МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1966 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 5

Н. Н. ОРЕЛ

О ДВУХГРУППОВОМ РЕШЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье предлагается метод двухгруппового решения нормальных уравнений по способу Гаусса и по способу квадратных корней.

1. Способ Гаусса

Как известно, матрица A нормальных уравнений в этом случае может быть представлена в виде произведения двух треугольных матриц, а именно:

$$A = B'C, \tag{1}$$

где B' — нижняя единично-треугольная матрица элиминационных уравнений [7, стр. 83], C — верхняя треугольная матрица преобразованных уравнений.

Разобьем матрицу A на четыре подматрицы A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} и матрицы B' и C — на подматрицы тех же порядков. Тогда на основании (1) можем записать:

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} B'_{11} & 0 \\ B'_{12} & B'_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & C_{22} \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

После перемножения матриц в правой части равенства (2) и сравнения соответствующих подматриц правой и левой частей полученного равенства будем иметь такое выражение для диагональных и наддиагональной подматриц исходной матрицы A:

$$\left.\begin{aligned} &A_{11} = B'_{11}C_{11}, \quad A_{12} = B'_{11}C_{12}, \\ &A_{22} = B'_{12}C_{12} + B'_{22}C_{22}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Из последнего равенства найдем:

$$\tilde{A}_{22} = B'_{22}C_{22} = A_{22} - B'_{12}C_{12}. \tag{4}$$

Аналогичная формула для вектора свободных членов L нормальных уравнений будет иметь выражение:

$$\tilde{L}_{II} = B'_{22}L_{II\,\text{пр}} = L_{II} - B'_{12}L_{I\,\text{пр}}, \tag{5}$$

где L_{II}, $L_{I\,\text{пр}}$ и $L_{II\,\text{пр}}$ — преобразованные векторы, смысл которых легко уяснить из таблиц 1 и 2.

На практике удобно вычислять одновременно матрицу $\tilde{A}_{22}$ и вектор L_{II}, для чего целесообразно формулы (4) и (5) объединить в одну:

$$\|\tilde{A}_{22}\tilde{L}_{II}\| = \|A_{22}L_{II}\| - B'_{12}\|C_{12}L_{I\,\text{пр}}\|. \tag{6}$$

Формула (6) позволяет выполнять двухгрупповое решение нормальных уравнений по способу Гаусса.

Ниже приводится соответствующая схема двухгруппового решения четырех уравнений (табл. 1 и 2).

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6
	$A_{11}/C_{11}/B_{11}$		$A_{12}/C_{12}/B_{12}$		$L_I/L_{I\,\text{пр}}/L_{I\,\text{э}}$	$s_I/s_{I\,\text{пр}}/s_{I\,\text{э}}$
$N_1, П_1$	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$[al]$	$[as]$
$Э_1$	-1	$-\dfrac{[ab]}{[aa]}$	$-\dfrac{[ac]}{[aa]}$	$-\dfrac{[ad]}{[aa]}$	$-\dfrac{[al]}{[aa]}$	$-\dfrac{[as]}{[aa]}$
N_2 $П_2$	 0	$[bb]$ $[bb.1]$	$[bc]$ $[bc.1]$	$[bd]$ $[bd.1]$	$[bl]$ $[bl.1]$	$[bs]$ $[bs,1]$
$Э_2$	0	-1	$-\dfrac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$-\dfrac{[bd.1]}{[bb.1]}$	$-\dfrac{[bl.1]}{[bb.1]}$	$-\dfrac{[bs.1]}{[bb.1]}$
	δx_1	δx_2				

		$A_{22}L_{II}$		s_{II}
N_3	$[cc]$	$[cd]$	$[cl]$	$[cs]$
N_4		$[dd]$	$[dl]$	$[ds]$

Таблица 2

	3	4	5	6
	$\tilde{A}_{22}/C_{22}/B_{22}$		$\tilde{L}_{II}/L_{II\,\text{пр}}/L_{II\,\text{э}}$	$\tilde{s}_{II}/s_{II\,\text{пр}}/s_{II\,\text{э}}$
$\tilde{N}_3, П_3$	$[\widetilde{cc}]$	$[\widetilde{cd}]$	$[\widetilde{cl}]$	$[\widetilde{cs}]$
$Э_3$	-1	$-\dfrac{[\widetilde{cd}]}{[\widetilde{cc}]}$	$-\dfrac{[\widetilde{cl}]}{[\widetilde{cc}]}$	$-\dfrac{[\widetilde{cs}]}{[\widetilde{cc}]}$
$\tilde{N}_4$ $П_4$	 0	$[\widetilde{dd}]$ $[\widetilde{dd}.1]$	$[\widetilde{dl}]$ $[\widetilde{dl}.1]$	$[\widetilde{ds}]$ $[\widetilde{ds}.1]$
$Э_4$	0	-1	$-\dfrac{[\widetilde{dl}.1]}{[\widetilde{dd}.1]}$	$-\dfrac{[\widetilde{ds}.1]}{[\widetilde{dd}.1]}$
	δx_3	δx_4		

Необходимо отдельно остановиться на определении расширенной матрицы $\|\tilde{A}_{22}\tilde{L}_{II}\|$. Оказывается, ее можно вычислять непосредственно по табл. 1 и по расширенной подматрице $\|A_{22}L_{II}\|$ без записи результатов промежуточных вычислений. Для этого формулу (6) удобно представить в виде:

$$\|\tilde{A}_{22}\tilde{L}_{II}\| = \|A_{22}L_{II}\| - B_{12} \bigcirc \|C_{12}L_{I\ \text{пр.}}\|, \tag{7}$$

где знак $\bigcirc$ показывает, что матрицы B_{12} и $\|C_{12}L_{I\ \text{пр.}}\|$ перемножаются по столбцам [2, стр. 83]. Очевидно, в табл. 1 элементы первой матрицы находятся на строках $Э_1$ и $Э_2$, второй — на $П_1$ и $П_2$.

При вычислении матрицы $\|\tilde{A}_{22}\tilde{L}_{II}\|$ возможен построчный контроль. В этом случае формула (7) получает выражение:

$$\|\tilde{A}_{22}\tilde{L}_{II} \mid \tilde{s}_{II}\| = \|A_{22}L_{II} \mid s_{II}\| - B_{12} \bigcirc \|C_{12}L_{I\ \text{пр}} \mid s_{I\ \text{пр}}\|. \tag{8}$$

Очевидно, построчные суммы элементов матрицы $\|\tilde{A}_{22}\tilde{L}_{II}\|$ должны равняться соответствующим элементам столбца $\tilde{s}_{II}$.

2. Способ квадратных корней

Здесь в основу обоснования способа кладется известное равенство

$$A = S'S, \tag{9}$$

где S — верхняя треугольная матрица способа корней [6].

Если в (9) матрицы A, S' и S заменим соответствующими клеточными матрицами, получим равенство, аналогичное (2).

Проделав с этим равенством те же операции, что и с (2), найдем в частности:

$$A_{22} = S'_{12}S_{12} + S'_{22}S_{22}. \tag{10}$$

Легко понять, какое выражение получат формулы (4) и (5) для способа квадратных корней.

Формула же, аналогичная (8), здесь будет иметь выражение:

$$\|\tilde{A}_{22}\tilde{L}_{II} \mid \tilde{s}_{II}\| = \|A_{22}L_{II} \mid s_{II}\| - S_{12} \bigcirc \|S_{12}L_{I\ \text{пр}} \mid s_{I\ \text{пр}}\|. \tag{11}$$

Схема двухгруппового решения нормальных уравнений по способу квадратных корней представлена таблицами 3 и 4.

Изложенный метод допускает также раздельное вычисление величин, необходимых для оценки точности уравненных элементов триангуляции. Так, для определения веса уравненного элемента и веса функции уравненных элементов нужно проделать над соответствующими векторами те же операции, что и над векторами свободных членов. Тогда искомые величины определяются по формуле:

$$\frac{1}{P} = \omega_1 + \omega_2, \tag{12}$$

где для наших схем ω_1 и ω_2 вычисляются по формулам:

для способа Гаусса

$$\omega_1 = \frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]}, \quad \omega_2 = \frac{\tilde{f}_3^2}{[\tilde{c}c]} + \frac{[\tilde{f}_4 \cdot 1]^2}{[\tilde{d}d \cdot 1]}, \tag{13}$$

Таблица 3

	1	2	3	4	5	6
	A_{11}		A_{12}		L_I	s_I
1	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$[al]$	$[as]$
2		$[bb]$	$[bc]$	$[bd]$	$[bl]$	$[bs]$
	S_{11}		S_{12}		$L_{I\,пр}$	$s_{I\,пр}$
1	$\sqrt{[aa]}$	$\frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}}$	$\frac{[ac]}{\sqrt{[aa]}}$	$\frac{[ad]}{\sqrt{[aa]}}$	$\frac{[al]}{\sqrt{[aa]}}$	$\frac{[as]}{\sqrt{[aa]}}$
2	0	$\sqrt{[bb.1]}$	$\frac{[bc.1]}{\sqrt{[bb.1]}}$	$\frac{[bd.1]}{\sqrt{[bb.1]}}$	$\frac{[bl.1]}{\sqrt{[bb.1]}}$	$\frac{[bs.1]}{\sqrt{[bb.1]}}$
	δx_1	δx_2				
				$A_{22} L_{II}$		s_{II}
3			$[cc]$	$[cd]$	$[cl]$	$[cs]$
4				$[dd]$	$[dl]$	$[ds]$

Таблица 4

	3	4	5	6
	$\tilde{A}_{22}$		$\tilde{L}_{II}$	$\tilde{s}_{II}$
3	$[\tilde{cc}]$	$[\tilde{cd}]$	$[\tilde{cl}]$	$[\tilde{cs}]$
4		$[\tilde{dd}]$	$[\tilde{dl}]$	$[\tilde{ds}]$
	S_{22}		$L_{II\,пр}$	$s_{II\,пр}$
3	$\sqrt{[\tilde{cc}]}$	$\frac{[\tilde{cd}]}{\sqrt{[\tilde{cc}]}}$	$\frac{[\tilde{cl}]}{\sqrt{[\tilde{cc}]}}$	$\frac{[\tilde{cs}]}{\sqrt{[\tilde{cc}]}}$
4	0	$\sqrt{[\tilde{dd}.1]}$	$\frac{[\tilde{dl}.1]}{\sqrt{[\tilde{dd}.1]}}$	$\frac{[\tilde{ds}.1]}{\sqrt{[\tilde{dd}.1]}}$
	δx_3	δx_4		

для способа квадратных корней

$$\omega_1 = \left(\frac{f_1}{\sqrt{[aa]}}\right)^2 + \left(\frac{[f_2 \cdot 1]}{\sqrt{[bb \cdot 1]}}\right)^2, \quad \omega_2 = \left(\frac{\tilde{f}_3}{\sqrt{[\tilde{cc}]}}\right)^2 + \left(\frac{[\tilde{f_4 \cdot 1}]}{\sqrt{[\tilde{dd} \cdot 1]}}\right)^2. \qquad (14)$$

Выводы

1. В статье предложен метод решения нормальных уравнений, позволяющий эффективно выполнять двухгрупповое уравнивание триангуляции.

2. Метод отличается простотой — он сводит решение уравнений к обычным преобразованиям их матриц по общеизвестным схемам Гаусса или квадратных корней.

3. Метод позволяет в значительной степени снизить объем трудоемкой работы по вычислению преобразованных элементов $[bb.\ 1], \ldots, [cc.\ 2], \ldots$ и т. д. при решении обширных систем уравнений, так как преобразование второй группы уравнений начинается с исходной расширенной подматрицы $\|\tilde{A}_{22}\ \tilde{L}_{11}\|$, которая вычисляется довольно просто.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяченко Л. Ф. Некоторые применения блочных матриц к групповому уравниванию сетей триангуляции с измеренными направлениями. Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 3, М., 1960.
2. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, М., 1961.
3. Мазмишвили А. И. Уравновешивание и оценка точности по методу групп. Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 3. М., 1959.
4. Мазмишвили А. И., Беляев Б. И. Общность уравновешивания по методу групп при косвенных и условных измерениях. Труды МИИГАиК, вып. 47. Геодезиздат, М., 1961.
5. Мазмишвили А. И., Беляев Б. И. Общность уравновешивания по методу групп при косвенных и условных измерениях. Труды МИИГАИК, вып. 48. Геодезиздат, М., 1961.
6. Орел Н. Н. К вопросу обработки результатов посредственных измерений. Маркшейдерское дело, вып. 4. Металлургиздат, М., 1956.
7. Хаусхолдер А. С. Основы численного анализа. ИЛ, М., 1956.

Работа поступила
23 марта 1966 г.