

УДК 528.11:519.281.2

А. Н. СУХОВ

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ НЕВЯЗОК ТРИАНГУЛЯЦИИ 1-го и 2-го КЛАССА

Известно, что невязки треугольников являются одним из основных показателей качества триангуляционных построений. Вместе с тем их можно рассматривать как истинные ошибки угловых измерений, которые с успехом могут быть использованы для различных исследований и теоретических обобщений.

Огромный материал, накопленный в результате построения триангуляционных сетей как в СССР, так и за рубежом, позволил произвести анализ больших совокупностей невязок с целью выявления закона их распределения. Последнее имеет принципиальное значение для определения точности угловых измерений. Такая постановка вопроса по существу не является новой, однако результаты исследований многих авторов заставляют обратиться к нему вновь, ибо природа больших совокупностей невязок противоречит установившимся понятиям о гауссовом распределении случайных величин. Статистический анализ невязок позволил З. С. Хаимову [2] выявить смещение дисперсии в зависимости от искусственного ограничения полученного ряда невязок. Следовательно, ожидаемое распределение невязок нарушается в зависимости от принятия тех или иных критических границ появления последних.

Э. А. Боярский и Ю. А. Крюков [1], произведя анализ невязок триангуляции 1-го класса, заключают, что если разные группы измерений имеют различные средние квадратические ошибки, то, даже допуская нормальные распределения ошибок внутри каждой группы, мы не получим нормального распределения ошибок всей совокупности. Романовски и Грэн [3] анализировали триангуляцию Центральной Европы и пришли к заключению, что нормальный закон распределения невязок нарушается. Стеарн [4] исследовал совокупность измеренных углов в триангуляции Канады численностью 9420 единиц и пришел к аналогичному заключению.

Мы сделали попытку применить другой метод анализа причин заметной аномальности невязок треугольников, чем это было сделано указанными авторами.

Очевидно, что кривая Гаусса с достаточной степенью точности аппроксимирует однородную совокупность измерений. Искажение же гауссовой кривой можно, в частности, объяснить тем, что в какой-то промежуток времени под влиянием неизвестных факторов произошел сдвиг центра распределения, явившийся причиной неоднородности получаемой информации.

В этой связи предполагается рассматривать реализованную совокупность невязок как смесь двух или, в крайнем случае, трех (что может случиться редко, так как измерительный процесс достаточно стабилизирован в техническом отношении) нормальных совокупностей. Аналитически наше предположение запишется:

$$f(x) = \gamma_1 f_1(x) + \gamma_2 f_2(x), \quad (1)$$



где  $x$  — случайная величина (в нашем случае невязка треугольника), подчиняющаяся нормальному закону распределения с плотностью вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2)$$

$\gamma$  ( $i = 1, 2$ ) — процентное содержание каждого частного распределения в общем распределении совокупности невязок. Очевидно, что  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ .

Задача заключается в том, чтобы определить коэффициенты  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , а также основные параметры составных распределений  $a_1$  и  $a_2$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Для решения поставленной задачи применим метод моментов.

По эмпирическому материалу вычисляются начальные, а затем центральные моменты. Обычно в практике определения закона распределения случайной величины задача решается использованием центральных моментов. Мы же рассматриваем смесь двух нормальных совокупностей, а так как при сложении двух случайных величин момент суммы не равен сумме моментов слагаемых, то для определения числовых характеристик функции (1) используем кумулянты (семиинварианты). Кумулянты различных порядков обладают тем свойством, что при сложении независимых слагаемых кумулянт суммы равен сумме кумулянтов слагаемых того же порядка.

Известно, что кумулянты выражаются через центральные моменты следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a; & \xi_2 &= \sigma^2; & \xi_3 &= \mu_3; \\ \xi_4 &= \mu_4 - 3\mu_2^2; & \xi_5 &= \mu_5 - 10\mu_2\mu_3. \end{aligned} \quad (3)$$

На основе известных выражений моментов нормального распределения, используя формулы (3), можно получить значение кумулянтов для функции (1) до пятого порядка включительно.

Уравнения связи кумулянтов и искоемых параметров следующие:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2, & \xi_2 &= \gamma_1 \gamma_2 (a_2 - a_1)^2 + \gamma_1 \sigma_1^2 + \gamma_2 \sigma_2^2, & (4) \\ \xi_3 &= \gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1 - \gamma_2) (a_2 - a_1)^3 + 3\gamma_1 \gamma_2 (a_2 - a_1) (\sigma_2^2 - \sigma_1^2), \\ \xi_4 &= \gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1^2 - 4\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2^2) (a_2 - a_1)^4 + 6\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1 - \gamma_2) (a_2 - a_1)^2 (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) + \\ &+ 3\gamma_1 \gamma_2 (\sigma_2^2 - \sigma_1^2), \\ \xi_5 &= \gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1^3 - 11\gamma_1^2 \gamma_2 + 11\gamma_1 \gamma_2^2 - \gamma_2^3) (a_2 - a_1)^5 + 10\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1^2 - 4\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2^2) \times \\ &\times (a_2 - a_1)^3 (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) + 15\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1 - \gamma_2) (a_2 - a_1) (\sigma_2^2 - \sigma_1^2). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что полученная система уравнений с пятью неизвестными не решается конечным числом алгебраических операций, поэтому используется приближенный метод решения подобных систем уравнений, разработанный в работе [5].

Для этих целей подсчитываются коэффициенты

$$A = \frac{\xi_4}{\xi_3^{4/3}}, \quad B = \frac{\xi_5}{\xi_3^{5/3}}, \quad (5)$$

по которым с помощью таблиц и номограмм, помещенных в упомянутой работе, выбирается параметр  $\gamma$  и коэффициент

$$\alpha = \frac{\xi_3}{(a_2 - a_1)^3}.$$

Окончательный подсчет искоемых параметров производим по формулам

$$\gamma_2 = 1 - \gamma_1, \quad a_1 = \xi_1 - \gamma_2 \left( \frac{\xi_3}{\alpha} \right)^{1/3}, \quad a_2 = \xi_1 + \gamma_1 \left( \frac{\xi_3}{\alpha} \right)^{1/3}, \quad (6)$$



$$\sigma_1^2 = \xi_2 - \gamma_1 \gamma_2 (a_1 - a_2)^2 - \gamma_2 (a_1 - a_2)^2 \left( \frac{\alpha}{3\gamma_1 \gamma_2} - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{3} \right),$$

$$\sigma_2^2 = \xi_2 - \gamma_1 \gamma_2 (a_1 - a_2)^2 + \gamma_1 (a_1 - a_2)^2 \left( \frac{\alpha}{3\gamma_1 \gamma_2} - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{3} \right).$$

Затем по обычным таблицам плотности вероятностей нормального распределения соответственно найденным параметрам находятся плотности составных распределений, то есть  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ .

В качестве примера рассматривается сплошная сеть триангуляции, состоящая из 341 треугольника 1-го класса и 844 треугольников 2-го класса (табл. 1).

Таблица 1

Основные характеристики сплошной сети триангуляции

Класс триангуляции	Объем, $n$	Математическое ожидание, $a$	Дисперсия, $\sigma^2$	Асимметрия, $S_k$	Экссесс, $E$
1-й класс	341	+0,003	1,099	0,044	-0,160
2-й класс	844	-0,024	2,406	0,133	+0,391
Общ. совокупн.					
1-го и 2-го классов	1185	-0,016	2,032	0,120	+0,254

Значение коэффициента эксцесса позволяет сделать, хотя и нестрогое, заключение о нарушении нормальности в приведенных совокупностях.

Для подтверждения этого предположения было произведено сравнение эмпирического и теоретического распределений по критерию Колмогорова. Найденная вероятность  $P(\lambda) = 0,3410$  — довольно малая, чтобы

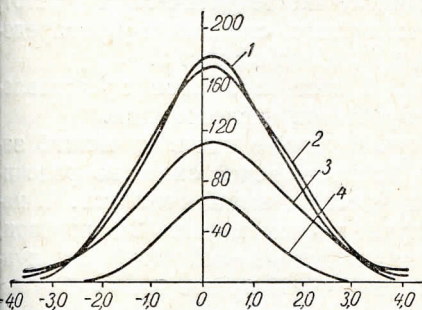


Рис. 1. Радико-нормальное распределение суммы частот невязок триангуляции 1-го и 2-го класса:

1 — нормальная кривая сумм распределений невязок триангуляции 1-го и 2-го класса; 2 — нормальная кривая смешанного распределения невязок триангуляции 1-го и 2-го класса; 3 — нормальная кривая распределения невязок триангуляции 2-го класса; 4 — нормальная кривая распределения невязок триангуляции 1-го класса.

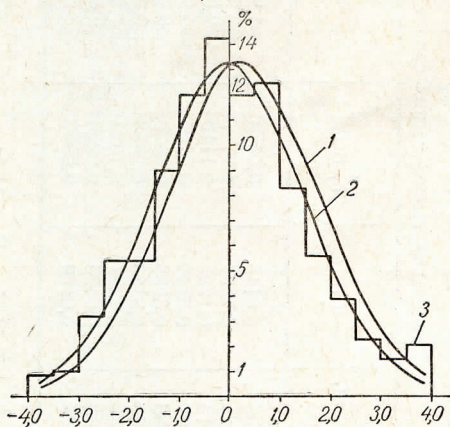


Рис. 2. Распределение смеси двух нормальных совокупностей невязок триангуляции 2-го класса:

1 — нормальная кривая смешанного распределения невязок триангуляции 2-го класса; 2 — нормальная кривая, характеризующая разделенную совокупность невязок 2-го класса на две части; 3 — гистограмма эмпирического распределения невязок триангуляции 2-го класса.

считать расхождение между эмпирическим и теоретическим распределениями несущественным.

Для указанных совокупностей были вычислены теоретические частоты, после чего эмпирические совокупности были аппроксимированы кривыми, представленными на рис. 1.



Таблица 2

## Вычисление теоретических частот смешанного распределения

Интервал $\Delta x$	$\Delta x - a_1$	$\frac{\Delta x - a_1}{\sigma_1} = t_1$	$f(t_1)$	$\frac{\gamma_1}{\sigma_1} f(t_1)$	$\Delta x - a_2$	$\frac{\Delta x - a_2}{\sigma_2} = t_2$	$f(t_2)$	$\frac{\gamma_2}{\sigma_2} f(t_2)$	$\sum_{i=1}^2 \frac{\gamma_i}{\sigma_i} f(t_i)$	Эмпирическая частота, %
-4,00	-3,956	-2,655	0,0118	0,0078	-4,956	-1,515	0,1266	0,0008	0,0086	0,0094
-3,00	-2,956	-1,984	0,0558	0,0367	-3,956	-1,210	0,1919	0,0012	0,0379	0,0426
-2,00	-1,956	-1,313	0,1689	0,1110	-2,956	-0,904	0,2652	0,0016	0,1126	0,1078
-1,00	-0,956	-0,641	0,3249	0,2135	-1,956	-0,596	0,3340	0,0020	0,2155	0,2098
0,00	+0,044	+0,030	0,3988	0,2620	-0,956	-0,292	0,3822	0,0023	0,2643	0,2642
1,00	+1,044	+0,700	0,3123	0,2052	+0,044	+0,013	0,3989	0,0024	0,2076	0,2085
2,00	2,044	+1,372	0,1557	0,1023	+1,044	+0,318	0,3792	0,0023	0,1046	0,0946
3,00	3,044	2,043	0,0495	0,0326	2,044	0,625	0,3282	0,0020	0,0346	0,0391
4,00	4,044	2,714	0,0100	0,0066	3,044	0,931	0,2586	0,0016	0,0082	0,0213

Интересно, что сумма теоретических частот невязок 1-го и 2-го класса соответствует так называемому радио-нормальному распределению, что подтверждают исследования Романовски по этому вопросу. Итак, рассмотренная совокупность невязок триангуляции 1-го и 2-го класса не подчиняется закону Гаусса, хотя это объясняется заведомой неоднородностью совокупностей, образующих смесь.

Предположив неоднородной совокупность невязок триангуляции 2-го класса, произведем анализ ее по предлагаемой методике.

Значения моментов и кумулянтов следующие:  $\nu_1 = -0,024$ ,  $\mu_2 = 2,406$ ,  $\mu_3 = 0,499$ ,  $\mu_4 = 17,850$ ,  $\mu_5 = 1,245$ ,  $\xi_1 = -0,024$ ,  $\xi_2 = 2,406$ ,  $\xi_3 = 0,499$ ,  $\xi_4 = 0,680$ ,  $\xi_5 = -12,030$ ,  $n = 844$ . По формулам (4) находим

$$A = 1,23, B = -3,75$$

и определяем

$$\gamma_1 = 0,98, \alpha = 0,5.$$

Дальнейшие вычисления производим по формулам (5)

$$\gamma_2 = 0,02, a_1 = -0,044, \sigma_1 = 1,49, \\ a_2 = +0,956, \sigma_2 = 3,27.$$

Вычисление теоретических частот, соответствующих смешанному распределению, приведено в табл. 2.

Рис. 2 дает наглядное представление результатов исследования.

Изучив данные табл. 2, можно заметить довольно ясное сходство рассчитанных частот с эмпирическими. В нашем случае мы имеем лишь 2% невязок, не принадлежащих основной совокупности; такое небольшое количество их объясняется тем, что невязки в процессе угловых измерений и дальнейшей камеральной обработки получили определенный отбор, то есть мы имели дело с искусственно ограниченной информацией. Если же анализировать «сырой» материал (подвергая отбраковке лишь явно грубые измерения), то следует ожидать увеличения показателя неоднородности собранной информации, а следовательно, искажения **нормальной кривой**, аппроксимирующей ее. В этом случае представление анализируемой совокупности невязок смешанным нормальным законом будет более оправданным, ибо это



будет отвечать в какой-то степени естественному распределению невязок в сетях триангуляции.

Проведенный анализ невязок триангуляции 1-го и 2-го класса позволяет заключить, что последние в процессе построения сети образуют в целом неоднородную совокупность. В этом случае можно говорить только о приближенно-нормальном законе распределения невязок, и, следовательно, использование нормального закона в вопросах математической обработки не является единственным.

Разделение неоднородной совокупности на частные однородные, нормальные распределения дает возможность довести до окончательной математической обработки большее количество получаемой в процессе измерения информации, ослабив в какой-то степени применение критериев отбраковки.

Из рис. 2 видно, что кривая, которую построили, исходя из этих соображений, лучше описывает эмпирический материал, в то время, как кривая, аппроксимирующая общую совокупность, имеет заметное смещение относительно гистограммы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Б о я р с к и й Э. А., К р ю к о в Ю. А. Распределение ошибок измерений в триангуляции 1-го класса. В сб. «Статистические и математические исследования в производстве и экономике», М., 1967.
2. Х а и м о в З. С. О фактической точности измеренных углов в триангуляции 2—3 классов, вычисленной по невязкам треугольников. Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, 4, М., 1962.
3. R o m a n o w s k i, G r e e n. Статистический анализ сети триангуляции Центральной Европы. Zeitschrift für Vermessungswesen, № 11, 1967.
4. S t e a g j. Проверка отклонения распределения ошибок измерений теодолитом нормального распределения. Canadian Survegor, т. 18, N 1, 1964.
5. Таблицы и номограммы. Skandinavisk artuarietidskrift N 1, 1934.

Работа поступила 21 мая 1970 года.  
Рекомендована кафедрой инженерной геодезии  
Московского инженерно-строительного института.