РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 16

УДК 528.41

*И. С. ТРЕВОГО*

# О МЕТОДАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ СЛУЧАЙНОГО И СИСТЕМАТИЧЕСКОГО ВЛИЯНИЙ В ГОРОДСКОЙ И ИНЖЕНЕРНОЙ ПОЛИГОНОМЕТРИИ

При предвычислении точности полигонометрии, оценке ее точности, для установления весов при ее уравновешивании и т. д. надо знать надежные значения коэффициентов случайного $\mu$ и систематического $\lambda$ влияний.

Методика определения величин $\mu$ и $\lambda$ и их практические значения приводятся в работах известных ученых-геодезистов А. С. Чеботарева, Н. Г. Видуева, Н. Н. Лебедева, Н. А. Кузина, Д. С. Шеина, Б. И. Коськова и др. Величины $\mu$ и $\lambda$ можно найти по разности двойных измерений, по линейным невязкам ходов, по продольным невязкам вытянутых ходов. Однако получить надежные результаты этими методами трудно. Не случайно, например, значения $\mu$ для стальной ленты, установленные разными авторами различными способами, колеблются в пределах от 0,0001 до 0,025 [11]. Рекомендации для расчета точности полигонометрии в разных источниках также не всегда согласуются между собой (табл. 1).

Таблица 1

**Значения $\mu$ и $\lambda$ для полигонометрии 1-го разряда**

| Источник | $\mu$ | $\lambda$ | $\lambda : \mu$ |
|---|---|---|---|
| [14] | 0,0010 | 0,000025 | 1 : 40 |
| [ 9] | 0,0005 | 0,000020 | 1 : 25 |
| [ 3] | 0,0008 | 0,000020 | 1 : 40 |
| [ 2] | 0,0005 | 0,000020 | 1 : 25 |
| [ 5] | — | — | 1 : 25—1 : 30 |

В. И. Акулов [1] предложил определять $\mu$ для полигонометрических сетей по линейным $f_S$ и угловым $f_\beta$ невязкам замкнутых полигонов

$$\mu^2 = \frac{1}{N}\left(\sum_1^N \frac{f_S^2}{[S]} - \frac{1}{45\rho^2}\sum_1^N f_\beta\,[S]\right) \qquad (1)$$

и по невязкам разомкнутых полигонов

$$\mu^2 = \frac{1}{N}\sum_1^N\left(\frac{f_S^2}{[S]+16\cdot 10^{-4}L^2} - \frac{1}{45\rho^2}\sum_1^N f_\beta^2\,\frac{([S]+L)^2}{[S]+16\cdot 10^{-4}L^2}\right), \qquad (2)$$

где $N$ — число ходов в сети, $S$ — периметр хода, $L$ — длина замыкающей хода.

Этот способ заслуживает внимания, но, по мнению самого автора, является упрощенным и его можно рекомендовать для установления весов раздельном уравновешивании. Использовать формулы (1) и (2) для стро-установления весов довольно трудно, поскольку формула (1) не учи-ет влияния ошибок опорных пунктов, а они неизбежно будут влиять правки углов и сторон. Выражение (2) выведено не строго при $\lambda = $ 04$\mu$.

Надежность получения значений $\mu$ можно проконтролировать, если ить их со значениями $\mu'$, определенными после уравновешивания. но $\mu$ и $\mu'$ не совпадают, но Ю. И. Маркузе [7] показал, что из этого днительного положения можно выйти, применяя метод последователь- приближений.

При установлении веса по известной формуле

$$p_\beta = \frac{\mu^2}{m_\beta^2} \tag{3}$$

едлагает в качестве первого приближения брать произвольное значе- , например, из табл. 1. Затем полученное после уравновешивания $\mu'$ авить в формулу (3) и вновь уравнять сеть и т. д. Приближения необ- мо повторять, пока $\mu$ и $\mu'$ не будут совпадать между собой.

Число приближений, естественно, зависит от того, насколько надежно стно $\mu$ для первого приближения. В работе [7] дается выражение для деления коэффициента систематического влияния $\lambda$ и рекомендуется зоваться также методом приближений. Несмотря на трудоемкость, способ может дать хорошие результаты.

Мы решаем задачу определения надежных значений $\mu$, $\lambda$ и $m_\beta$ на осно- и большого производственного материала. Для этого был собран ма- ал по полигонометрии 1-го разряда, проложенной с помощью стальных олок на территории 64 городов УССР. Общая протяженность 425 хо- 4198 линий) составила 1000 *км*.

По каждому ходу на основании формулы [14] средней квадратической бки конечной точки хода

$$M^2 = \mu^2 [S] + \lambda^2 L^2 + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} [D^2], \tag{4}$$

D* — расстояние от центра тяжести до вершины хода, составлены 425 нений погрешностей вида

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z - l_1 = v_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z - l_2 = v_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{425} x + b_{425} y + c_{425} z - l_{425} = v_{425}. \end{array}\right\} \tag{5}$$

ражениях (5) $a = [S] \cdot 10^{-3}$; $b = L^2 \cdot 10^{-6}$; $c = [D^2] \cdot 10^{-6}$; $x = \mu^2 \times$ $0^3$; $y = \lambda^2 \cdot 10^6$; $z = (m_\beta^2 : \rho^2) \cdot 10^6$. В качестве свободных членов исполь- лись линейные невязки разомкнутых ходов, опирающихся на твердые ловые точки $f_S$, выраженные в уравнениях (5) через $l = f_S^2 \cdot 10^3$.

Для определения искомых величин мы решали систему (5) по способу еньших квадратов, предварительно преобразовывая свободные члены, е, как показали наши исследования, решение системы типа (5), как ило, приводит к невозможным (мнимым) значениям одного или двух вестных.

Б. Ф. Крутой и Ю. Г. Соколов [4] сделали попытку аналогичным об- м, но с составлением двух уравнений по каждому ходу получить гие значения $\mu$, $\lambda$ и $m_\beta$ для отдельной сети, без предварительного

* При вычислении $[D^2]$ частично использовался метод В. И. Акулова [1].

преобразования свободных членов. При этом все значения неизвестных оказались действительными: $\mu^k = 0{,}00031$, $\lambda^k = 0{,}000032$, $m_\beta^k = \pm 3{,}8''$.

Это вызвало у нас сомнение, и мы вновь составили и решили нормальные уравнения для примера [4] при строгом соблюдении методики [13]. При этом результаты получились иными и содержали мнимое значение $\mu = 0{,}00020\sqrt{-1}$; $\lambda = 0{,}000031$; $m_\beta = \pm 4{,}59''$. Причиной получения неверных значений $\mu^K$, $\lambda^K$ и $m_\beta^K$ оказалась вычислительная погрешность, допущенная в величине $[bl]$. В примере [4] $[bl] = 212{,}86$, а должно быть $241{,}64$.

Получение мнимых значений для заведомо положительных искомых величин объясняется неустойчивостью свободных членов — невязок, которые могут принимать произвольные значения в широком диапазоне от нуля до предельных величин.

Если бы как частный случай для примера [4] удалось бы избежать получения мнимых значений неизвестных, то все же пользоваться ими трудно, так как надежность этих величин в данном случае, как будет показано ниже, довольно низкая.

Для преобразования свободных членов 425 уравнений поправок были разбиты нами на 31 группу по признаку подобия формы хода, числу углов поворота и периметру. Дальше в каждой группе вычислялись средние свободные члены $l_{\text{ср}}$

$$l_{\text{ср}} = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_{N_0}}{N_0}, \tag{6}$$

где $N_0$ — число ходов (уравнений) в группе, которые приписывались всем уравнениям групп. Затем система (5) с новыми свободными членами $l_{\text{ср}}$ была решена по способу наименьших квадратов (см. табл. 2, 1-я строка).

Таблица 2

**Вычисленные значения $\mu$, $\lambda$ и $m_\beta$ для полигонометрии 1-го разряда (стальные проволоки)**

| Число уравнений | $\mu$ | $\lambda$ | $m_\beta$ | $\lambda : \mu$ |
|---|---|---|---|---|
| 425 | $0{,}00123 \pm 5\%$ | $0{,}000022 \pm 8\%$ | $\pm 6{,}3'' \pm 3\%$ | 1 : 55 |
| 31 ср. | $0{,}00124 \pm 4\%$ | $0{,}000026 \pm 8\%$ | $\pm 5{,}7'' \pm 4\%$ | 1 : 48 |

Показатели точности ходов (2-я строка) найдены путем решения 31 среднегруппового уравнения, полученного путем деления коэффициентов эквивалентных уравнений каждой группы на $N_0$. Это потребовало в несколько раз меньше времени на вычисления, чем при решении всех 425 уравнений вместе.

Незначительное расхождение результатов в 1-й и 2-й строках обусловлено некоторым различием ходов, объединенных в группы, поэтому значения $\mu$, $\lambda$ и $m_\beta$ точнее в 1-й строке.

Ошибка $m_{\beta_2}$, вычисленная для 425 ходов по [8]:

$$m_{\beta_2} = \pm \sqrt{\left[\frac{f_\beta^2}{n}\right]\left(\frac{1}{N-K}\right)}, \tag{7}$$

где $K$ — число узловых точек в сети, оказалась $\pm 6{,}3''$, то есть такой же, как в 1-й строке табл. 2.

М. Ф. Безматерных [2], предположив зависимость коэффициентов $\mu$ и $\lambda$ от длины хода и приняв $\lambda = \frac{1}{40}\mu$, получил формулу

$$\mu = \pm 40\left(\frac{m_{[S]}}{[S]}\right)\sqrt{\frac{[S]}{1600 + [S]}}, \tag{8}$$

где $m_{[S]}$ — ошибка линейных измерений в ходе.

На наш взгляд, подобное заключение ошибочно, поскольку $\mu$ для данного мерного прибора, как правило [14], величина постоянная. На основании формулы (8) еще нельзя утверждать, что $\mu$ растет с длиной хода, так как с увеличением $[S]$ растет подкоренное выражение, а отношение $\frac{m_{[S]}}{[S]}$ должно уменьшаться.

Таблица 3

**Величины $\mu$, $\lambda$ и $m_\beta$, полученные из четырех групп**

| $[S]$, *км* | $N_0$ | $\mu$ | $\lambda$ | $m_\beta$ | $\lambda:\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|
| до 1,5 | 85 | 0,00113±13% | 0,000018±45% | ±6,9″±11% | 1:63 |
| 1,5—2,0 | 89 | 0,00086±20% | 0,000026±14% | ±6,4″±10% | 1:33 |
| 2,0—2,5 | 94 | 0,00114±14% | 0,000035±8% | ±6,1″±13% | 1:33 |
| свыше 2,5 | 156 | 0,00108±12% | 0,000018±18% | ±6,8″±5% | 1:62 |

Из данных табл. 3, где приведены результаты решения 425 уравнений поправок, разбитых после получения $l_{ср}$ на четыре группы по длинам ходов, видно, что выводы, сделанные в [2], на практике не подтвердились.

Оценка точности выполнена нами по методу Энке с использованием формулы В. А. Романова [10] для $P_x$

$$P_x = \frac{[cc \cdot 2] \cdot [bb \cdot 1]\,[aa]}{[cc \cdot 1]_b\,[bb]},$$

где $[cc \cdot 1]_b = [cc] - \frac{[bc]^2}{[bb]}$.

Сравнивая табл. 2 и 1, замечаем, что полученный коэффициент $\mu$ превышает расчетные значения, приведенные в табл. 1, и согласуется с результатом Н. Н. Лебедева [6]. Что же касается коэффициента $\lambda$, то он в табл. 2 и 1 практически совпал. Причиной завышения $\mu$ в табл. 2, очевидно, являются ошибки исходных данных, которые почти целиком входят в $\mu$, а $\lambda$, как известно [14], зависит в основном от организации работ.

Результаты табл. 2 вполне надежны. Описанный в статье метод можно рекомендовать для получения коэффициентов $\mu$ и $\lambda$ для разных мерных приборов и полигонометрии разных разрядов. Это будет иметь важное значение для расчета точности полигонометрии при установлении весов по формуле (3) перед строгим уравновешиванием полигонометрии, в том числе и по методу [7]. Надо полагать, что использование величин, найденных предлагаемым методом, в качестве 1-го приближения в способе [7] сократит число приближений.

Полученная нами в табл. 2 и по формуле (8) ошибка измерения угла $m_\beta = \pm 6{,}3''$. Инструкция по полигонометрии допускает для 1-го разряда $m_\beta$, равную $\pm 5''$, хотя расчетная величина $m_\beta$ получается равной $\pm 6{,}2''$. Очевидно, на $m_\beta$, как и на $\mu$, влияют ошибки исходных данных. Их можно определить, если будем знать $\mu_0$ и $m_{\beta_0}$, освобожденные от ошибок исходных данных. Для этого $\mu_0$ и $m_{\beta_0}$ найдем путем решения уравнений погрешностей, составленных по замкнутым полигонам. Целесообразно получать $\mu_0$ и $\lambda$ для разных мерных приборов. В этом случае можно говорить об эффективности применения для данного разряда измерений того или иного мерного прибора, в том числе свето- радиодальномеров. Оценка точности радиодальномерных измерений по ошибкам $\mu$ и $\lambda$, например, встречается у А. Л. Островского [9].

Таким образом, предложенный в статье метод гарантирует надежное получение величины $\mu$, $\lambda$ и $m_\beta$ при большом числе уравнений поправок (порядка нескольких сот).

Утверждение в [2] о зависимости коэффициента $\mu$ от длины хода не подтвердилось на практике (см. табл. 3).

Рекомендации, сделанные в [4], ошибочны.

Приведенные нами в табл. 2 значения рекомендуется использовать при установлении весов перед строгим уравновешиванием полигонометрии, а соотношение $\lambda : \mu \approx 1 : 50$ — применять при ее проектировании.

Определение ошибок $\mu_0$ и $m_{\beta_0}$ даст возможность судить о погрешностях исходных данных и о целесообразности применения отдельных мерных приборов для данного класса измерений.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Акулов В. И. Установление весов ходов при раздельном уравновешивании полигонометрической сети. «Геодезия и картография», № 2, 1968.
2. Безматерных М. Ф. О точности линейных измерений в полигонометрии на территориях городов и промышленных предприятий. Тр. Воронеж. ин-та, 1968.
3. Коськов Б. И. Справочное руководство по съемке городов, М., 1968.
4. Крутой Б. Ф., Соколов Ю. Г. Оценка точности угловых и линейных измерений при уравновешивании. Тр. Томского ун-та, 1970.
5. Кузин Н. А., Лебедев Н. Н. Практическое руководство по городской и инженерной полигонометрии. Геодезиздат, М., 1954.
6. Лебедев Н. Н. Курс инженерной геодезии. «Недра», М., 1970.
7. Маркузе Ю. И. К оценке точности по невязкам полигона до и после уравновешивания. Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 6, 1965.
8. Наставление по предварительной обработке полигонометрии ГУГК, 1967.
9. Островский А. Л. Исследование влияния атмосферы на точность радиодальномерных измерений на всхолмленной местности. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 10, 1969.
10. Романов В. А. Теория ошибок и способ наименьших квадратов. Углетехиздат, М., 1952.
11. Труньков И. И. К вопросу о точности линейных измерений. Тр. МИИЗ, 40, 1969.
12. Шеин Д. С. Городская полигонометрия. Госстройиздат, М., 1952.
13. Чеботарев А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. Геодезиздат, М., 1958.
14. Чеботарев А. С. Геодезия, ч. II. Геодезиздат, М., 1962.



Работа поступила 22 апреля 1971 года
Рекомендована кафедрой геодезии
Львовского политехнического института.