Н. А. КУЦЕРИБ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЗИМУТА И ШИРОТЫ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ ЗВЕЗД ВБЛИЗИ ЭЛОНГАЦИИ

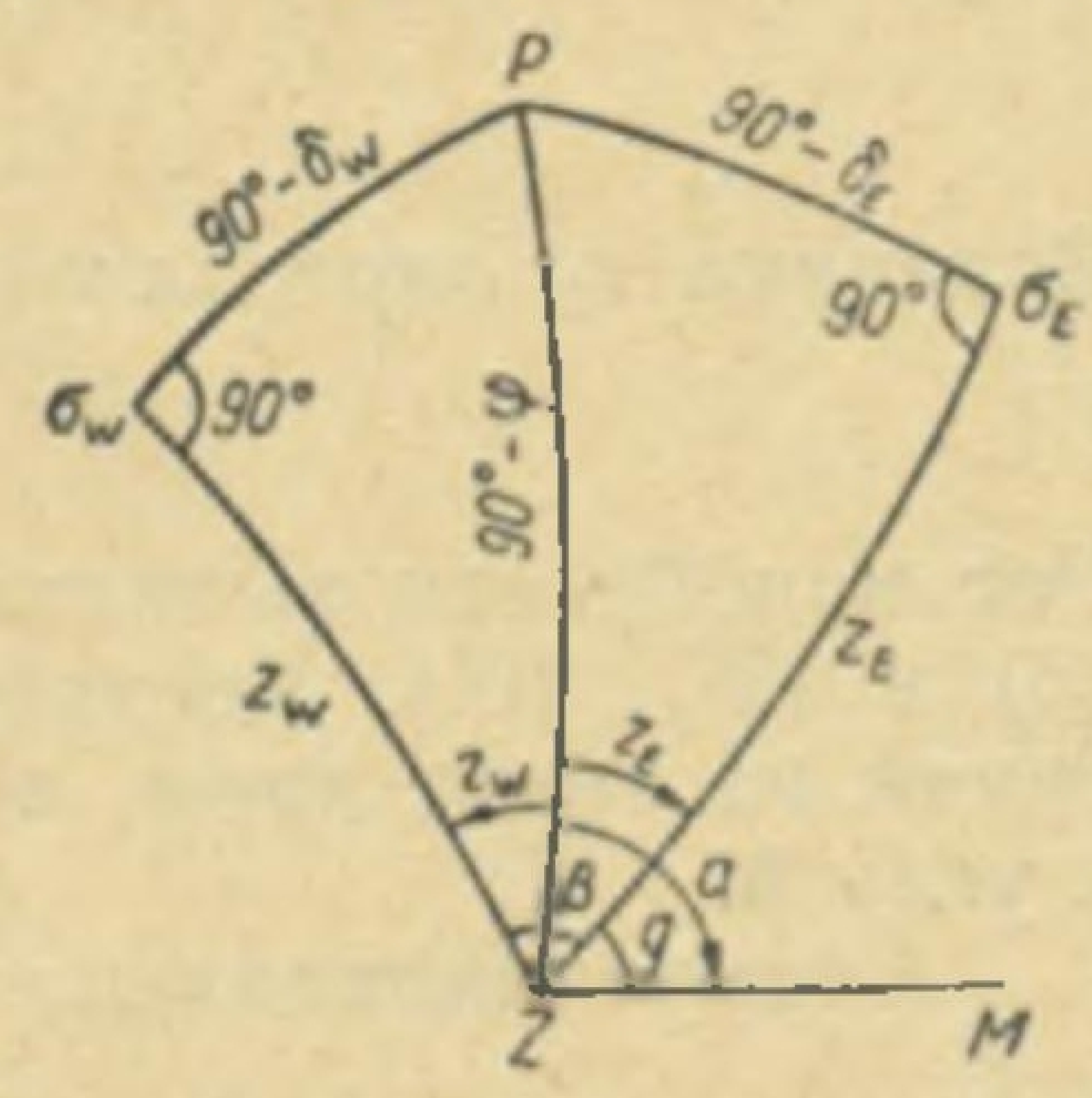
Предлагаемый способ совместного определения азимута и широты по наблюдениям звезд вблизи элонгации позволяет при необходимости определять азимут или широту раздельно. Основным назначением данного способа следует считать определение азимута, при этом одновременно с азимутом без дополнительных затрат времени на наблюдения путем негромоздких вычислений получаем широту. В случае определения только широты направление на земной предмет из программы наблюдений исключается.

Известны способы точного определения азимута земного предмета, при использовании которых необходимо знать широту или точное время или и широту, и точное время.

Предлагаемый способ, в отличие от последних, не требует знания ни широты, ни точного времени.

§ 1. Основы способа

Теория данного способа вытекает из решения двух прямоугольных сферических треугольников $PZ\sigma_W$ и $PZ\sigma_E$ (рис.). На рисунке обозначены: P — полюс мира, Z — зенит в точке наблюдения, δ_W и δ_E — видимые склонения звезд σ_W и σ_E в моменты западной и восточной элонгаций, ZM — направление на земной предмет, r_W и r_E — румбы западной и восточной звезд в элонгациях, z_W и z_E — зенитные расстояния звезд.



Для определения широты φ места наблюдения и азимута a земного предмета требуется только измерить горизонтальные углы g и β между направлением на земной предмет и направлениями на звезды σ_W и σ_E в западной и восточной элонгациях, а также выбрать из «Астрономического ежегодника» значения δ_W и δ_E.

Из прямоугольных сферических треугольников $PZ\sigma_W$ и $PZ\sigma_E$

$$\cos\delta_W = \sin r_W \cos\varphi,$$

$$\cos\delta_E = \sin r_E \cos\varphi,$$

откуда

$$\cos\varphi=\frac{\cos\delta_W}{\sin r_W}=\frac{\cos\delta_E}{\sin r_E}. \tag{1}$$

Широту места наблюдения можно найти по формуле (1), определив вначале r_W или r_E. Из уравнения (1)

$$\cos\delta_W\sin r_E=\cos\delta_E\sin r_W$$

или

$$\cos\delta_W\sin(\beta-r_W)=\cos\delta_E\sin r_W.$$

Разделив правую и левую части этого равенства на $\cos r_W$, получим

$$\operatorname{tg} r_W=\frac{\cos\delta_W\sin\beta}{\cos\delta_E+\cos\delta_W\cos\beta}. \tag{a}$$

Приведем формулу (а) к логарифмическому виду, для этого разделим числитель и знаменатель на $\cos\delta_E$ и обозначим

$$\frac{\cos\delta_W}{\cos\delta_E}\sin\beta=\operatorname{tg} M_W, \tag{2}$$

тогда

$$\operatorname{tg} r_W=\frac{\operatorname{tg} M_W}{1+\operatorname{tg} M_W\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}}=\frac{\sin M_W\sin\beta}{\sin\beta\cos M_W+\cos\beta\sin M_W},$$

и окончательно

$$\operatorname{tg} r_W=\frac{\sin\beta\sin M_W}{\sin(\beta+M_W)}. \tag{3}$$

Формулы для определения r_E напишем по аналогии

$$\frac{\cos\delta_E}{\cos\delta_W}\sin\beta=\operatorname{tg} M_E \tag{2'}$$

и

$$\operatorname{tg} r_E=\frac{\sin\beta\sin M_E}{\sin(\beta+M_E)}. \tag{3'}$$

Величина r_E определяется также из выражения

$$r_E=\beta-r_W.$$

Нет надобности вычислять румбы обеих звезд пары по формулам (2), (3) и (2′), (3′). Достаточно вычислить по указанным формулам румб одной из звезд пары, а румб второй звезды найдется как дополнение к углу β.

Азимут направления на земной предмет

$$\left.\begin{aligned} a&=\beta+g-r_W\\ \text{или}\quad a&=r_E+g.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Формулы (1), (2), (3) и (4) решают поставленную задачу.

Для вычисления румбов звезд и широты можно использовать также дифференциальные формулы, по которым отыскиваются дифференциальные поправки к приближенным значениям широты и румбов.

Эти формулы более просты по сравнению с логарифмическими. Для вывода дифференциальных формул воспользуемся уравнениями (1), которые перепишем так:

$$\sin r_W = \frac{\cos \delta_W}{\cos \varphi} \text{ и } \sin r_E = \frac{\cos \delta_E}{\cos \varphi}. \tag{5}$$

Прологарифмируем выражения (5) и продифференцируем их по переменным r и φ.

$$\lg \sin r_W = \lg \cos \delta_W - \lg \cos \varphi,$$

$$\lg \sin r_E = \lg \cos \delta_E - \lg \cos \varphi,$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_W \cdot dr_W &= \Delta_\varphi \cdot d\varphi, \\ \Delta_E \cdot dr_E &= \Delta_\varphi \cdot d\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{б}$$

Заменяя дифференциалы поправками, получим окончательную формулу для нахождения поправки в широту:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta r_W \cdot \Delta_W}{\Delta_\varphi} = \frac{\Delta r_E \cdot \Delta_E}{\Delta_\varphi}, \tag{6}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi, \tag{7}$$

где Δ_W и Δ_E — изменения логарифмов синусов румбов западной и восточной звезд при изменении румбов на $1''$;

Δ_φ — изменение логарифма косинуса широты при изменении широты на $1''$;

Δr_W и Δr_E — поправки к приближенным румбам r^0_W, r^0_E западной и восточной звезд, вычисленным с φ_0 по формулам (5);

φ_0 — приближенное значение широты.

Чтобы найти точное значение широты φ, необходимо прежде вычислить поправку в румб. Приравнивая левые части уравнений (б)

$$\Delta_W \cdot \Delta r_W = \Delta_E \cdot \Delta r_E$$

и, заменяя Δr_E через $\Delta\beta - \Delta r_W$, найдем окончательное выражение для поправки в румб западной звезды

$$\Delta r_W = \frac{\Delta\beta \cdot \Delta_E}{\Delta_W + \Delta_E}, \tag{8}$$

где

$$\Delta\beta = \beta - \beta^0, \tag{9}$$

$$\beta^0 = r^0_W + r^0_E. \tag{10}$$

Точное значение румба западной звезды

$$r_W = r^0_W + \Delta r_W. \tag{11}$$

Для восточной звезды по аналогии напишем:

$$\Delta r_E = \frac{\Delta\beta \cdot \Delta_W}{\Delta_W + \Delta_E}, \tag{8'}$$

$$r_E = r^0_E + \Delta r_E. \tag{11'}$$

В случае вычисления румбов звезд с приближенным значением широты φ_0 (по формулам (8)—(11)) вероятнейшую поправку в приближенное значение φ_0 можно найти и из уравнивания. Для каждой пары звезд уравнение ошибок в этом случае будет иметь следующий вид:

$$a_i\Delta\varphi+l_i=v_i, \tag{в}$$

где

$$a_i=\left(\frac{\partial r^i_W}{\partial\varphi}\right)_0 \text{ или } a_i=\left(\frac{\partial r^i_E}{\partial\varphi}\right)_0,$$

$$l_i=r^0_W-r_W=-\Delta r_W \text{ или } l_i=r^0_E-r_E=-\Delta r_E.$$

Для определения a_i представим первое из уравнений (5) в виде

$$r_W=\arcsin\frac{\cos\delta_W}{\cos\varphi}$$

и продифференцируем его по переменной φ

$$\left(\frac{\partial r_W}{\partial\varphi}\right)_0=\frac{\cos\delta_W\sin\varphi_0}{\cos^2\varphi_0\sqrt{1-\frac{\cos^2\delta_W}{\cos^2\varphi_0}}}.$$

Заменяя $\cos\delta_W$ через $\sin r_W\cos\varphi_0$, окончательно получим

$$\left(\frac{\partial r_W}{\partial\varphi}\right)_0=\operatorname{tg}\varphi_0\operatorname{tg}r_W. \tag{г}$$

С учетом полученных значений a и l уравнения погрешностей примут вид:

$$\operatorname{tg}\varphi_0\operatorname{tg}r_{W,1}\Delta\varphi-\Delta r_{W,1}=v_1,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0\operatorname{tg}r_{W,2}\Delta\varphi-\Delta r_{W,2}=v_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0\operatorname{tg}r_{W,n}\Delta\varphi-\Delta r_{W,n}=v_n.$$

Число уравнений ошибок будет равно числу n наблюденных пар звезд. Эти уравнения решаются по способу наименьших квадратов. В результате получим одно нормальное уравнение

$$[(\operatorname{tg}\varphi_0\operatorname{tg}r_w)^2]\,\Delta\varphi-[\operatorname{tg}\varphi_0\operatorname{tg}r_W\Delta r_W]=0,$$

решая которое, найдем $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi=\frac{[\operatorname{tg}\varphi_0\operatorname{tg}r_W\Delta r_W]}{[(\operatorname{tg}\varphi_0\operatorname{tg}r_W)^2]} \tag{12}$$

или (по аналогии)

$$\Delta\varphi=\frac{[\operatorname{tg}\varphi_0\operatorname{tg}r_E\Delta r_E]}{[(\operatorname{tg}\varphi_0\operatorname{tg}r_E)^2]}. \tag{12'}$$

Среднюю квадратическую ошибку единицы веса найдем по формуле

$$m_\varphi=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}. \tag{13}$$

Величины v в формуле (13) вычисляют из решения уравнений погрешностей после подстановки $\Delta\varphi$.

Средняя квадратическая ошибка широты, полученной из уравнивания,

$$M_\varphi = \pm \frac{m_\varphi}{\sqrt{P_\varphi}}, \tag{14}$$

где вес $P_\varphi = [(\operatorname{tg} \varphi_0 \operatorname{tg} r_W)^2]$ или $P_\varphi = [(\operatorname{tg} \varphi_0 \operatorname{tg} r_E)^2]$.

Если применяются логарифмические или дифференциальные формулы, то вероятнейшие значения широты и азимута вычисляют как средние арифметические из отдельных значений. Средние квадратические ошибки окончательных значений широты и азимута в этом случае вычисляются по известной формуле

$$M = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n(n-1)}}, \tag{15}$$

где δ — уклонения отдельных значений широты или азимута от среднего арифметического;

n — число пар звезд.

§ 2. Ожидаемые средние квадратические ошибки азимута и широты и наивыгоднейшие условия для наблюдений

Найдем наивыгоднейшие условия для определения азимута и широты. С этой целью продифференцируем формулы (a) и (1), подразумевая под дифференциалами истинные ошибки величин; при этом полагаем, что истинные ошибки — это малые величины первого порядка, квадратами и произведениями которых можно пренебречь. В результате дифференцирования получим зависимость ошибок в определяемых величинах от ошибок в исходных и измеряемых элементах.

Если величины δ_W, δ_E и β ошибочны соответственно на $d\delta_W$, $d\delta_E$ и $d\beta$, то ошибка dr_W в румбе западной звезды будет равна

$$dr_W = \frac{\partial r_W}{\partial \delta_W} d\delta_W + \frac{\partial r_W}{\partial \delta_E} d\delta_E + \frac{\partial r_W}{\partial \beta} d\beta.$$

Дифференцируя выражение (a), которое представим в виде

$$\operatorname{ctg} r_W = \frac{\cos \delta_E + \cos \delta_W \cos \beta}{\cos^2 \delta_W \sin \beta},$$

получим искомые частные производные по δ_W, δ_E и β

$$-\frac{1}{\sin^2 r_W} \cdot \frac{\partial r_W}{\partial \delta_W} = \frac{\cos \delta_E \sin \delta_W \sin \beta}{\cos^2 \delta_W \sin^2 \beta} = \frac{\cos \delta_E \operatorname{tg} \delta_W}{\cos \delta_W \sin \beta},$$

$$-\frac{1}{\sin^2 r_W} \cdot \frac{\partial r_W}{\partial \delta_E} = -\frac{\cos \delta_W \sin \delta_E \sin \beta}{\cos^2 \delta_W \sin^2 \beta} = -\frac{\sin \delta_E}{\cos \delta_W \sin \beta},$$

$$-\frac{1}{\sin^2 r_W} \frac{\partial r_W}{\partial \beta} = -\frac{\cos \delta_E \sec \delta_W \cos \beta + 1}{\sin^2 \beta}.$$

После подстановки $\cos\delta_W = \sin r_W \dfrac{\cos\delta_E}{\sin r_E}$ из формулы (1) и некоторы[х] преобразований

$$\frac{\partial r_W}{\partial \delta_W} = -\frac{\sin r_W \sin r_E \operatorname{tg}\delta_W}{\sin\beta},$$

$$\frac{\partial r_W}{\partial \delta_E} = \frac{\sin r_W \sin r_E \operatorname{tg}\delta_E}{\sin\beta},$$

$$\frac{\partial r_W}{\partial \beta} = \frac{\sin r_W (\sin r_E \cos(r_W + r_E) + \sin r_W)}{\sin^2\beta} = \frac{\sin r_W \cos r_E}{\sin\beta}.$$

Следовательно,

$$dr_W = \frac{\sin r_W \sin r_E}{\sin\beta}\operatorname{tg}\delta_W\, d\delta_W + \frac{\sin r_W \sin r_E}{\sin\beta}\operatorname{tg}\delta_E\, d\delta_E + \frac{\sin r_W \cos r_E}{\sin\beta}\, d\beta. \qquad (16$$

Произведя аналогично дифференцирование выражения типа (а для восточной звезды, найдем

$$dr_E = \frac{\sin r_W \sin r_E}{\sin\beta}\operatorname{tg}\delta_W\, d\delta_W - \frac{\sin r_W \sin r_E}{\sin\beta}\operatorname{tg}\delta_E\, d\delta_E + \frac{\cos r_W \sin r_E}{\sin\beta}\, d\beta. \qquad (16'$$

Складывая (16) и (16′), получим сумму истинных ошибок румбо западной и восточной звезд пары

$$dr_W + dr_E = d\beta, \qquad (17$$

что подтверждает правильность упомянутых формул.

Истинная ошибка азимута земного предмета найдется из диффе ренцирования выражений (4)

$$da = d\beta + dg - dr_W$$

или

$$da = dr_E + dg.$$

Подставляя в первое уравнение dr_W из (16), получим

$$da = d\beta + dg + \frac{\sin r_W \sin r_E}{\sin\beta}\operatorname{tg}\delta_W\, d\delta_W - \frac{\sin r_W \sin r_E}{\sin\beta}\operatorname{tg}\delta_E\, d\delta_E - \frac{\sin r_W \cos r_E}{\sin\beta}\, d\beta,$$

$$da = dg + \frac{\sin r_W \sin r_E}{\sin\beta}\operatorname{tg}\delta_W\, d\delta_W - \frac{\sin r_W \sin r_E}{\sin\beta}\operatorname{tg}\delta_E\, d\delta_E + \frac{\cos r_W \sin r_E}{\sin\beta}\, d\beta. \qquad (18)$$

Нетрудно видеть, что подстановка dr_E во второе уравнение дает тако[е] же значение da.

А теперь найдем истинную ошибку $d\varphi$ в широте при условии, что δ_W и r_W ошибочны на $d\delta_W$ и dr_W:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\delta_W} d\delta_W + \frac{\partial\varphi}{\partial r_W} dr_W.$$

Коэффициенты переменных определим из уравнения (1) путем частного дифференцирования по δ_W и r_W:

$$-\sin\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\delta_W} = -\frac{\sin\delta_W}{\sin r_W},$$

$$-\sin\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial r_W} = -\frac{\cos\delta_W \cos r_W}{\sin^2 r_W}.$$

Таким образом,

$$d\varphi = \frac{\sin\delta_W}{\sin\varphi \sin r_W} d\delta_W + \frac{\cos\delta_W \cos r_W}{\sin\varphi \sin^2 r_W} dr_W.$$

После подстановки dr_W из (16)

$$d\varphi = \left(\frac{\sin\delta_W}{\sin\varphi \sin r_W} - \frac{\sin\delta_W \cos r_W \sin r_E}{\sin\varphi \sin r_W \sin\beta}\right) d\delta_W +$$

$$+ \frac{\cos\delta_W \cos r_W \sin r_E}{\sin\varphi \sin r_W \sin\beta} \operatorname{tg}\delta_E \, d\delta_E + \frac{\cos\delta_W \cos r_W \cos r_E}{\sin\varphi \sin r_W \sin\beta} d\beta.$$

С учетом выражений

$$\sin\varphi = \sin\delta_{W,E} \cos z_{W,E},$$

$$\cos\delta_{W,E} = \sin r_{W,E} \cos\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \cos r_{W,E} \operatorname{ctg} z_{W,E},$$

полученных из прямоугольного сферического треугольника $PZ\sigma$, и некоторых преобразований напишем окончательно для $d\varphi$:

$$d\varphi = \frac{\cos r_E}{\cos z_W \sin\beta} d\delta_W + \frac{\cos r_W}{\cos z_E \sin\beta} d\delta_E + \frac{\cos r_W \operatorname{tg} z_E}{\sin\beta} d\beta. \tag{19}$$

Перейдем от истинных к средним квадратическим ошибкам. Обозначим через m_x среднюю квадратическую ошибку, соответствующую истинной ошибке dx; тогда средние квадратические ошибки румбов, азимута и широты будут:

$$m_{r_W}^2 = \frac{\sin^2 r_W \sin^2 r_E}{\sin^2\beta} (\operatorname{tg}^2\delta_W + \operatorname{tg}^2\delta_E) m_\delta^2 + \frac{\sin^2 r_W \cos^2 r_E}{\sin^2\beta} m_\beta^2; \tag{20}$$

$$m_{r_E}^2 = \frac{\sin^2 r_W \sin^2 r_E}{\sin^2\beta} (\operatorname{tg}^2\delta_W + \operatorname{tg}^2\delta_E) m_\delta^2 + \frac{\cos^2 r_W \sin^2 r_E}{\sin^2\beta} m_\beta^2; \tag{21}$$

$$m_a^2 = m_g^2 + \frac{\sin^2 r_W \sin^2 r_E}{\sin^2\beta} (\operatorname{tg}^2\delta_W + \operatorname{tg}^2\delta_E) m_\delta^2 + \frac{\cos^2 r_W \sin^2 r_E}{\sin^2\beta} m_\beta^2. \tag{22}$$

$$m_\varphi^2 = \left(\frac{\cos^2 r_E}{\cos^2 z_W} + \frac{\cos^2 r_W}{\cos^2 z_E}\right) \frac{m_\delta^2}{\sin^2\beta} + \frac{\cos^2 r_W \operatorname{tg}^2 z_E}{\sin^2\beta} m_\beta^2. \tag{23}$$

По формулам (20)—(23) для двух значений широт $\varphi=60°$ и $\varphi=30°$ рассчитаны значения m_r, m_a и m_φ (табл. 1—4). В расчетах принято $m_\vartheta=m_z=\pm 1''.20$ и $m_\delta=\pm 0''.20$. Для каждого значения широты для сравнения составлены две таблицы: одна при условии $r_W=r_E$, а вторая для случая, когда румбы звезд пары значительно различаются между собой.

$\varphi=60°$ **Таблица 1**

$\delta_{W,E}$	66°	71°	76°	81°	86°
$r_{W,E}$	55°	41°	29°	18°	8°
β	110°	82°	58°	36°	16°
$Z_{W,E}$	18°	23°	27°	29°	30°
m_r	0″.75	0″.70	0″.68	0″.67	0″.66
m_a	1″.41	1″.39	1″.38	1″.37	1″.37
m_φ	0″.30	0″.44	0″.70	1″.18	2″.72

$\varphi=30°$ **Таблица 2**

$\delta_{W,E}$	32°	36°	46°	56°	66°	76°	86°
$r_{W,E}$	78°	69°	53°	40°	28°	16°	5°
β	156°	138°	106°	80°	56°	32°	10°
$Z_{W,E}$	19°	32°	46°	53°	57°	59°	60°
m_r	0″.73	0″.66	0″.63	0″.62	0″.62	0″.62	0″.65
m_a	1″.40	1″.37	1″.36	1″.35	1″.35	1″.35	1″.36
m_φ	0″.17	0″.43	0″.82	1″.30	2″.04	3″.72	12″.45

Из анализа формул (20)—(23) и таблиц 1—4 следует:

а) ошибки определения румбов звезд и азимута практически не зависят от величины угла β между звездами пары; в случае, если $r_W \neq r_E$, точнее определяется румб той звезды, которая ближе к меридиану, и ошибка определения азимута также несколько меньше, чем при $r_W=r_E$;

б) ошибка определения широты тем меньше, чем больше угол β между звездами; при одном и том же угле β тем выше точность определения широты, чем больше различие между румбами восточной и западной звезд.

$\varphi=60°$ **Таблица 3**

δ_W	66°	71°	76°	81°
δ_E	86°	86°	86°	86°
r_W	55°	41°	29°	18°
r_E	8°	8°	8°	8°
β	63°	49°	37°	26°
z_W	18°	23°	27°	29°
z_E	30°	30°	30°	30°
m_{r_W}	1″.15	1″.10	1″.00	0″.89
m_{r_E}	0″.39	0″.39	0″.41	0″.48
m_a	1″.26	1″.26	1″.27	1″.29
m_φ	0″.48	0″.77	1″.11	1″.66

$\varphi=30°$ **Таблица 4**

δ_W	32°	36°	46°	56°	66°	76°
δ_E	86°	86°	86°	86°	86°	86°
r_W	78°	69°	53°	40°	28°	16°
r_E	5°	5°	5°	5°	5°	5°
β	83°	74°	58°	45°	33°	21°
z_W	19°	32°	46°	53°	57°	59°
z_E	60°	60°	60°	60°	60°	60°
m_{r_W}	1″.21	1″.19	1″.15	1″.11	1″.07	0″.96
m_{r_E}	0″.30	0″.24	0″.24	0″.26	0″.26	0″.36
m_a	1″.25	1″.23	1″.23	1″.23	1″.23	1″.26
m_φ	0″.49	0″.82	1″.53	2″.33	3″.51	5″.72

Как видно из таблиц 1—4, для достижения одинаковой точности определения φ в разных широтах необходимо с уменьшением широты места наблюдения увеличивать угол β. Принимая во внимание, что с уменьшением широты увеличиваются зенитные расстояния наблюдаемых звезд и тем самым частично уменьшаются ошибки измерения направлений на звезды, можно рекомендовать для разных значений широт следующие минимальные значения β, приведенные в табл. 5.

Таблица 5

φ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
β	100°	90°	80°	70°	60°	50°	40°

С уменьшением широты места наблюдения точность определения азимута незначительно возрастает.

Учитывая, что на точность горизонтальных направлений при малых значениях зенитных расстояний существенно влияют ошибки визирования, определения наклонности горизонтальной оси трубы и коллимации, следует наблюдать звезды на зенитных расстояниях не менее 20°.

Способ может дать хорошие результаты в широтном диапазоне от 0° до 60°.

§ 3. Порядок наблюдений

При определениях азимута и широты можно рекомендовать такой порядок наблюдений [2]:

а) наблюдение земного предмета при одном из кругов инструмента, например, при КП: четыре наведения окулярным микрометром главной трубы с отсчетами микрометра и отсчеты по микроскопам горизонтального круга;

б) наблюдение первой звезды пары до элонгации: отсчеты уровня, перекладка его на 180°; три наведения окулярным микрометром главной трубы на звезду с отсчетами микрометра и хронометра; отсчеты по уровню и микроскопам горизонтального круга;

в) наблюдение второй звезды до элонгации, как в пункте б);

г) перевод трубы через зенит и наблюдение первой звезды после элонгации в том же порядке, что в пункте б);

д) наблюдение второй звезды после элонгации, как в пункте б);

е) наблюдение земного предмета при КЛ, как в пункте а).

Если первой элонгирует западная звезда, то алидаду в приеме вращают только по ходу часовой стрелки, а если восточная, — то в обратном направлении.

Можно применять и такой порядок наблюдений:

а) наблюдение, как обычно, земного предмета при одном круге инструмента;

б) наблюдение звезды до и после элонгации при двух кругах;

в) наблюдение предмета при другом, чем в а), круге инструмента; после этого производят группирование звезд по парам независимо от времени наблюдения и вычисляют углы β как разности направлений на звезды, отсчитываемых от направления на земной предмет.

Звезду надо стремиться наблюдать как можно ближе к элонгации, ибо тогда поправки за кривизну суточной параллели в отсчеты по окулярному микрометру будут незначительными, а ошибка в поправке хронометра порядка нескольких секунд практически не будет влиять на точность определяемых величин. Отсчеты хронометра нам нужны только для определения поправок k за кривизну суточной параллели звезды Величины k можно выбрать из «Таблиц для астрономических вычислений» [3].

§ 4. Вспомогательные таблицы для составления рабочих эфемерид

Как известно для каждой звезды на момент элонгации необходимо вычислить следующие эфемериды: азимут A, зенитное расстояние z и местное звездное время s. Указанные A, z и s вычисляют по известным из сферической астрономии формулам [1]:

$$\sin r = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}, \tag{24}$$

$$\cos z = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}, \tag{25}$$

$$\cos t = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\delta}, \tag{26}$$

$$s_{W,E} = \alpha_{W,E} \pm t_{W,E},$$

$$A_W = 360^\circ - r_W, \quad A_E = r_E,$$

где α — прямое восхождение звезды, t — часовой угол звезды.

Чтобы не рассчитывать каждый раз r, z и t, можно составить вспомогательные таблицы, в которых должны быть приведены указанные величины для $\varphi_0 = 0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, \ldots, 60^\circ$. Найдя изменения r, z и t при изменении широты на $1'$, можно вычислить румб, зенитное расстояние и часовой угол звезды для любого промежуточного значения φ.

Выражение для $\dfrac{\partial r}{\partial\varphi}$ нами уже найдено (формула (г)).

$$\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)_0 = \operatorname{tg}\varphi_0 \operatorname{tg} r. \tag{г}$$

Найдем $\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}$ и $\dfrac{\partial t}{\partial\varphi}$. Для этого продифференцируем уравнения (25) и (26), которые перепишем так:

$$z = \arccos\frac{\sin\varphi}{\sin\delta}$$

и

$$t = \arccos\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\delta};$$

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi} = -\frac{\cos\varphi}{\sin\delta\sqrt{1-\dfrac{\sin^2\varphi}{\sin^2\delta}}} = -\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\sin^2\delta-\sin^2\varphi}} = -$$

$$-\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1-\left(\dfrac{\cos\delta}{\cos\varphi}\right)^2}}.$$

С учетом (24) окончательно имеем

$$\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)_0 = -\sec r. \tag{27}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi}=-\frac{1}{\operatorname{tg}\delta\cos^2\varphi\sqrt{1-\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\delta}\right)^2}}=-\frac{\cos\delta}{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\delta\cos^2\varphi-\cos^2\delta\,(1-\cos^2\varphi)}}=$$

$$=-\frac{\cos\delta}{\cos^2\varphi\sqrt{1-\left(\frac{\cos\delta}{\cos\varphi}\right)^2}}=-\frac{\sin r}{\cos\varphi\sqrt{1-\sin^2 r}}=-\frac{\operatorname{tg} r}{\cos\varphi}.$$

Выражая dt в минутах времени, а $d\varphi$ в минутах дуги, окончательно находим

$$\left(\frac{\partial t^m}{\partial \varphi'}\right)_0=-\frac{1}{15}\operatorname{tg} r\sec\varphi_0. \tag{28}$$

В качестве примера ниже приводится вспомогательная таблица (табл. 6) для составления рабочих эфемерид при наблюдениях в широтном диапазоне $56°30' \leqslant \varphi \leqslant 57°30'$.

$\varphi_0 = 57°$

Таблица 6

δ	t	$\left(\frac{\partial t}{\partial\varphi}\right)_0$	z	$\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)_0$	r	$\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)_0$	δ	t	$\left(\frac{\partial t}{\partial\varphi}\right)_0$	z	$\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)_0$	r	$\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)_0$
°	h m	m	° ′	′	° ′	′	°	h m	m	° ′	′	° ′	′
89	5 53.9	−0.004	32 59	−1.00	1 50	+0.05	75	4 22.5	−0.066	29 45	−1.14	28 22	+0.83
88	5 47.7	−0.008	32 57	−1.00	3 40	+0.10	74	4 15.2	−0.072	29 15	−1.16	30 24	+0.90
87	5 41.5	−0.012	32 53	−1.00	5 31	+0.15	73	4 07.7	−0.078	28 43	−1.19	32 28	+0.98
86	5 35.3	−0.016	32 47	−1.01	7 22	+0.20	72	3 59.9	−0.084	28 08	−1.21	34 34	+1.06
85	5 29.0	−0.020	32 40	−1.01	9 13	+0.25	71	3 51 9	−0.091	27 30	−1.25	36 43	+1.15
84	5 22.7	−0.024	32 31	−1.02	11 04	+0.30	70	3 43.7	−0.099	26 49	−1.28	38 54	+1.24
83	5 16.4	−0.028	32 20	−1.03	12 56	+0.35	69	3 35.1	−0.107	26 04	−1.33	41 09	+1.35
82	5 10.0	−0.032	32 07	−1.03	14 48	+0.41	68	3 26.1	−0.116	25 14	−1.38	43 27	+1.46
81	5 03.5	−0.037	31 53	−1.04	16 42	+0.46	67	3 16.7	−0.126	24 21	−1.44	45 50	+1.59
80	4 57.0	−0.041	31 37	−1.06	18 36	+0.52	66	3 06.9	−0.137	23 22	−1.50	48 19	+1.73
79	4 50.3	−0.046	31 19	−1.07	20 30	+0.58	65	2 56.4	−0.151	22 17	−1.59	50 54	+1.90
78	4 43.6	−0.050	30 58	−1.08	22 26	+0.64	64	2 45.3	−0.166	21 05	−1.69	53 36	+2.08
77	4 36.7	−0.055	30 38	−1.10	24 24	+0.70	63	2 33.3	−0.185	19 44	−1.81	56 28	+2.34
76	4 29.7	−0.061	30 11	−1.12	26 22	+0.77							

Составление рабочих эфемерид производится следующим образом. Из таблиц, интерполируя по δ, выбираем t, z, r и вводим в них поправки за разность широт:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial\varphi}\right)_0(\varphi-\varphi_0),\quad \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)_0(\varphi-\varphi_0)\ \text{и}\ \left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)_0(\varphi-\varphi_0).$$

По полученным t и r вычисляем s и A:

$$s_{W,E}=\alpha_{W,E}\pm t_{W,E},$$

$$A_W=360°-r_W,\quad A_E=r_E.$$

§ 5. Формулы для вычисления угла между звездами пары

Угол между звездами пары

$$\beta=N_E-N_W, \tag{29}$$

где

$$N_{E,W}=\frac{1}{2}(N_L+N_R)_{E,W}+cq_{E,W}-\delta A_{E,W}; \tag{30}$$

$$N_L=L+[\pm(M-10)_L\mu\pm k_{\text{ср}.L}]\csc z_L+b_L\operatorname{ctg} z_L;$$

$$N_R=R\pm 180^\circ+[\pm(M-10)_R\mu\pm k_{\text{ср}.R}]\csc z_R+b_R\operatorname{ctg} z_R;$$

$$c=\frac{(N_L-N_R)_{E,W}}{p_{E,W}};$$

$$p_{E,W}=(\csc z_R+\csc z_L)_{E,W};$$

$$q_{E,W}=\frac{1}{2}(\csc z_R-\csc z_L)_{E,W}; \quad \delta A_{E,W}=0''.16p_{E,W}\cos\varphi\cos r_{E,W}.$$

В этих формулах приняты обозначения: L, R — отсчеты по горизонтальному кругу при наблюдении звезды, M — отсчеты микрометра главной трубы, μ — цена деления микрометра, b — наклонность горизонтальной оси трубы, c — коллимационная ошибка трубы, δA — поправка в направление за суточную аберрацию, $k_{\text{ср}}$ — средняя поправка за кривизну суточной параллели звезды.

В формуле (30) следует брать среднее значение коллимации, вычисленной по наблюдениям звезд пары и земного предмета.

Поправка k за кривизну суточной параллели может быть представлена формулой, заимствованной из работы [4, стр. 184],

$$k_i=\frac{15^2(\Delta T_i^s)^2}{4\rho''}\sin 2\delta=K(\Delta T_i^s)^2, \tag{31}$$

где

$$K=\frac{15^2\sin 2\delta}{4\rho''},$$

$$\Delta T_i=T_i+u-s_э;$$

здесь T_i — отсчет по звездному хронометру в момент наведения нити микрометра на звезду, u — поправка хронометра, $s_э$ — момент элонгации звезды.

Для каждого наблюдения звезды необходимо вычислить k по формуле (31) и образовать среднее из трех значений при каждом круге инструмента

$$k_{\text{ср}}=\frac{k_1+k_2+k_3}{3}=\frac{K}{3}[(\Delta T_1^s)^2+(\Delta T_2^s)^2+(\Delta T_3^s)^2]. \tag{д}$$

Удобнее вести вычисления со средними в каждом полуприеме моментами наблюдения звезды

$$k_0=K(\Delta T_{\text{ср}}^s)^2 \tag{32}$$

и вводить поправку Δk в вычисленное таким образом k_0

$$k_{\text{ср}}=k_0+\Delta k, \tag{33}$$

где

$$\Delta T_{\text{ср}}=T_{\text{ср}}+u-s_э,$$

$$T_{\text{ср}}=\frac{T_1+T_2+T_3}{3}.$$

Подставляя в (33) вместо $k_{ср}$ и k_0 их значения из (д) и (32), найдем Δk

$$\Delta k = k_{ср} - k_0 = \frac{K}{3}(\Delta T_1^2 + \Delta T_2^2 + \Delta T_3^2) - K\Delta T_{ср}^2. \qquad (е)$$

Обозначим

$$\Delta t_1 = T_1 - T_{ср} = \Delta T_1 - \Delta T_{ср},$$
$$\Delta t_2 = T_2 - T_{ср} = \Delta T_2 - \Delta T_{ср},$$
$$\Delta t_3 = T_3 - T_{ср} = \Delta T_3 - \Delta T_{ср},$$

откуда

$$\Delta T_1 = \Delta T_{ср} + \Delta t_1,$$
$$\Delta T_2 = \Delta T_{ср} + \Delta t_2,$$
$$\Delta T_3 = \Delta T_{ср} + \Delta t_3.$$

Подставив полученные значения ΔT_i в (е), найдем

$$\Delta k = \frac{K}{3}[3\Delta T_{ср}^2 + 2\Delta T_{ср}(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3) + \Delta t_1^2 + \Delta t_2^2 + \Delta t_3^2 - 3\Delta T_{ср}^2]$$

и окончательно

$$\Delta k = \frac{K}{3}(\Delta t_1^2 + \Delta t_2^2 + \Delta t_3^2) = \frac{K}{3}\Sigma\Delta t^2. \qquad (34)$$

Ниже приводится таблица поправок Δk.

Таблица 7

Поправки $\Delta k''$

$\Sigma(\Delta t^s)^2$ \ δ	0° / 90°	5° / 85°	10° / 80°	15° / 75°	20° / 70°	25° / 65°	30° / 60°	35° / 55°	40° / 50°	45° / 45°
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
100	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
200	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02
300	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03
400	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04
500	0.90	0.01	0.02	0.02	0.03	0.04	0.04	0.04	0.05	0.05
600	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.04	0.05	0.05	0.05	0.06
700	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.06	0.06	0.06
800	0.00	0.01	0.02	0.04	0.05	9.06	0.06	0.07	0.07	0.07
900	0.00	0.01	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.08	0.08
1000	0.00	0.02	0.03	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.09	0.09

Поправка Δk всегда прибавляется к значению k_0, потом сумме $(k_0 + \Delta k)$ приписывается знак минус или плюс, если звезда наблюдается соответственно вблизи западной или восточной элонгации.

Зенитные расстояния z в средние моменты наблюдения звезд в полуприемах, участвующие в формулах для вычисления угла β между звездами, найдем по формуле

$$z = z_э + \Delta z,$$

где

$$\Delta z' = \pm\Delta T_{ср}^m \cdot 15\cos\delta,$$

а зенитное расстояние z звезды в элонгации находится из известного выражения

$$\cos z_э = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta}.$$

В формуле для определения Δz знак плюс относится к западной, а минус — к восточной элонгации.

§ 6. Опытные наблюдения

С целью проверки теоретических исследований метода на обсерватории Уральского госуниверситета универсальным инструментом «Гильдебранд» были выполнены опытные наблюдения. Определены широта столба и азимут земного предмета из наблюдений восемнадцати пар звезд вблизи элонгации. Для сравнения азимут этого же предмета был определен восемнадцатью приемами по часовому углу Полярной. Значение угла β между звездами пар колеблется от 43° до 82°. Значения широт приведены к среднему полюсу и уровню моря.

Опытные наблюдения дали следующие результаты:

1) средняя квадратическая ошибка азимута направления на земной предмет по одной паре звезд вблизи элонгации из одного приема наблюдений получилась равной $\pm 1'',00$, а средняя квадратическая ошибка окончательного значения азимута из 17 приемов — $\pm 0'',24$ (из-за просчета при наведении на земной предмет одно значение азимута из обработки исключено);

2) по часовому углу Полярной азимут предмета получен соответственно со следующими средними квадратическими ошибками: $\pm 1'',3$[illegible] и $\pm 0'',33$;

3) средняя квадратическая ошибка широты по одной паре звезд из одного приема наблюдений равна $\pm 1'',45$, а средняя квадратическая ошибка окончательного значения широты из 18 приемов — $\pm 0'',34$;

4) расхождение окончательных значений азимута, полученных из наблюдений звезд в элонгации и по часовому углу Полярной, составляет $0'',08$;

5) расхождение значений широт столба, переданного с астропункта и полученного из наблюдений звезд вблизи элонгации, равно $0'',4$[illegible] Это расхождение, кроме других причин, возможно, вызвано разностью уклонений отвесных линий на вершине и на склоне горы.

Из изложенного видно, что результаты наблюдений подтверждают наши выводы о наивыгоднейших условиях наблюдений и точности определения азимута и широты.

Предлагаемый способ определения азимута и широты по наблюдениям звезд вблизи элонгации обладает следующими преимуществами и особенностями.

1. Его можно отнести к разряду точных способов; по точности определения азимута он не уступает известным способам, а точность определения широты немного ниже, чем при пользовании способами Талькотта и Певцова. При необходимости точность определяемой широты можно повысить, увеличив число наблюдаемых пар. В случае применения данного способа на астроопределениях 1 класса целесообразно, по-видимому, увеличить число наблюдаемых пар до 24; тогда точность определения широты будет достаточной, и повышение точности определения азимута не будет лишним, учитывая его особое значение при создании астрономо-геодезической сети.

2. Так как угол β между звездами пары участвует в вычислениях румбов звезд, то, естественно, истинные ошибки в румбах целиком зависят от истинной ошибки в угле β (согласно (17) сумма их равна $d\beta$), и поэтому происходит частичная компенсация погрешности в угле между звездой и земным предметом, что повышает точность определения азимута предмета.

3. Объем вычислений в данном способе в несколько раз меньше, чем в других известных способах.

4. Определяя азимут, мы при практически ничтожной дополнительной затрате времени на вычисления получаем и широту.

5. Точное значение азимута направления в какой-либо точке можно определить, не зная точного времени и координат этой точки.

6. Влияние случайных ошибок координат звезд в предлагаемом способе почти полностью исключается тем, что наблюдается большое число разных звезд. Можно предположить, что систематические ошибки тоже исключаются, так как в каждой из формул для определения истинных ошибок азимута и широты коэффициенты при $d\delta_W$ и $d\delta_E$ имеют противоположные знаки. Малые ошибки в прямых восхождениях звезд на точность определяемых азимута и широты практически не влияют.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блажко С. Н. Курс сферической астрономии. Гостехиздат, М., 1948.
2. Куцериб Н. А. Совместное определение широты и азимута по наблюдениям звезд в элонгации. «Геодезия и картография», 1965, № 10.
3. Труды ЦНИИГАиК, вып. 30. М., 1939.
4. Цветков К. А. Практическая астрономия. Геодезиздат, М., 1951.