
9	5	$0,822 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$0,880 \frac{\mu''}{\rho''} s$	7	$1,621 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$1,664 \frac{\mu''}{\rho''} s$	3
16	8	1,667 »	1,722 »	3	3,301 »	3,336 »	1
17	7	1,689 »	1,719 »	1,7	2,815 »	2,839 »	1
17	8	1,786 »	1,835 »	2,7	3,347 »	3,385 »	1
20	21				0,59 m	0,63 * m	6,7

* Результаты получены С. Г. Судаковым в [5].

Из данных табл. 1 следует, что формулы (46) и (47) с погрешностью порядка 7% можно использовать для оценки поперечного сдвига пунктов рассматриваемых цепей.

По формуле (46) производился анализ характера распределения поперечного сдвига разных пунктов цепи линейно-угловой триангуляции между твердыми пунктами. При расчете было принято, что цепь состоит из равносторонних треугольников и $v = 0,5$; $0,7$; $1,0$; $1,5$; $2,0$; $2,5$. Для сравнения одновременно приведены расчеты поперечного сдвига пунктов аналогичной цепи, проложенной между исходными дирекционными углами, по формуле (47). Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

Данные распределения поперечного сдвига

№ пунктов цепи, k	Значения, v					
	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0	2,5
Цепь линейно-угловой триангуляции между твердыми пунктами						
2	$0,64 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$0,60 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$0,55 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$0,46 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$0,39 \frac{\mu''}{\rho''} s$	$0,33 \frac{\mu''}{\rho''} s$
4	1,25 »	1,18 »	1,07 »	0,91 »	0,76 »	0,65 »
7	1,97 »	1,86 »	1,69 »	1,42 »	1,20 »	1,02 »
9	2,12 »	2,00 »	1,82 »	1,54 »	1,29 »	1,10 »
10	2,08 »	1,96 »	1,78 »	1,50 »	1,26 »	1,07 »
13	1,51 »	1,42 »	1,30 »	1,10 »	0,92 »	0,78 »
16	0,52 »	0,49 »	0,44 »	0,38 »	0,32 »	0,27 »
Цепь линейно-угловой триангуляции между исходными азимутами						
9	4,52 »	4,26 »	3,88 »	3,28 »	2,75 »	2,34 »
17	7,97 »	7,51 »	6,84 »	5,78 »	4,85 »	4,12 »

На основании приведенных данных можно сделать следующие выводы. С увеличением v поперечный сдвиг пунктов уменьшается. Если v увеличивается от 0,5 до 2,5, то m_{uk} уменьшается почти в два раза.

Поперечный сдвиг пункта в середине цепи между твердыми пунктами достигает наибольшей величины.

Наибольшая величина поперечного сдвига пунктов цепи между твердыми пунктами почти в 3,8 раза меньше, чем та же величина в аналогичной цепи между исходными дирекционными углами.

Выведенные формулы рекомендуются для оценки поперечного сдвига звеньев цепей с нечетными и четными числами n и k и с разными значениями v .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов П. И. Продольный и поперечный сдвиги триангуляционного ряда с тщательно измеренными связующими сторонами. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 3, Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1965.
2. Лапинг К. А. О точности построения рядов с измеренными сторонами и углами. «Геодезия и картография», № 4, 1957.
3. Нгуен ван Теу. Ошибка дирекционного угла связующих сторон цепи линейно-лучевой триангуляции, проложенной между твердыми пунктами. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 14, Изд-во Львов. ун-та, Львов, 1971.
4. Проворов К. Л. Точность цепи триангуляции с измеренными сторонами и углами. Изв. вузов, геодезия и картография, вып. 3, 1959.
5. Судаксв С. Г. Перспективы развития астрономо-геодезической сети в СССР. Третьего съезда ВАГО, М., 1962.

Работа поступила 25 ноября 1970 года.
Рекомендована кафедрой инженерной геодезии
Львовского политехнического института.
