МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1966 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 5

П. В. ПАВЛИВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОШИБОК, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПРЕВЫШЕНИЙ, ПРИ НИВЕЛИРОВАНИИ ВДОЛЬ РЕК

Ошибки геометрического нивелирования, зависящие от величины превышений, до настоящего времени изучены недостаточно.

Их влияние особенно ярко должно проявляться при нивелировании вдоль рек, где нивелирные ходы в основном прокладываются по однообразно направленным скатам, и по ходу накопляются значительные разности высот, а следовательно, и погрешности, зависящие от превышений.

Значительные объемы геометрического нивелирования, выполненного вдоль рек, при исследовании таких ошибок позволяют применить метод математической статистики, а именно — метод корреляции [1, 3]. Для большинства рек характерны небольшие уклоны и поэтому для исследования приняты только те участки нивелирных линий, проложенные вдоль рек, средние превышения по которым не превосходят 2 *м* на 1 *км* хода, а результаты нивелирования соответствуют требованиям инструкций и помещены в каталогах. Общая протяженность таких секций по нивелирным линиям, проложенным вдоль рек Пинега, Вашка, Сухона, Волга, Иртыш, Джезде, Каракингир, Сарысу, Чикойя, Буреча, Витим, Каренга, Бурея и Амур составила 2804 *км*.

Известно, что крутизна склонов меняет характер действия и механизм накопления ряда источников ошибок, особенности которых невозможно выяснить в одной статье. Целью настоящего исследования является только определение суммарного значения той части ошибки на 1 *км* хода, которая получается в результате воздействия всех этих источников и зависит от превышения. Поэтому при исследовании указанной части ошибки используем абсолютные значения разностей превышений прямых и обратных ходов, абсолютные значения разностей высот конечных точек ходов, количество и длины таких ходов, проложенных в рассматриваемых условиях.

Учитывая то обстоятельство, что при нивелировании вдоль рек сложность условий не позволяет выдержать примерно равную длину секций, группирование произведем по двум признакам A и B, то есть по величине превышений h и длине секций r.

Определим средние значения разностей превышений $d_{\text{ср}_{ij}}$ и длин двойных ходов $r_{\text{ср}_{ij}}$, а затем на основании общепринятой формулы [2]

$$d_{\text{ср}_{ij}} = \varepsilon_{ij} \sqrt{2r_{ij}}, \qquad (1)$$

вычислим значення средннх квадратических ошнбок ε_{ij} на один *км* хода для каждой подгруппы (табл. 1).

Таблица 1

Значения ε_{ij}

B \ A	1		2		3		4		5		6		7	
	n_{ij}	ε_{ij}	n_{ij}	ε_{ij}	n_{ij}	ε_{ij}	n_{ij}	ε_{ij}	n_{ij}	ε_{ij}	n_{ij}	ε_{ij}	n_{ij}	ε_{ij}
1	23	1,01	7	1,47	3	0,96	3	0,53	8	1,13	5	0,97	4	2,10
2	7	1,65	9	1,39	13	1,75	14	1,56	8	1,89	14	1,64	2	2,27
3	5	1,79	4	1,89	5	0,54	16	1,84	10	1,61	12	1,74	5	1,05
4	18	1,60	15	1,28	20	1,94	26	1,74	23	1,35	21	1,84	12	1,51
5	10	1,32	8	1,74	11	1,31	8	1,40	5	1,50	7	1,47	8	1,88
Σ	63	1,36	43	1,47	52	1,57	67	1,63	54	1,45	59	1,65	31	1,66

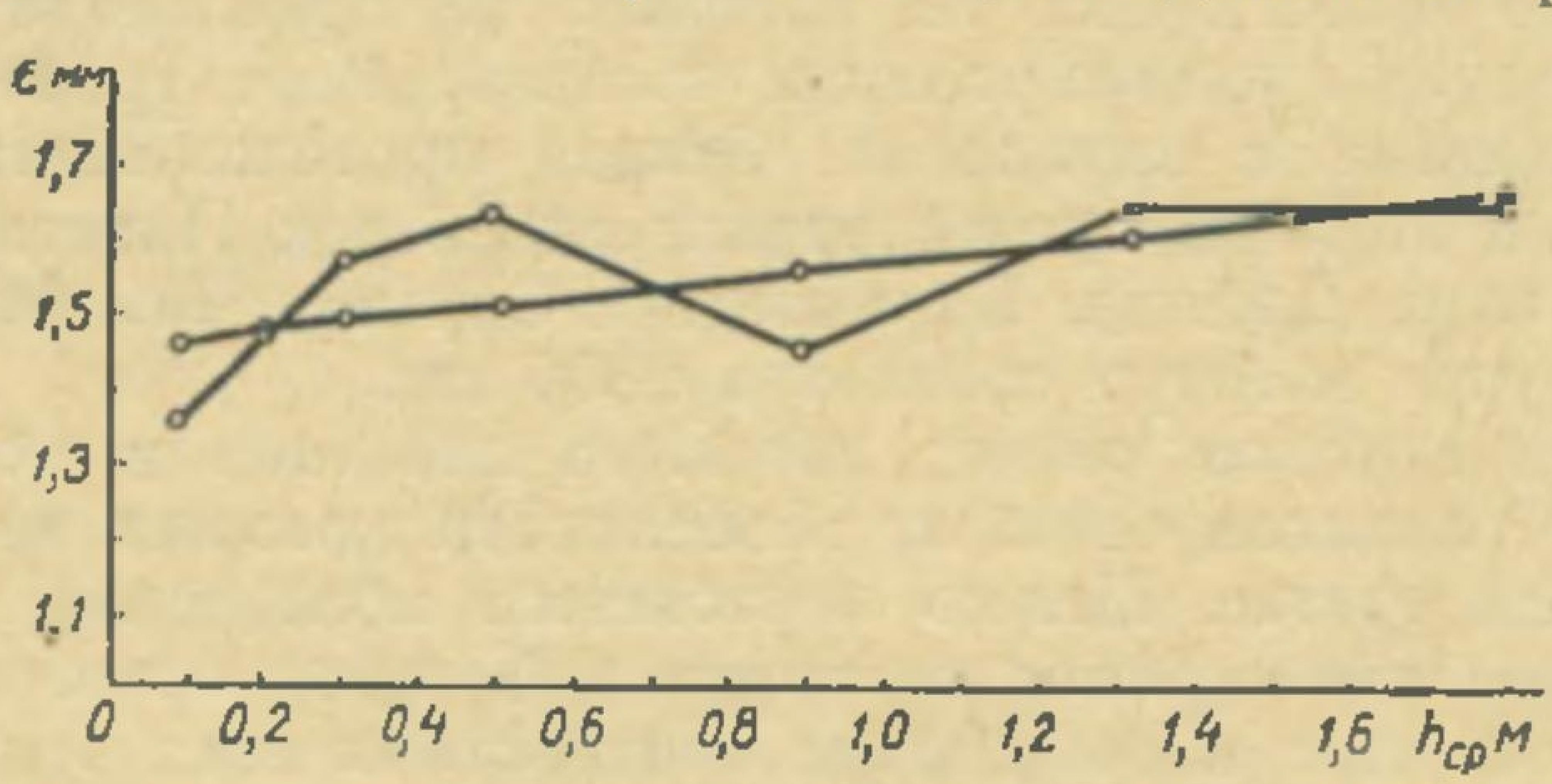
В результате получим таблицу двухфакторного статистического комплекса неравноточных измерений. За вес, соответственно, примем количество измерений каждой группы n_i и подгруппы n_{ij}, с учетом которых определим средние значения средних квадратических ошибок для каждой из семи групп (табл. 1).

Анализируя данные табл. 1 и рисунок нетрудно видеть, что между ε и h существует прямолинейная корреляционная связь, выражаемая зависимостью

$$\varepsilon = a + bh, \qquad (2)$$

где b — коэффициент ошибки, зависящей от величины превышения;
a — среднее значение ошибки на 1 *км* хода, зависящей от остальных факторов.

Для установления степени корреляционной связи между ε и h определим параметры a и b, входящие в формулу (2) и коэффициент корреляции r. Так как подстановка любой пары значений h_i и ε_i в уравнение (2) не даст точного равенства, составим уравнения ошибок вида:



№п/п	1	2	3	4	5	6	7
h м	0,09	0,20	0,30	0,49	0,88	1,32	1,79
ε мм	1,36	1,47	1,57	1,63	1,45	1,65	1,66
ε′ мм	1,46	1,48	1,49	1,51	1,56	1,62	1,68

$$a + bh_1 - \varepsilon_1 = V_1,$$

$$a + bh_2 - \varepsilon_2 = V_2,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$a + bh_k - \varepsilon_k = V_k, \qquad (3)$$

где k — количество уравнений.

Измерения ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$; $h_1, h_2, \ldots, h_k$) неравноточны, поэтому, умножив уравнения (3) на соответствующие веса $n_1, n_2, \ldots, n_k$, получим:

$$n_1 a + n_1 bh_1 - n_1\varepsilon_1 = n_1 V_1,$$

$$n_2 a + n_2 bh_2 - n_2\varepsilon_2 = n_2 V_2,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$n_k a + n_k bh_k - n_k\varepsilon_k = n_k V_k \qquad (4)$$

Решим уравнения (4) по способу наименьших квадратов при условии

$$[n\,VV]=\min, \tag{5}$$

где $i=1, 2, \ldots, k$.

При наличии двух неизвестных a и b это приведет к составлению двух нормальных уравнений

$$a[n]+b[nh]-[n\varepsilon]=0,$$
$$a[nh]+b[nh^2]-[nh\varepsilon]=0. \tag{6}$$

Из первого равенства уравнений (6) находим:

$$a=\bar{h}b-\bar{\varepsilon}=0, \tag{7}$$

где $\bar{h}=\frac{[nh]}{N}$; $\bar{\varepsilon}=\frac{[n\varepsilon]}{N}$ и $[n]=N$.

Вычитая из членов каждого из уравнений (3) соответствующие члены уравнения (6) получим:

$$\delta h_i b-\delta\varepsilon_i=V_i, \tag{8}$$

где

$$\delta h_i=h_i-\bar{h};\quad \delta\varepsilon_i=\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}. \tag{9}$$

При соблюдении требования (5) находим:

$$b[n\cdot\delta h^2]-[n\delta h\cdot\delta\varepsilon]=0, \tag{10}$$

откуда

$$b=\frac{[n\cdot\delta h\cdot\delta\varepsilon]}{[n\cdot\delta h^2]}. \tag{11}$$

После этого из уравнения (7) можно получить

$$a=\bar{\varepsilon}-\bar{h}\frac{[n\delta h\cdot\delta\varepsilon]}{[n\cdot\delta h^2]}. \tag{12}$$

Таким образом, параметры a и b будут найдены. Если бы между h и ε не было никакой связи, то произведения $n_i\delta h_i\cdot\delta\varepsilon_i$ по знаку и по величине должны были бы иметь случайный характер, а в таком случае величина $\frac{[n\delta h\cdot\delta\varepsilon]}{N}$ при большом N должна быть близка к нулю, то есть

$$\frac{[n\delta h\cdot\delta\varepsilon]}{N}=0. \tag{13}$$

Выразив δh и $\delta\varepsilon$ в относительной мере и разделив их на стандартные отклонения σh и $\sigma\varepsilon$, получим коэффициент корреляции

$$r_k=\frac{[n\delta h\cdot\sigma\varepsilon]}{N\sigma h\cdot\sigma\varepsilon}, \tag{14}$$

где

$$\sigma\varepsilon=\sqrt{\frac{[n\delta\varepsilon^2]}{N}}=\sqrt{\frac{b^2[n\delta h^2]}{N}}=b\sigma h. \tag{15}$$

Таблица 2

Исследование корреляционной связи между h и ε

№ п.п	n_i	$n_i \varepsilon_i$	ε_i *мм*	$\delta_{\varepsilon i}$	$\delta^2_{\varepsilon i}$	$n_i \delta^2_{\varepsilon i}$	$\delta_{\varepsilon i} \delta_{hi}$	δ_{hi}	h_i *м*	δ^2_{hi}	$n_i \delta^2_{hi}$	$n_i \delta_\varepsilon \delta_{hi}$	$n_i h_i$	ε_i *мм*	v_i	v_i^2	$n_i v_i^2$
1	63	85,73	1,36	−0,18	0,0324	2,0441	+0,1026	−0,57	0,09	0,3249	20,4687	−6,4638	6,17	1,46	−0,10	0,0100	0,6300
2	43	63,18	1,47	−0,07	0,0049	0,2107	+0,0322	−0,46	0,20	0,2116	9,0988	+1,3846	8,60	1,48	−0,01	0,0001	0,0043
3	52	81,51	1,57	+0,03	0,0009	0,0468	−0,0108	−0,36	0,30	0,1296	6,7392	−0,5616	15,60	1,49	+0,08	0,0064	0,3328
4	67	109,25	1,63	+0,09	0,0081	0,5427	−0,0153	−0,17	0,49	0,0289	1,9363	−1,0251	32,83	1,51	+0,12	0,0144	0,9648
5	54	78,81	1,45	−0,09	0,0081	0,4374	−0,0198	+0,22	0,88	0,0484	2,6136	−1,0692	47,52	1,56	−0,11	0,0121	0,6534
6	59	97,62	1,65	+0,11	0,0121	0,7139	+0,0726	+0,66	1,32	0,4356	25,7004	+4,2834	77,88	1,62	+0,03	0,0009	0,0531
7	31	51,35	1,66	+0,12	0,0144	0,4464	+0,1356	+1,13	1,79	1,2769	39,5839	+4,2036	55,49	1,68	−0,02	0,0004	0,0124

$$r_\kappa = \frac{13,6795}{369 \cdot 0,110 \cdot 0,536} = 0,6288.$$

$$b = \frac{13,6795}{106,1409} = 0,1289.$$

$$a = \bar{\varepsilon} - b \cdot h_{\text{ср}} = 1,54 - 0,13 \cdot 0,66 = 1,54 - 0,09 = 1,45.$$

$$m_r = \pm\sqrt{\frac{1 - 0,397}{369 - 2}} = \pm\sqrt{0,0015}\,.$$

$$m_z = \pm\, 0,04.$$

$$m_r = \pm\sqrt{\frac{[n_i v_i^2]}{(N-2)[n_i \delta h_i^2]}} = \frac{0,085}{\sqrt{106,1409}} = 0,008.$$

Согласно А. С. Чеботареву [3], средние квадратические ошибки определения величин r и b (m_r и m_b) вычисляются по формулам:

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{N-2}}, \tag{16}$$

$$m_b = \sqrt{\frac{[n_i V_i^2]}{(N-2)\,[n_i \delta h_i^2]}}. \tag{17}$$

Расчеты, связанные с исследованием корреляционной связи между ε и h, сведены в табл. 2.

По данным табл. 2 получены следующие величины:

$$r_k = +0{,}63,$$

$$b = +0{,}13,$$

$$a = +1{,}45,$$

$$m_r = \pm 0{,}04,$$

$$m_b = \pm 0{,}01.$$

Таким образом, среднее значение ошибки на 1 *км* хода, зависящей от превышений ϑ_h, в данном случае составляет:

$$\vartheta_h = 0{,}13\, h \text{ мм},$$

где h — среднее значение превышения на 1 *км* хода в *м*.

При среднем значении сумм превышений на 1 *км* хода, составляющем $h=2$ *м*, среднее значение ошибки, зависящей от превышений может составить 17% от общего среднего значения ошибки на 1 *км* хода.

Следовательно, при нивелировании вдоль рек по длинным магистральным ходам необходимо учитывать кроме систематической ошибки, зависящей от длины ходов, и систематическую ошибку, зависящую от суммы превышений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. ГИТТЛ, М., 1955.
2. Чеботарев А. С. Оценка точности результатов нивелирования. Труды ЦНИИГА и К., вып. 85. Геодезиздат, М., 1951.
3. Чеботарев А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. Геодезиздат., М., 1958.

Работа поступила
3 мая 1966 г.