МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1966 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 5

В. И. РУДСКИЙ

СОВМЕСТНОЕ УРАВНИВАНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ УГЛОВ И ЗЕНИТНЫХ РАССТОЯНИЙ

1. Постановка задачи

Формулы передачи астрономических координат и азимута, выраженные в функциях горизонтальных углов и зенитных расстояний [2, 3], могут служить как своему прямому назначению, так и задаче уравнивания измеренных элементов.

Поскольку уравниванию подлежат горизонтальные углы и зенитные расстояния, следует учитывать, что триангуляционная сеть представляет собой некоторый пространственный многогранник вместе с отвесными линиями в каждом пункте.

Если в сети триангуляции через определенное количество треугольников расположено, по крайней мере, два пункта с известными астрономическими координатами и азимутами каких-либо направлений сети, то, передавая эти астрономические элементы от одного такого пункта к другому, приходим к задаче уравнивания всех измеренных элементов триангуляции, входящих в формулы передачи и находящихся между астрономическими пунктами.

Возможность постановки такой задачи была отмечена ранее [2]. Теперь попытаемся показать путь ее решения.

2. Типы условных уравнений и их количество

Пусть в некоторой сети триангуляции, состоящей из простой цепи n треугольников, на каждом пункте измерены горизонтальные углы и зенитные расстояния. Кроме того, на двух крайних пунктах известны астрономические координаты и азимуты направлений.

Заменив визирные лучи прямыми, соединяющими пункты триангуляции и указав направления отвесных линий, получим сеть в виде, изображенном на рис. 1. Допустим, что никаких линейных измерений в данной сети не производилось. Тогда элементами сети будут лишь одни направления линий в пространстве.

Прежде всего, при передаче астрономических координат и азимута с пункта *1* на пункт k возникают три условных уравнения астрономических координат и азимута.

Для того чтобы определить положения всех элементов отдельно взятого треугольника, достаточно восьми измерений (два угла и шесть зенитных расстояний). Измерение третьего угла является избыточным и создает условие в этой фигуре.

Углы A_i, B_i и C_i — плоские, лежащие в плоскостях соответствующих треугольников. Поэтому для каждого треугольника можно записать условное уравнение фигуры:

$$A_i + B_i + C_i = 180°. \qquad (1)$$

Число этих уравнений будет равно числу треугольников n.

Если к одному треугольнику примкнуть второй, то, как видно из

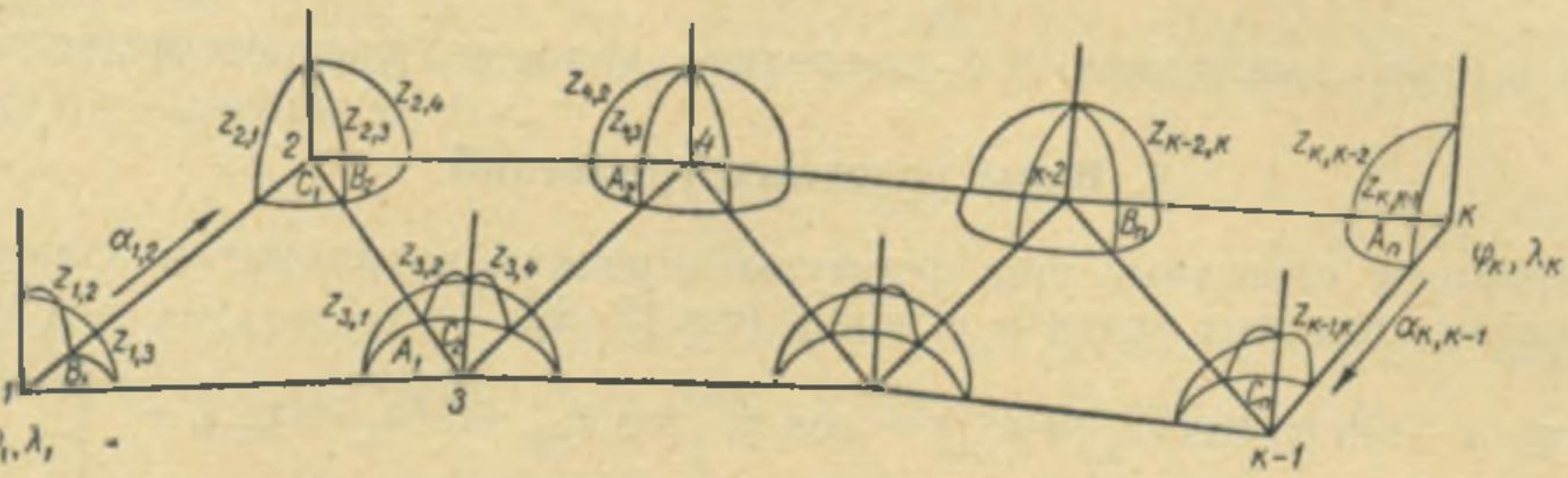

Рис. 1.

рис. 1, для определения положений в пространстве элементов примкнувшего треугольника уже достаточно пяти измерений (два горизонтальных угла и три зенитных расстояния).

Таким образом, для двух смежных треугольников достаточно тринадцати измерений, вместо имеющихся шестнадцати. Три измерения избыточны. Иначе говоря, для двух смежных треугольников, кроме двух условий фигур, должно быть еще одно какое-то геометрическое условие. Отыщим его из дополнительных построений.

Представим сеть из двух треугольников (рис. 2). На рисунке *22'3* — вертикальная плоскость с пункта *2* на пункт *3*; *33'2* — вертикальная плоскость с пункта *3* на пункт *2*; γ — угол между этими плоскостями или же угол между взаимными вертикальными сечениями в пунктах *2* и *3* (см. [3]).

Угол γ может быть вычислен как по измерениям в одном треугольнике, так и по измерениям в другом треугольнике. Поэтому для смежных треугольников дополнительным условием будет

$$\gamma_{2,3} = \gamma_{3,2}. \qquad (2)$$

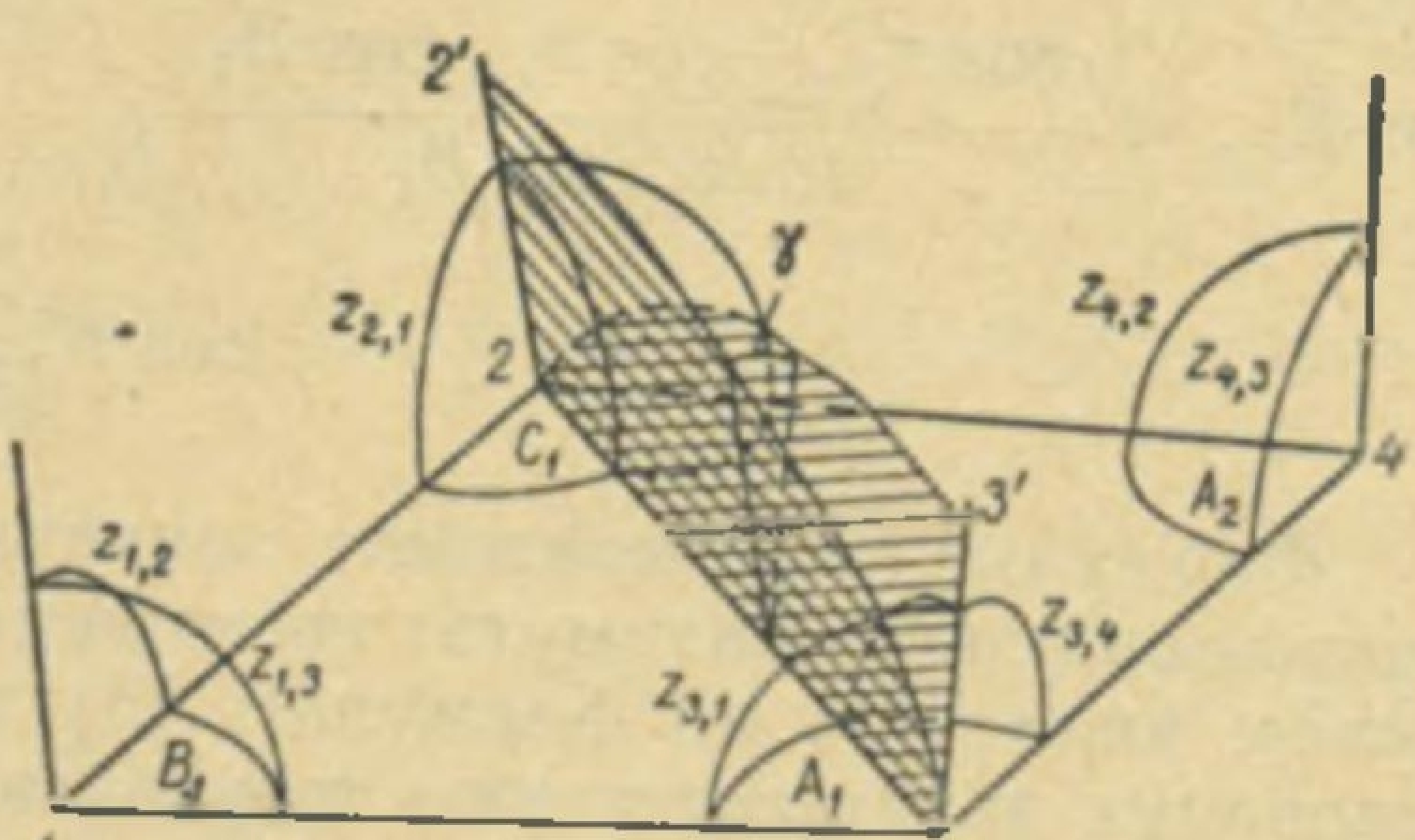

Рис. 2.

Индексы при γ обозначают направление, для которого оно вычисляется, когда используемый для этого треугольник лежит справа от указанного направления.

При вычислении углов γ следует соблюдать сформулированное ранее правило (см. [3]).

Для выбранной нами цепи треугольников таких условных уравнений будет столько, сколько в ней общих сторон, то есть $n-1$.

Таким образом, в рассматриваемой сети из n треугольников будет: а) условных уравнений координат и азимута — 3; б) условных уравнений фигур — n; в) условных уравнений углов γ — $n-1$.

Выполнив эти три типа условий, мы сможем вполне однозначно определить положения всех элементов пространственной триангуляции.

Число N всех условных уравнений будет:

$$N=2(n+1).$$

Если в начале и в конце звена триангуляции произвести свето- или радиодальномерные измерения длин сторон, то к указанному числу условных уравнений добавится базисное условие. Тогда общее число уравнений будет:

$$N=2n+3.$$

В наших выкладках это последнее условие будет отсутствовать.

3. Виды условных уравнений

Запишем известные уже формулы передачи координат и азимута, вычисления плоских углов и углов γ (см. [2, 3]).

$$\left.\begin{aligned}
\sin\varphi_2 &= -\sin\varphi_1\cos(z_{1,2}+z_{2,1})-\cos\varphi_1\Big[\cos\alpha_{1,2}\sin(z_{1,2}+z_{2,1})+\\
&\qquad+\sin\alpha_{1,2}\sin z_{2,1}\frac{\gamma''}{\rho''}\Big],\\
\sin\alpha_{2,1} &= \frac{-\cos\varphi_1\left(\sin\alpha_{1,2}-\cos\alpha_{1,2}\cos z_{1,2}\dfrac{\gamma''}{\rho''}\right)-\sin\varphi_1\sin z_{1,2}\dfrac{\gamma''}{\rho''}}{\cos\varphi_2},\\
\sin\lambda_{1,2} &= \frac{-\sin\alpha_{1,2}\sin(z_{1,2}+z_{2,1})+\cos\alpha_{1,2}\sin z_{2,1}\dfrac{\gamma''}{\rho''}}{\cos\varphi_2}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\cos B_1=\cos z_{1,2}\cos z_{1,3}+\sin z_{1,2}\sin z_{1,3}\cos b_1. \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{1,2} &= K_{1,3}-K_{2,3},\\
\cos K_{1,3} &= \frac{\cos z_{1,3}-\cos z_{1,2}\cos B_1}{\sin z_{1,2}\sin B_1},\\
\cos K_{2,3} &= \frac{\cos z_{2,3}-\cos z_{2,1}\cos C_1}{\sin z_{2,1}\sin C_1}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Формулы (3) выражают зависимость при передаче астрономических координат и азимута; вычисления плоских углов ведутся по формулам вида (4); по формулам (5) вычисляется требуемый угол γ на основании данных каждого треугольника.

В соотношениях (3) и (5) индекс 1,2 обозначает направление, в котором производится передача координат и азимута.

Из формул (3) можно видеть, что передача координат и азимута с пункта *1* на пункт *2* производится в следующем порядке.

По известной широте пункта *1* и азимуту направления *1—2* вначале определяется широта пункта *2* и лишь затем (в любом порядке) — разность долгот $\lambda_{1,2}$ и обратный азимут $\alpha_{2,1}$. Зная теперь обратный азимут, пользуясь измеренным углом в пункте *2*, находим, например, азимут направления *2—3* и с известной широтой φ_2 определяем φ_3, а затем $\alpha_{3,2}$ и $\lambda_{2,3}$ и т. д. Разности долгот могут быть вычислены и после передачи широты на все пункты триангуляции.

При такой взаимной связи широты и азимута при последовательной их передаче от начального пункта до пункта с номером k в этом последнем вычисленные широта и азимут будут функциями измеренных величин всех n треугольников. Тогда условие уравнения широты и азимута запишутся в таком виде:

$$\Delta\varphi_k + w_\varphi = 0 \tag{6}$$

и

$$\Delta\alpha_{k,\,k-1} + w_\alpha = 0, \tag{7}$$

где свободные члены w_φ и w_α представляют, соответственно, разность вычисленной широты из передачи и данной и разность вычисленного азимута и данного, то есть

$$w_\varphi = \varphi_{\text{выч}} - \varphi_{\text{дан}},$$

$$w_\alpha = \alpha_{\text{выч}} - \alpha_{\text{дан}}.$$

В формулах (3) $\lambda_{1,2}$ представляет собой разность долгот между пунктами *2* и *1*. Поэтому долготное условное уравнение будет:

$$\Delta\lambda_{1,2} + \Delta\lambda_{2,3} + \Delta\lambda_{3,4} + \ldots + \Delta\lambda_{k-1,\,k} + w_\lambda = 0, \tag{8}$$

где свободный член w_λ представляет разность вычисленной разности долгот между конечными пунктами и данной, то есть

$$w_\lambda = \lambda_{1,\,k\,\text{выч}} - \lambda_{1,\,k\,\text{дан}}.$$

Для каждого плоского треугольника условное уравнение фигуры будет:

$$\Delta A_i + \Delta B_i + \Delta C_i + w_i = 0, \tag{9}$$

где

$$w_i = A_i + B_i + C_i - 180^\circ.$$

И, наконец, для углов γ, согласно (2), условное уравнение ошибок имеет вид:

$$\Delta\gamma_{2,3} - \Delta\gamma_{3,2} + w_\gamma = 0, \tag{10}$$

где

$$w_\gamma = \gamma_{2,3} - \gamma_{3,2}.$$

Итак, в звене триангуляции, изображенном на рис. 1, будут следующие условные уравнения ошибок:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\varphi_k + w_\varphi = 0, \\ &\Delta\alpha_{k,\,k-1} + w_\alpha = 0, \\ &\Delta\lambda_{1,2} + \Delta\lambda_{2,3} + \Delta\lambda_{3,4} + \ldots + \Delta\lambda_{k-1,\,k} + w_\lambda = 0. \end{aligned}\right| \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta A_1 + \Delta B_1 + \Delta C_1 + w_1 = 0, \\ &\Delta A_2 + \Delta B_2 + \Delta C_2 + w_2 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Delta A_n + \Delta B_n + \Delta C_n + w_n = 0. \end{aligned}\right| \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\gamma_{2,3} - \Delta\gamma_{3,2} + w_{1\gamma} = 0, \\ &\Delta\gamma_{3,4} - \Delta\gamma_{4,3} + w_{2\gamma} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Delta\gamma_{k-2,\,k-1} - \Delta\gamma_{k-1,\,k-2} + w_{(n-1)\gamma} = 0. \end{aligned}\right| \tag{13}$$

В формулах (6)—(13) Δ — ошибки соответствующих величин.

Пусть теперь имеем звено триангуляции, состоящее из четырех треугольников (рис. 3). В пунктах *1* и *6* известны астрономические координаты и азимуты направлений *1—2* и *6—5*. Передача координат и азимута производится с пункта *1* по ходовой линии, которая показана на рисунке пунктиром.

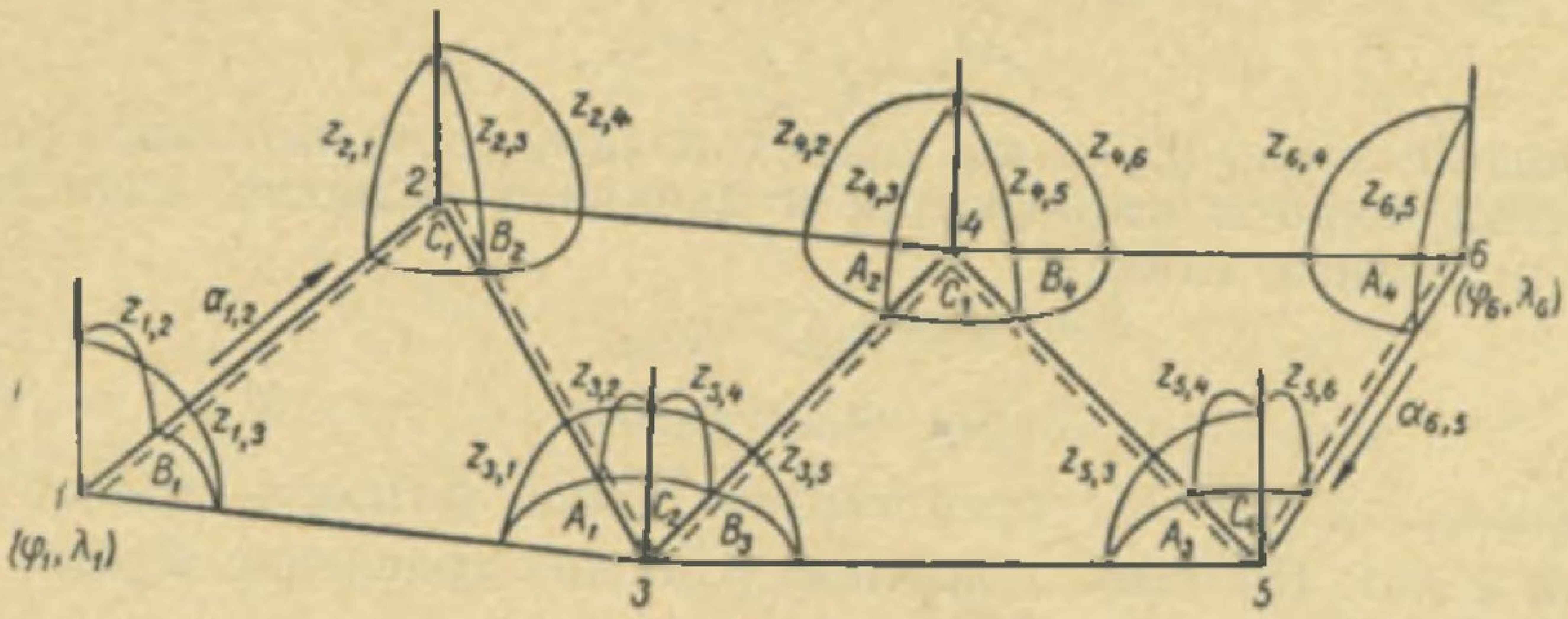

Рис. 3.

Представим формулы (3) в общем виде. Применительно к данному звену они будут:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_2 &= \Phi_1(\varphi_1,\ \alpha_{1,2},\ a_1,\ z_1),\\
\varphi_3 &= \Phi_2(\varphi_2,\ \alpha_{2,3},\ a_2,\ z_2),\\
\varphi_4 &= \Phi_3(\varphi_3,\ \alpha_{3,4},\ a_3,\ z_3),\\
\varphi_5 &= \Phi_4(\varphi_4,\ \alpha_{4,5},\ a_4,\ z_4),\\
\varphi_6 &= \Phi_5(\varphi_5,\ \alpha_{5,6},\ a_5,\ z_5).
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{2,1} &= \psi_1(\alpha_{1,2},\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ a_1,\ z_1),\\
\alpha_{3,2} &= \psi_2(\alpha_{2,3},\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ a_2,\ z_2),\\
\alpha_{4,3} &= \psi_3(\alpha_{3,4},\ \varphi_3,\ \varphi_4,\ a_3,\ z_3),\\
\alpha_{5,4} &= \psi_4(\alpha_{4,5},\ \varphi_4,\ \varphi_5,\ a_4,\ z_4),\\
\alpha_{6,5} &= \psi_5(\alpha_{5,6},\ \varphi_5,\ \varphi_6,\ a_5,\ z_5).
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \Lambda_1(\alpha_{1,2},\ \varphi_2,\ a_1,\ z_1),\\
\lambda_{2,3} &= \Lambda_2(\alpha_{2,3},\ \varphi_3,\ a_2,\ z_2),\\
\lambda_{3,4} &= \Lambda_3(\alpha_{3,4},\ \varphi_4,\ a_3,\ z_3),\\
\lambda_{4,5} &= \Lambda_4(\alpha_{4,5},\ \varphi_5,\ a_4,\ z_4),\\
\lambda_{5,6} &= \Lambda_5(\alpha_{5,6},\ \varphi_6,\ a_5,\ z_5).
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

В этих формулах буквами a_i и z_i обозначены соответственно все горизонтальные углы и зенитные расстояния, входящие в функции Φ, ψ_i, Λ_i.

Для составления широтного условного уравнения необходимо, согласно (11) и (14), найти полный дифференциал функции Φ_5. Выполнив это и заменив дифференциалы ошибками, получим:

$$\Delta\varphi_6 = \left(\frac{\partial\Phi_5}{\partial\varphi_5}\right)\Delta\varphi_5 + \left(\frac{\partial\Phi_5}{\partial\alpha_{5,6}}\right)\Delta\alpha_{5,6} + \left(\frac{\partial\Phi_5}{\partial a_5}\right)\Delta a_5 + \left(\frac{\partial\Phi_5}{\partial z_5}\right)\Delta z_5. \tag{17}$$

В свою очередь

$$\Delta\varphi_5 = \left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial\varphi_4}\right)\Delta\varphi_4 + \left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial\alpha_{4,5}}\right)\Delta\alpha_{4,5} + \left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial a_4}\right)\Delta a_4 + \left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial z_4}\right)\Delta z_4, \tag{18}$$

а

$$\Delta\alpha_{5,6} = \Delta\alpha_{5,4} + \Delta c_4, \tag{19}$$

где

$$\Delta\alpha_{5,4} = \left(\frac{\partial\psi_4}{\partial\alpha_{4,5}}\right)\Delta\alpha_{4,5} + \left(\frac{\partial\psi_4}{\partial\varphi_4}\right)\Delta\varphi_4 + \left(\frac{\partial\psi_4}{\partial\varphi_5}\right)\Delta\varphi_5 + \left(\frac{\partial\psi_4}{\partial a_4}\right)\Delta a_4 + \left(\frac{\partial\psi_4}{\partial z_4}\right)\Delta z_4. \tag{20}$$

Здесь

$$\Delta\varphi_4 = \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_3}\right)\Delta\varphi_3 + \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial\alpha_{3,4}}\right)\Delta\alpha_{3,4} + \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial a_3}\right)\Delta a_3 + \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial z_3}\right)\Delta z_3 \tag{21}$$

и

$$\Delta\alpha_{4,5} = \Delta\alpha_{4,3} - \Delta c_3, \tag{22}$$

где

$$\Delta a_{4,3} = \left(\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha_{3,4}}\right)\Delta\alpha_{3,4} + \left(\frac{\partial\psi_3}{\partial\varphi_3}\right)\Delta\varphi_3 + \left(\frac{\partial\psi_3}{\partial\varphi_4}\right)\Delta\varphi_4 + \left(\frac{\partial\psi_3}{\partial a_3}\right)\Delta a_3 + \left(\frac{\partial\psi_3}{\partial z_3}\right)\Delta z_3. \tag{23}$$

И далее

$$\Delta\varphi_3 = \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}\right)\Delta\varphi_2 + \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_{2,3}}\right)\Delta\alpha_{2,3} + \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial a_2}\right)\Delta a_2 + \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_2}\right)\Delta z_2, \tag{24}$$

$$\Delta\alpha_{3,4} = \Delta\alpha_{3,2} + \Delta c_2, \tag{25}$$

$$\Delta\alpha_{3,2} = \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_{2,3}}\right)\Delta\alpha_{2,3} + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi_2}\right)\Delta\varphi_2 + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi_3}\right)\Delta\varphi_3 + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial a_2}\right)\Delta a_2 + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial z_2}\right)\Delta z_2, \tag{26}$$

$$\Delta\varphi_2 = \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_1}\right)\Delta\varphi_1 + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha_{1,2}}\right)\Delta\alpha_{1,2} + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial a_1}\right)\Delta a_1 + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_1}\right)\Delta z_1, \tag{27}$$

$$\Delta\alpha_{2,3} = \Delta\alpha_{2,1} - \Delta c_1, \tag{28}$$

$$\Delta\alpha_{2,1} = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_{1,2}}\right)\Delta\alpha_{1,2} + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi_1}\right)\Delta\varphi_1 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi_2}\right)\Delta\varphi_2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial a_1}\right)\Delta a_1 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z_1}\right)\Delta z_1. \tag{29}$$

В выражениях (19), (22), (25) и (28) Δc_i — ошибки измеренных связующих углов c_i.

Из записанной группы формул находим ошибку $\Delta\varphi_6$ в широте последнего пункта, обусловленную ошибками измерений в данном звене триангуляции.

Эти же формулы позволяют определить ошибку азимута направления *6—5* в конечном пункте, которую, согласно (15), запишем в виде

$$\Delta\alpha_{6,5} = \left(\frac{\partial\psi_5}{\partial\alpha_{5,6}}\right)\Delta\alpha_{5,6} + \left(\frac{\partial\psi_5}{\partial\varphi_{5,6}}\right)\Delta\varphi_5 + \left(\frac{\partial\psi_5}{\partial\varphi_6}\right)\Delta\varphi_6 + \left(\frac{\partial\psi_5}{\partial a_5}\right)\Delta a_5 + \left(\frac{\partial\psi_5}{\partial z_5}\right)\Delta z_5. \tag{30}$$

Практически (17) вычисляется так.

Вначале из (27) находим $\Delta\varphi_2$; затем из (29) — $\Delta\alpha_{2,1}$, а с ним по (28) — $\Delta\alpha_{2,3}$; после этого, имея $\Delta\varphi_2$ и $\Delta\alpha_{2,3}$, находим $\Delta\varphi_3$ и уже с этими значениями из (26) — $\Delta\alpha_{3,2}$; согласно (25), переходим к $\Delta\alpha_{3,4}$ и по (21) вычисляем $\Delta\varphi_4$, а затем и $\Delta\alpha_{4,3}$; находим $\Delta\alpha_{4,5}$, а с ним и $\Delta\varphi_4$—$\Delta\varphi_5$; имея $\Delta\alpha_{4,5}$, $\Delta\varphi_4$ и $\Delta\varphi_5$, согласно (20), находим $\Delta\alpha_{5,4}$; вычисляем $\Delta\alpha_{5,6}$ и определяем, наконец, $\Delta\varphi_6$.

Вычислить ошибку в азимуте конечной стороны $\Delta\alpha_{6,5}$ не составляет труда, так как все входящие в (30) ошибки получили свое выражение из предыдущего.

Имеющиеся формулы позволяют также найти ошибки в разностях долгот.

Из (16) имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\lambda_{1,2} &= \left(\frac{\partial\Lambda_1}{\partial\alpha_{1,2}}\right)\Delta\alpha_{1,2} + \left(\frac{\partial\Lambda_1}{\partial\varphi_2}\right)\Delta\varphi_2 + \left(\frac{\partial\Lambda_1}{\partial a_1}\right)\Delta a_1 + \left(\frac{\partial\Lambda_1}{\partial z_1}\right)\Delta z_1,\\
\Delta\lambda_{2,3} &= \left(\frac{\partial\Lambda_2}{\partial\alpha_{2,3}}\right)\Delta\alpha_{2,3} + \left(\frac{\partial\Lambda_2}{\partial\varphi_3}\right)\Delta\varphi_3 + \left(\frac{\partial\Lambda_2}{\partial a_2}\right)\Delta a_2 + \left(\frac{\partial\Lambda_2}{\partial z_2}\right)\Delta z_2,\\
\Delta\lambda_{3,4} &= \left(\frac{\partial\Lambda_3}{\partial\alpha_{3,4}}\right)\Delta\alpha_{3,4} + \left(\frac{\partial\Lambda_3}{\partial\varphi_4}\right)\Delta\varphi_4 + \left(\frac{\partial\Lambda_3}{\partial a_3}\right)\Delta a_3 + \left(\frac{\partial\Lambda_3}{\partial z_3}\right)\Delta z_3,\\
\Delta\lambda_{4,5} &= \left(\frac{\partial\Lambda_4}{\partial\alpha_{4,5}}\right)\Delta\alpha_{4,5} + \left(\frac{\partial\Lambda_4}{\partial\varphi_5}\right)\Delta\varphi_5 + \left(\frac{\partial\Lambda_4}{\partial a_4}\right)\Delta a_4 + \left(\frac{\partial\Lambda_4}{\partial z_4}\right)\Delta z_4,\\
\Delta\lambda_{5,6} &= \left(\frac{\partial\Lambda_5}{\partial\alpha_{5,6}}\right)\Delta\alpha_{5,6} + \left(\frac{\partial\Lambda_5}{\partial\varphi_6}\right)\Delta\varphi_6 + \left(\frac{\partial\Lambda_5}{\partial a_5}\right)\Delta a_5 + \left(\frac{\partial\Lambda_5}{\partial z_5}\right)\Delta z_5.
\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

При вычислении ошибок $\Delta\varphi_2$, $\Delta\alpha_{2,1}$, $\Delta\alpha_{6,5}$ и $\Delta\lambda_{5,6}$ следует учитывать, что широты φ_1, φ_6 и азимут $\alpha_{1,2}$ постоянны.

Для принятого нами звена триангуляции формулы (11) будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\varphi_6 + w_\varphi = 0,\\
&\Delta\alpha_{6,5} + w_\alpha = 0,\\
&\Delta\lambda_{1,2} + \Delta\lambda_{2,3} + \Delta\lambda_{3,4} + \Delta\lambda_{4,5} + \Delta\lambda_{5,6} + w_\lambda = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

где $\Delta\varphi_6$, $\Delta\alpha_{6,5}$ и $\Delta\lambda$ вычисляются по формулам (17)—(31).

Выражения (12) в нашем примере таковы:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta A_1 + \Delta B_1 + \Delta C_1 + w_1 &= 0,\\
\Delta A_2 + \Delta B_2 + \Delta C_2 + w_2 &= 0,\\
\Delta A_3 + \Delta B_3 + \Delta C_3 + w_3 &= 0,\\
\Delta A_4 + \Delta B_4 + \Delta C_4 + w_4 &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

В них ΔA_i, ΔB_i, ΔC_i — ошибки в плоских углах, обусловленные ошибками измеренных величин. Плоские углы вычисляются по формулам вида (4).

Наконец, условные уравнения углов γ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\gamma_{2,3} - \Delta\gamma_{3,2} + w_{1\gamma} &= 0,\\
\Delta\gamma_{3,4} - \Delta\gamma_{4,3} + w_{2\gamma} &= 0,\\
\Delta\gamma_{4,5} - \Delta\gamma_{5,4} + w_{3\gamma} &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Для вычисления дифференциалов выражений (32), (33) и (34), найдем частные производные формул (3), (4), (5) по всем переменным, входящим в них. Но прежде еще раз подчеркнем следующее (см. [3]).

В обозначениях индексом 1 будем отмечать исходный пункт, индексом 2 — определяемый. Однако, при вычислении угла γ эти индексы будем менять местами так, чтобы 1—2 было тем направлением, относительно которого используемый для вычисления угла γ треугольник всегда лежал справа. Элементы треугольника, лежащего справа от ходовой линии, будем помечать одним штрихом вверху, элементы левого треугольника — двумя. Также для удобства и единообразия все измеренные и плоские углы будем обозначать соответственно буквами a и A с необходимыми индексами.

Зная эти правила, легко найти соответствующий элемент в каждом конкретном случае. Рис. 4 иллюстрирует сказанное выше.

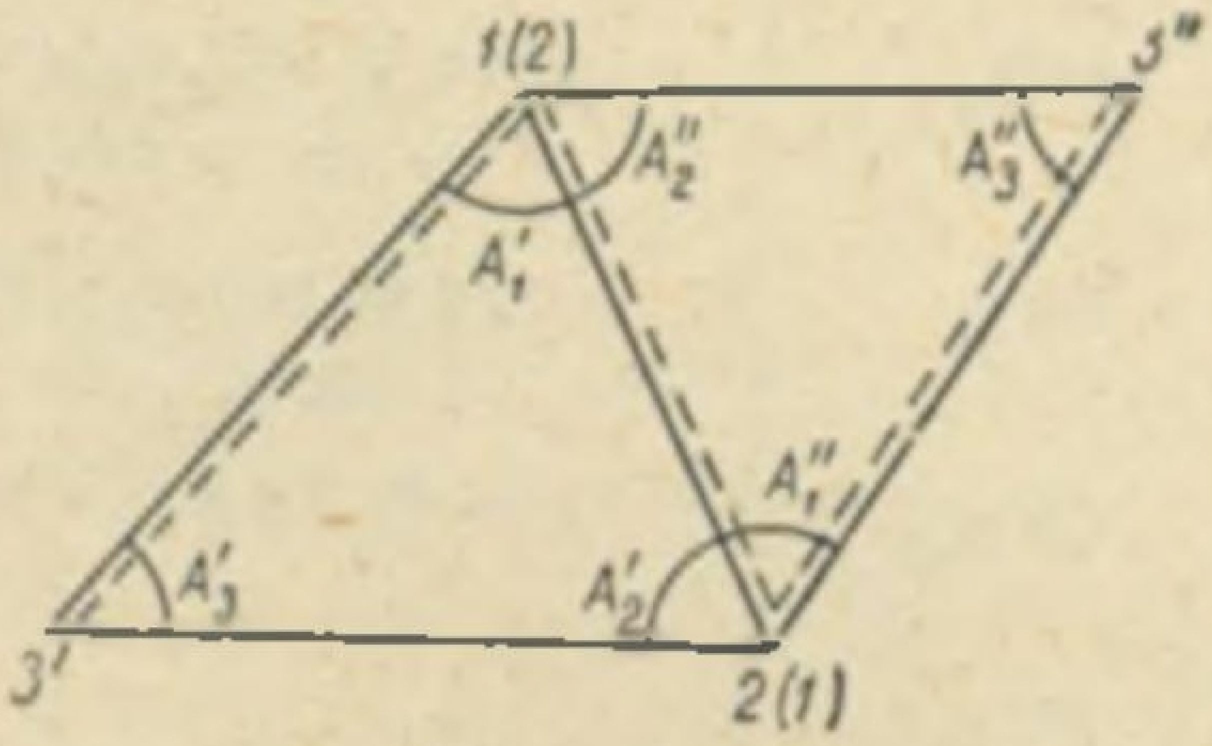

Рис. 4.

Не выполняя подробных выкладок, выпишем частные производные формул (3) и (5) в отдельные таблицы (см. табл. 1, 2, 3, 4). При этом учтем то обстоятельство, что ири передаче по смежной стороне двух треугольников γ, входящее в вычисления координат и азимута, взято как среднее двух его значений из правого и левого треугольников. Вычисления углов K производятся по формулам, выведенным ранее (см. [3]).

Таблица 1

Частные производные функции широты (Ф)

	Передача по крайней стороне (треугольник справа)	Передача по смежной стороне
$(\Phi')_{\varphi}$	$\cos\lambda_{1,2}$	То же
$(\Phi')_{a}$	$-\cos\varphi_1\sin\lambda_{1,2}$	То же
$(\Phi')_{a_1'}$	$I_\Phi\sin z_{1,3}\cos K_{1,2}\csc A_1$	$0{,}5\,I_\Phi\sin z_{1,3}'\cos K_{1,2}'\csc A_1'$
$(\Phi')_{a_1''}$		$0{,}5\,I_\Phi\sin z_{1,3}''\cos K_{1,2}''\csc A_1''$
$(\Phi')_{a_2'}$	$-I_\Phi\sin z_{2,3}\cos K_{2,1}\csc A_2$	$-0{,}5\,I_\Phi\sin z_{2,3}'\cos K_{2,1}'\csc A_2'$
$(\Phi')_{a_2''}$		$-0{,}5\,I_\Phi\sin z_{2,3}''\cos K_{2,1}''\csc A_2''$
$(\Phi')_{z_{1,2}}$	$\sin\varphi_1\sec\varphi_2\sin(z_{1,2}+z_{2,1})-$ $-\cos\varphi_1\sec\varphi_2[\cos\alpha_{1,2}\cos(z_{1,2}+z_{2,1})-$ $-\sin\alpha_{1,2}\sin z_{2,1}\operatorname{ctg}A_1\sin K_{1,3}]$	$\sin\varphi_1\sec\varphi_2\sin(z_{1,2}+z_{2,1})-$ $-\cos\varphi_1\sec\varphi_2[\cos\alpha_{1,2}\cos(z_{1,2}+z_{2,1})+$ $+0{,}5(\operatorname{ctg}A_2''\sin K_{2,3}''-$ $-\operatorname{ctg}A_1'\sin K_{1,3}')\sin\alpha_{1,2}\sin z_{2,1}]$
$(\Phi')_{z_{2,1}}$	$\sin\varphi_1\sec\varphi_2\sin(z_{1,2}+z_{2,1})-$ $-\cos\varphi_1\sec\varphi_2[\cos\alpha_{1,2}\cos(z_{1,2}+z_{2,1})+$ $+\sin\alpha_{1,2}(\sin z_{2,1}\operatorname{ctg}A_2\sin K_{2,3}+$ $+\cos z_{2,1}\sin\gamma_{1,2}]$	$\sin\varphi_1\sec\varphi_2\sin(z_{1,2}+z_{2,1})-$ $-\cos\varphi_1\sec\varphi_2\{\cos\alpha_{1,2}\cos(z_{1,2}+z_{2,1})+$ $+\sin\alpha_{1,2}[0{,}5(\operatorname{ctg}A_2'\sin K_{2,3}'-$ $-\operatorname{ctg}A_1''\sin K_{1,3}'')\sin z_{2,1}+$ $+\cos z_{2,1}\sin\gamma_{1,2}]\}$
$(\Phi')_{z_{1,3}'}$	$-I_\Phi\sin K_{1,2}\csc A_1$	$-0{,}5\,I_\Phi\sin K_{1,2}'\csc A_1'$
$(\Phi')_{z_{1,3}''}$		$-0{,}5\,I_\Phi\sin K_{1,2}''\csc A_1''$
$(\Phi')_{z_{2,3}'}$	$I_\Phi\sin K_{2,1}\csc A_2$	$0{,}5\,I_\Phi\sin K_{2,1}'\csc A_2'$
$(\Phi')_{z_{2,3}''}$		$0{,}5\,I_\Phi\sin K_{2,1}''\csc A_2''$

$$I_\Phi=\cos\varphi_1\sec\varphi_2\sin\alpha_{1,2}\sin z_{2,1}$$

Таблица 2

Частные производные функции азимута (ψ)

	Передача по крайней стороне (треугольник справа)	Передача по смежной стороне
$(\psi')_\varphi$	$-\sec\varphi_1\sec\alpha_{2,1}(\sin\varphi_1\sin\alpha_{2,1}+\sec\varphi_2\sin z_{1,2}\sin\gamma_{1,2})$	То же
$(\psi')_\alpha$	$-\sec\varphi_2\sec\alpha_{2,1}[\cos\varphi_1(\cos\alpha_{1,2}+\sin\alpha_{1,2}\cos z_{1,2}\sin\gamma_{1,2})]$	То же
$(\psi')_{a'_1}$	$-I_\psi\sin z_{1,3}\cos K_{1,2}\csc A_1$	$-0{,}5\, I_\psi\sin z'_{1,3}\cos K'_{1,2}\csc A'_1$
$(\psi')_{a''_1}$		$-0{,}5\, I_\psi\sin z''_{1,3}\cos K''_{1,2}\csc A''_1$
$(\psi')_{a'_2}$	$I_\psi\sin z_{2,3}\cos K_{2,1}\csc A_2$	$0{,}5\, I_\psi\sin z'_{2,3}\cos K'_{2,1}\csc A'_2$
$(\psi')_{a''_2}$		$0{,}5\, I_\psi\sin z''_{2,3}\cos K''_{2,1}\csc A''_2$
$(\psi')_{z_{1,2}}$	$-I_\psi\operatorname{ctg}A_1\sin K_{1,3}-\sec\varphi_1\sec\alpha_{2,1}\sin\gamma_{1,2}\times(\cos\varphi_1\cos\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}+\sin\varphi_1\cos z_{1,2})$	$0{,}5\, I_\psi(\operatorname{ctg}A''_2\sin K''_{2,3}-\operatorname{ctg}A'_1\sin K'_{1,3})-\sec\varphi_2\sec\alpha_{2,1}\sin\gamma_{1,2}\times(\cos\varphi_1\cos\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}+\sin\varphi_1\cos z_{1,2})]$
$(\psi')_{z_{2,1}}$	$I_\psi\operatorname{ctg}A_2\sin K_{2,3}$	$0{,}5\, I_\psi(\operatorname{ctg}A'_2\sin K'_{2,3}-\operatorname{ctg}A''_1\sin K''_{1,3})$
$(\psi')_{z'_{1,3}}$	$I_\psi\sin K_{1,2}\csc A_1$	$0{,}5\, I_\psi\sin K'_{1,2}\csc A'_1$
$(\psi')_{z''_{1,3}}$		$0{,}5\, I_\psi\sin K''_{1,2}\csc A''_1$
$(\psi')_{z'_{2,3}}$	$-I_\psi\sin K_{2,1}\csc A_2$	$-0{,}5\, I_\psi\sin K'_{2,1}\csc A'_2$
$(\psi')_{z''_{2,3}}$		$-0{,}5\, I_\psi\sin K''_{2,1}\csc A''_2$

I_ψ — $\sec\varphi_2\sec\alpha_{2,1}(\cos\varphi_1\cos\alpha_{1,2}\cos z_{1,2}-\sin\varphi_1\sin z_{1,2})$

Таблица 3

Частные производные функции разности долгот (Λ)

	Передача по крайней стороне (треугольник справа)	Передача по смежной стороне
$(\Lambda')_\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi_2\sin\lambda_{1,2}$	То же
$(\Lambda')_\alpha$	$\sec\varphi_1\sec\varphi_2\sec\lambda_{1,2}[\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos(z_{1,2}+z_{2,1})]$	То же
$(\Lambda')_{a'_1}$	$-I_\Lambda\sin z_{1,3}\cos K_{1,2}\csc A_1$	$-0{,}5\, I_\Lambda\sin z'_{1,3}\cos K'_{1,2}\csc A'_1$
$(\Lambda')_{a''_1}$		$-0{,}5\, I_\Lambda\sin z''_{1,3}\cos K''_{1,2}\csc A''_1$
$(\Lambda')_{a'_2}$	$I_\Lambda\sin z_{2,3}\cos K_{2,1}\csc A_2$	$0{,}5\, I_\Lambda\sin z'_{2,3}\cos K'_{2,1}\csc A'_2$

	Передача по крайней стороне (треугольник справа)	Передача по смежной стороне
$(\Lambda')_{a''_2}$		$0{,}5\, I_\Lambda \sin z''_{2,3} \cos K''_{2,1} \csc A''_2$
$(\Lambda')_{z_{1,2}}$	$-I_\Lambda \operatorname{ctg} A_1 \sin K_{1,3} - \sec\varphi_2 \sec\lambda_{1,2} \sin\alpha_{1,2} \cos(z_{1,2}+z_{2,1})$	$0{,}5\, I_\Lambda (\operatorname{ctg} A''_2 \sin K''_{2,3} - \operatorname{ctg} A'_1 \sin K'_{1,3}) - \sec\varphi_2 \sec\lambda_{1,2} \sin\alpha_{1,2} \cos(z_{1,2}+z_{2,1})$
$(\Lambda')_{z_{2,1}}$	$I_\Lambda \operatorname{ctg} A_2 \sin K_{2,3} + \sec\varphi_2 \sec\lambda_{1,2} \times [\cos\alpha_{1,2} \cos z_{2,1} \sin\gamma_{1,2} - \sin\alpha_{1,2} \cos(z_{1,2}+z_{2,1})]$	$0{,}5\, I_\Lambda (\operatorname{ctg} A'_2 \sin K'_{2,3} - \operatorname{ctg} A''_1 \sin K''_{1,3}) + \sec\varphi_2 \sec\lambda_{1,2} [\cos\alpha_{1,2} \cos z_{2,1} \sin\gamma_{1,2} - \sin\alpha_{1,2} \cos(z_{1,2}+z_{2,1})]$
$(\Lambda')_{z'_{1,3}}$	$I_\Lambda \sin K_{1,2} \csc A$	$0{,}5\, I_\Lambda \sin K'_{1,2} \csc A'_1$
$(\Lambda')_{z''_{1,3}}$		$0{,}5\, I_\Lambda \sin K''_{1,2} \csc A''_1$
$(\Lambda')_{z'_{2,3}}$	$-I_\Lambda \sin K_{2,1} \csc A_2$	$-0{,}5\, I_\Lambda \sin K'_{2,1} \csc A'_2$
$(\Lambda')_{z''_{2,3}}$		$-0{,}5\, I_\Lambda \sin K''_{2,1} \csc A''_2$

$$I_\Lambda = \sec\varphi_2 \sec\lambda_{1,2} \cos\alpha_{1,2} \sin z_{2,1}$$

Таблица 4

Частные производные функции углов γ

	Передача по крайней стороне (треугольник справа)	Передача по смежной стороне
$(\gamma')_{a'_1}$	$-\sin z_{1,3} \cos K_{1,2} \csc A_1$	$-0{,}5 \sin z'_{1,3} \cos K'_{1,2} \csc A'_1$
$(\gamma')_{a''_1}$		$-0{,}5 \sin z''_{1,3} \cos K''_{1,2} \csc A''_1$
$(\gamma')_{a'_2}$	$\sin z_{2,3} \cos K_{2,1} \csc A_2$	$0{,}5 \sin z'_{2,3} \cos K'_{2,1} \csc A'_2$
$(\gamma')_{a''_2}$		$0{,}5 \sin z''_{2,3} \cos K''_{2,1} \csc A''_2$
$(\gamma')_{z_{1,2}}$	$-\operatorname{ctg} A_1 \sin K_{1,3}$	$0{,}5 (\operatorname{ctg} A''_2 \sin K''_{2,3} - \operatorname{ctg} A'_1 \sin K'_{1,3})$
$(\gamma')_{z_{2,1}}$	$\operatorname{ctg} A_2 \sin K_{2,3}$	$0{,}5 (\operatorname{ctg} A'_2 \sin K'_{2,3} - \operatorname{ctg} A''_1 \sin K''_{1,3})$
$(\gamma')_{z'_{1,3}}$	$\sin K_{1,2} \csc A_1$	$0{,}5 \sin K'_{1,2} \csc A'_1$
$(\gamma')_{z''_{1,3}}$		$0{,}5 \sin K''_{1,2} \csc A''_1$
$(\gamma')_{z'_{2,3}}$	$-\sin K_{2,1} \csc A_2$	$-0{,}5 \sin K'_{2,1} \csc A'_2$
$(\gamma')_{z''_{2,3}}$		$-0{,}5 \sin K''_{2,1} \csc A''_2$

Вычислив, согласно приведенным таблицам, значения всех частных производных и воспользовавшись уравнениями (17)—(31), можем записать выражения (32) и (34) условных уравнений в развернутом виде.

Для определения ошибок плоских углов следует продифференцировать выражения вида (4).

Для угла B_1, например, будем иметь:

$$\Delta B_1 = \cos K_{1.3} \Delta z_{1.2} + \cos K_{1.2} \Delta z_{1.3} + \frac{\sin b_1}{\sin B_1} \Delta b_1. \tag{35}$$

Отсюда ошибка плоского угла равняется сумме произведений ошибок зенитных расстояний на косинусы прилежащих углов K и произведению ошибки горизонтального угла на отношение синуса измеренного угла к синусу плоского угла.

При зенитных расстояниях, близких к 90°, $\cos K_{1,2}$ и $\cos K_{1,3}$ близки к нулю и $b_1 \approx B_1$. Тогда

$$\Delta B_1 \approx \Delta b_1.$$

4. Влияние рефракции

До сих пор мы рассматривали каждое зенитное расстояние как угол, измеренный между отвесной линией и прямой, соединяющей пункт наблюдения и пункт наведения. В действительности же, под влиянием вертикальной рефракции луч между этими пунктами проходит по некоторой световой кривой. Поэтому угол между отвесной линией и прямой, соединяющей пункты, будет состоять из двух частей: измеренного зенитного расстояния и некоторого небольшого угла рефракции (см. рис. 5).

$$z_{1.2} = z'_{1,2} + \rho_1. \tag{36}$$

Будем считать, что на каждом пункте по всем направлениям коэффициент рефракции постоянен.

Известно, что рефракционный угол в каком-либо пункте связан с коэффициентом рефракции в этом пункте следующим соотношением:

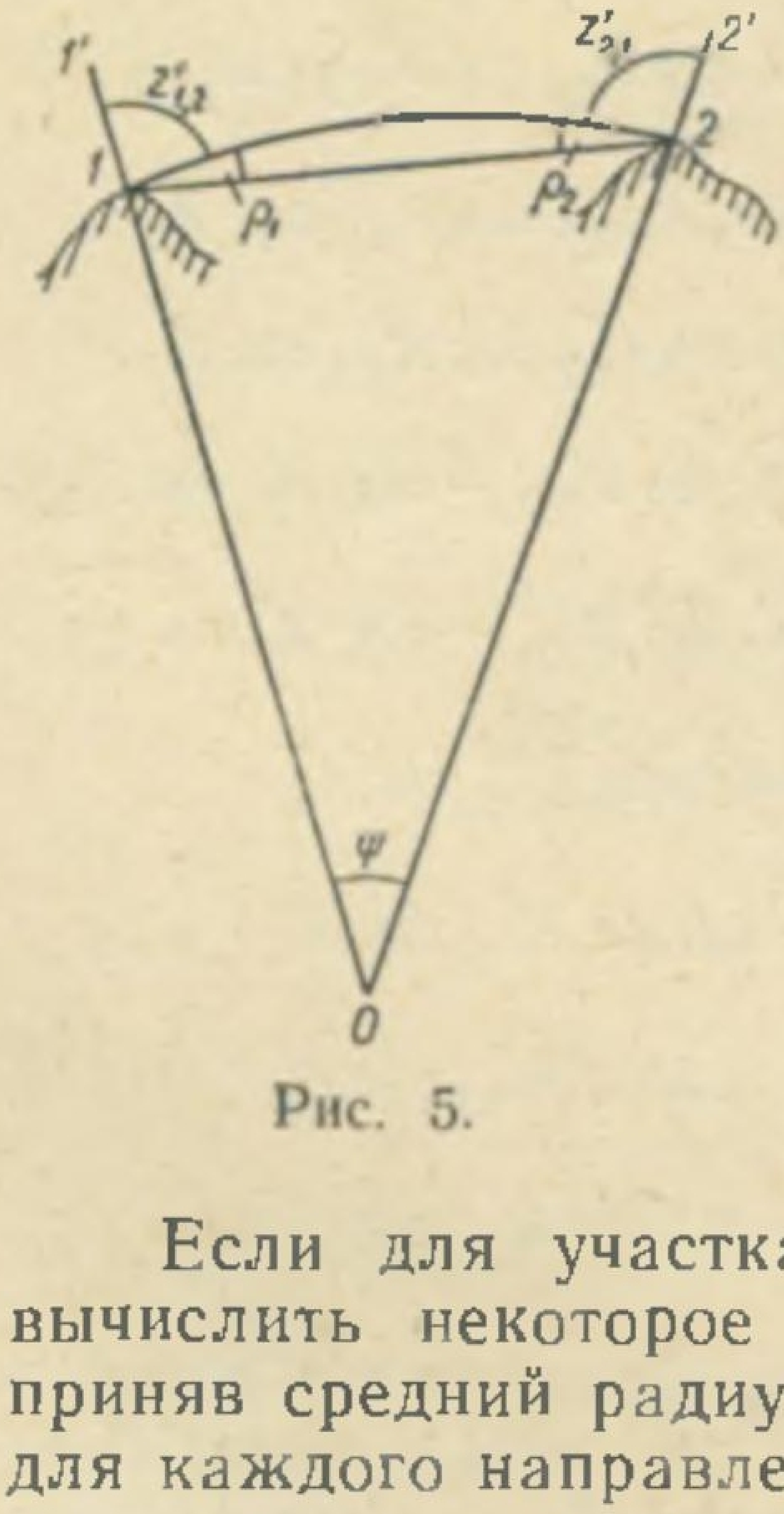

Рис. 5.

$$\rho_1 = k_1 \frac{\psi_1}{2}, \tag{37}$$

где

$$\psi''_1 = \frac{\rho'' s_{1,2}}{R_1} \tag{а}$$

или при крутом визировании

$$\psi''_1 = \frac{\rho'' s_{1,2} \sin z_{1.2}}{R_1}. \tag{б}$$

В приведенных формулах k_1 — коэффициент рефракции в пункте 1; R_1 — радиус кривизны отсчетного эллипсоида в азимуте стороны *1—2* и $s_{1,2}$ — приближенное расстояние между пунктами *1* и *2*.

Если для участка, на котором расположена сеть триангуляции, вычислить некоторое среднее значение коэффициента рефракции k_0, приняв средний радиус кривизны эллипсоида R_0 для этого участка, то для каждого направления рефракционный угол будет:

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho,$$

где ρ_0 вычисляется по формуле (37) со средними значениями k_0 и R_0, а

$$\Delta\rho = \Delta k \frac{\psi}{2} \tag{38}$$

— остаточное влияние рефракционного угла.

Тогда, для каждого зенитного расстояния можем написать:

$$z = z_0 + \Delta\rho, \tag{39}$$

где

$$z_0 = z' + \rho_0. \tag{40}$$

Обозначив ошибки наблюдений зенитных расстояний через (z), окончательно получим:

$$z = z_0 + (z) + \Delta\rho. \tag{41}$$

Среднее значение коэффициента рефракции удобно вычислять по измеренным (приведенным к центрам) значениям зенитных расстояний, пользуясь формулой, приведенной в работе Градилека [4]:

$$k_0 = \frac{\Sigma\{\psi - [(z'_{1,2} + z'_{2,1}) - 180^\circ]\}}{\Sigma\psi}. \tag{42}$$

Итак, при уравнивании каждое зенитное расстояние должно пониматься в виде (41).

Для удобства вычислений остаточное влияние рефракционного угла $\Delta\rho$ запишем так:

$$\Delta\rho = \overline{\Delta\rho} s, \tag{43}$$

где $\overline{\Delta\rho}$ — остаточное влияние рефракционного угла на единицу расстояния. Тогда (41) будет:

$$z = z_0 + (z) + \overline{\Delta\rho} s. \tag{44}$$

Согласно формулам (а), (38) и (43),

$$\overline{\Delta\rho} s = \Delta k \frac{\rho'' s}{2R}$$

или

$$\overline{\Delta\rho} = \Delta k \frac{\rho''}{2R}. \tag{45}$$

Отсюда видим, что $\overline{\Delta\rho}$ не зависит от расстояния и постоянно для каждого пункта.

Из последнего равенства для каждого пункта находим:

$$\Delta k = \frac{\overline{\Delta\rho} 2R}{\rho''}. \tag{46}$$

Здесь R берется в тех единицах расстояния, которые приняты в формуле (43).

После уравнивания и вычисления величин $\overline{\Delta\rho}$, а затем и Δk вероятнейшее значение коэффициента рефракции на каждом пункте будет:

$$k = k_0 + \Delta k. \tag{47}$$

5. Решение условных уравнений

При уравнивании звена пространственной триангуляции искомыми величинами, входящими в условные уравнения, будут вероятнейшие поправки к измеренным углам и зенитным расстояниям, а также неизвестные $\Delta\rho_i$. Способ решения условных уравнений между вероятнейшими значениями непосредственных измерений и неизвестными величинами детально описан И. Ю. Пранис-Праневичем в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пранис-Праневич И. Ю. Руководство по уравнительным вычислениям заполняющей триангуляции. Геодезиздат, М., 1941.
2. Рудский В. И. Передача астрономических координат с одного пункта на другой. Межведомственный республиканский научно-техн. сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 2. Изд-во Львовского ун-та, 1965.
3. Рудский В. И. Некоторое обобщение формул передачи астрономических координат и азимута. Межведомственный республиканский научно-техн. сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 4. Изд-во Львовского ун-та, 1966.
4. Hradilek L. Bestimmung der relativen Lotabweichung und des Refraktionskoeffizienten beim Ausgleich trigonometrisch gemessener Höhennetze. Studia geophysica et geodetica, 2 (1958).

Работа поступила
12 апреля 1966 г.