МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1965 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 2

В. И. РУДСКИЙ

ПЕРЕДАЧА АСТРОНОМИЧЕСКИХ КООРДИНАТ С ОДНОГО ПУНКТА НА ДРУГОЙ

В настоящей статье делается попытка дать точные формулы, с помощью которых возможна передача астрономических координат и азимута с одного пункта триангуляции на другой. При этом имеется в виду, что на всех пунктах, кроме горизонтальных углов, измерены также зенитные расстояния.

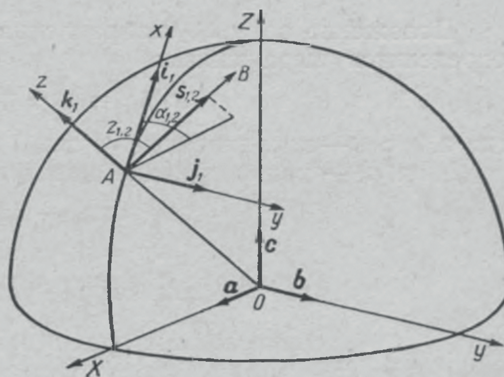

Рис. 1.

Постановка подобной задачи не вызывала сомнения у геодезистов и раньше [1], однако из-за грубых ошибок зенитных расстояний ее практическое применение было априорно отвергнуто. И действительно, существующая пока точность определения зенитных расстояний не может удовлетворить данную задачу в такой постановке. Однако некоторые ее аспекты представляют теоретический и практический интерес. В частности, проф. Н. К. Мигаль предложил автору данной статьи составить условные уравнения, выражающие зависимость между горизонтальными и вертикальными углами с одной стороны и астрономическими координатами и азимутами конечных пунктов — с другой. Эта задача и связана с передачей астрономических координат и азимута с одного пункта на другой.

* *
*

Пусть в некоторой точке O пространства построена правая прямоугольная система координат XYZ, в которой оси соответственно параллельны плоскости начального меридиана, плоскости экватора и оси вращения Земли (рис. 1). Назовем эту систему координат «общая».

Пусть, далее, в плоскости начального меридиана расположен исходный пункт триангуляции A с астрономическими координатами φ_1, λ_1 и астрономическим азимутом $\alpha_{1,2}$ направления на смежный пункт триангуляции B. При этом, конечно, $\lambda_1 = 0$.

Построим в пункте A местную прямоугольную систему координат xyz, в которой ось Ax лежит в плоскости меридиана и направлена на север, ось Ay лежит в плоскости первого вертикала и направлена на восток, ось Az направлена в астрономический зенит.

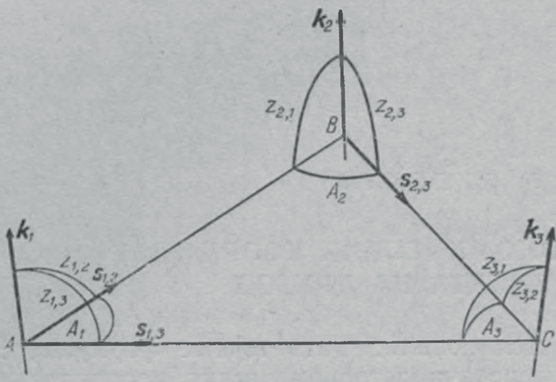

Рис. 2.

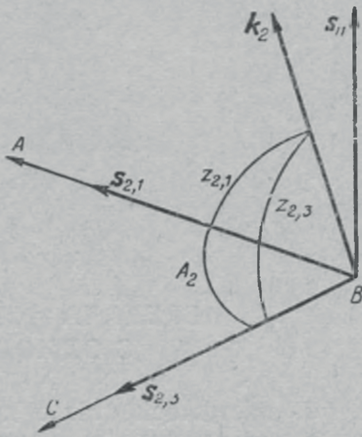

Рис. 3.

Положение орта $\mathbf{s}_{1,2}$ направления AB в общей системе координат определится выражением:

$$\mathbf{s}_{1,2}=l_1\mathbf{a}+m_1\mathbf{b}+n_1\mathbf{c}, \tag{1}$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — координатные орты,

l_1, m_1, n_1 — направляющие косинусы орта $\mathbf{s}_{1,2}$.

$$\left.\begin{aligned} l_1&=\cos\varphi_1\cos z_{1,2}-\sin\varphi_1\cos\alpha_{1,2}\sin z_{1,2},\\ m_1&=\sin\alpha_{1,2}\sin z_{1,2},\\ n_1&=\sin\varphi_1\cos z_{1,2}+\cos\varphi_1\cos\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $z_{1,2}$ — зенитное расстояние направления AB.

В местной системе координат орт $\mathbf{s}_{1,2}$ выражается соотношением:

$$\mathbf{s}_{1,2}=\mathbf{i}_1\cos\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}+\mathbf{j}_1\sin\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}+\mathbf{k}_1\cos z_{1,2}, \tag{3}$$

где $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ — координатные орты.

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1&=-\mathbf{a}\sin\varphi_1+\mathbf{c}\cos\varphi_1,\\ \mathbf{j}_1&=\mathbf{b},\\ \mathbf{k}_1&=\mathbf{a}\cos\varphi_1+\mathbf{c}\sin\varphi_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Обратимся к треугольнику ABC, образованному прямыми, соединяющими пункты триангуляции A, B и C (рис. 2). На рисунке: A_1, A_2, A_3 — углы между прямыми на каждом пункте; z_{in} — зенитное расстояние с i-того на n-й пункт; $\mathbf{k}_i$ — орт отвесной линии в i-том пункте.

Тогда можно написать:

$$\begin{aligned} \cos A_1&=\cos z_{1,2}\cos z_{1,3}+\sin z_{1,2}\sin z_{1,3}\cos a_1,\\ \cos A_2&=\cos z_{2,1}\cos z_{2,3}+\sin z_{2,1}\sin z_{2,3}\cos a_2,\\ \cos A_3&=\cos z_{3,1}\cos z_{3,2}+\sin z_{3,1}\sin z_{3,2}\cos a_3, \end{aligned} \tag{5}$$

где a_i — измеренный на i-том пункте горизонтальный угол.

Для орта $\mathbf{s}_{1,3}$ направления AC по аналогии с формулами (1) и (2) будем иметь:

$$\mathbf{s}_{1,3}=l_2\mathbf{a}+m_2\mathbf{b}+n_2\mathbf{c} \tag{6}$$

и

$$\begin{gathered} l_2=\cos\varphi_1\cos z_{1,3}-\sin\varphi_1\cos\alpha_{1,3}\sin z_{1,3}, \\ m_2=\sin\alpha_{1,3}\sin z_{1,3}, \\ n_2=\sin\varphi_1\cos z_{1,3}+\cos\varphi_1\cos\alpha_{1,3}\sin z_{1,3}, \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\alpha_{1,3}=\alpha_{1,2}+a_1. \tag{8}$$

Имея в треугольнике ABC орты $\mathbf{s}_{1,2}$ и $\mathbf{s}_{1,3}$ направлений AB и AC, можем отыскать орт $\mathbf{s}_{2,3}$ направления BC. Для этого надо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} l_1x_1+m_1x_2+n_1x_3=-\cos A_3, \\ l_2x_1+m_2x_2+n_2x_3=\cos A_3, \\ (m_1n_2-m_2n_1)\,x_1+(n_1l_2-n_2l_1)\,x_2+(l_1m_2-l_2m_1)\,x_3=0. \end{gathered} \tag{9}$$

Последнее уравнение выражает условие компланарности ортов $s_{1,2}$, $\mathbf{s}_{1,3}$ и $\mathbf{s}_{2,3}$. Искомыми величинами будут составляющие орта $\mathbf{s}_{2,3}$.

Из (9) для $\mathbf{s}_{2,3}$ найдем:

$$\mathbf{s}_{2,3}=\frac{\mathbf{s}_{1,3}\sin A_2-\mathbf{s}_{1,2}\sin A_3}{\sin A_1}. \tag{10}$$

Формулы (1), (6) и (10) вполне определяют положения сторон AB, AC и BC треугольника в пространстве.

Из рис. 2, учитывая формулу (1), можем написать:

$$\mathbf{s}_{2,1}=-\mathbf{s}_{1,2}=-(l_1\mathbf{a}+m_1\mathbf{b}+n_1\mathbf{c}). \tag{11}$$

В свою очередь, по аналогии с формулой (3), в местной системе координат пункта B

$$\mathbf{s}_{2,1}=\mathbf{i}_2\cos\alpha_{2,1}\sin z_{2,1}+\mathbf{j}_2\sin\alpha_{2,1}\sin z_{2,1}+\mathbf{k}_2\cos z_{2,1}. \tag{12}$$

где

$$\begin{gathered} \mathbf{i}_2=-\mathbf{a}\sin\varphi_2\cos\lambda_2-\mathbf{b}\sin\varphi_2\sin\lambda_2+\mathbf{c}\cos\varphi_2, \\ \mathbf{j}_2=-\mathbf{a}\sin\lambda_2+\mathbf{b}\cos\lambda_2, \\ \mathbf{k}_2=\mathbf{a}\cos\varphi_2\cos\lambda_2+\mathbf{b}\cos\varphi_2\sin\lambda_2+\mathbf{c}\sin\varphi_2. \end{gathered} \tag{13}$$

Принимая во внимание (1) и (6), формулу (10) запишем в виде:

$$\mathbf{s}_{2,3}=\frac{(l_2\mathbf{a}+m_2\mathbf{b}+n_2\mathbf{c})\sin A_2-(l_1\mathbf{a}+m_1\mathbf{b}+n_1\mathbf{c})\sin A_3}{\sin A_1}. \tag{14}$$

Положение пункта B определяется ортом $\mathbf{k}_2$. $\mathbf{s}_{2,3}$, $s_{2,1}$ и $\mathbf{k}_2$ образуют в пункте B тройку векторов.

Найдем зависимость между $\mathbf{k}_2$ с одной стороны и $\mathbf{s}_{2,3}$, $\mathbf{s}_{2,1}$ — с другой, то есть, выразим орт отвесной линии в пункте B через известные уже нам величины. Для этого построим в B левую косоугольную систему координат $\mathbf{s}_{2,3}\mathbf{s}_{2,1}\mathbf{s}_{II}$ (рис. 3). При этом орт $\mathbf{s}_{II}$ построим при условии:

$$\mathbf{s}_{II}=-\frac{\mathbf{s}_{2,3}\times\mathbf{s}_{2,1}}{\sin A_2}. \tag{15}$$

Таким образом, $\mathbf{s}_{II}$ представляет собой векторное произведение $\mathbf{s}_{2,3}\times\mathbf{s}_{2,1}$. Знак минус в формуле поставлен потому, что векторы $\mathbf{s}_{2,3}$ и $\mathbf{s}_{2,1}$ заданы в правой (общей) системе координат.

Тогда можно записать:

$$\mathbf{k}_2 = P\mathbf{s}_{2,3} + Q\mathbf{s}_{2,1} + R\mathbf{s}_{II}, \qquad (16)$$

где P, Q, R — проекции орта $\mathbf{k}_2$.

Отыскав эти проекции и подставив их значения в (16) с учетом (15), получим:

$$\mathbf{k}_2 = \frac{\cos z_{2,3} - \cos z_{2,1}\cos A_2}{\sin^2 A_2}\mathbf{s}_{2,3} + \frac{\cos z_{2,1} - \cos z_{2,3}\cos A_2}{\sin^2 A_2}\mathbf{s}_{2,1} -$$

$$- \frac{\sin a_2 \sin z_{2,1} \sin z_{2,3}}{\sin^2 A_2}(\mathbf{s}_{2,3}\times\mathbf{s}_{2,1}). \qquad (17)$$

$\mathbf{s}_{2,1}$ и $\mathbf{s}_{2,3}$ вычисляются по формулам (11) и (14) с учетом (2) и (7).

Приравняв $\mathbf{k}_2$ к его значению из (13) и введя обозначения

$$L_1 = \frac{\cos z_{2,3} - \cos z_{2,1}\cos A_2}{\sin A_1 \sin A_2}, \qquad (18)$$

$$M_1 = \frac{\sin z_{2,1}\sin z_{2,3}\sin a_2}{\sin A_1 \sin A_2}, \qquad (19)$$

получим следующие соотношения для астрономических координат пункта B:

$$\cos\varphi_2\cos\lambda_2 = \cos z_{2,1}(\sin\varphi_1\cos\alpha_{1,2}\sin z_{1,2} - \cos\varphi_1\cos z_{1,2}) -$$

$$- L_1[\sin\varphi_1(\cos\alpha_{1,3}\sin z_{1,3} - \cos\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}\cos A_1) -$$

$$- \cos\varphi_1(\cos z_{1,3} - \cos z_{1,2}\cos A_1)] + M_1[\sin\varphi_1(\sin\alpha_{1,3}\sin z_{1,3}\cos z_{1,2} -$$

$$- \sin\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}\cos z_{1,3}) + \cos\varphi_1\sin z_{1,2}\sin z_{1,3}\sin a_1]. \qquad (20)$$

$$\cos\varphi_2\sin\lambda_2 = -\sin\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}\cos z_{2,1} + L_1(\sin\alpha_{1,3}\sin z_{1,3} -$$

$$- \sin\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}\cos A_1) + M_1(\cos\alpha_{1,3}\sin z_{1,3}\cos z_{1,2} - \cos\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}\cos z_{1,3}). \qquad (21)$$

$$\sin\varphi_2 = -\cos z_{2,1}(\cos\varphi_1\cos\alpha_{1,2}\sin z_{1,2} + \sin\varphi_1\cos z_{1,2}) +$$

$$+ L_1[\cos\varphi_1(\cos\alpha_{1,3}\sin z_{1,3} - \cos\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}\cos A_1) +$$

$$+ \sin\varphi_1(\cos z_{1,3} - \cos z_{1,2}\cos A_1)] - M_1[\cos\varphi_1(\sin\alpha_{1,3}\sin z_{1,3}\cos z_{1,2} -$$

$$- \sin\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}\cos z_{1,3}) - \sin\varphi_1\sin z_{1,2}\sin z_{1,3}\sin a_1]. \qquad (22)$$

Найдя координаты пунктов A и B, а также прямой азимут $\alpha_{1,2}$ направления AB, получим обратный азимут $\alpha_{2,1}$.

Для этого орт $s_{2,1}$ из (11) умножим скалярно на орт j_2 из соотношений (13). Тогда

$$\mathbf{s}_{2,1}\mathbf{j}_2 = l_1\sin\lambda_2 - m_1\cos\lambda_2. \qquad (23)$$

Скалярное произведение $\mathbf{s}_{2,1}$ из формулы (12) на $\mathbf{j}_2$ дает:

$$\mathbf{s}_{2,1}\mathbf{j}_2 = \sin\alpha_{2,1}\sin z_{2,1}. \qquad (24)$$

Из (23) и (24) находим, что

$$\sin \alpha_{2,1} \sin z_{2,1} = l_1 \sin \lambda_2 - m_1 \cos \lambda_2. \tag{25}$$

Это соотношение приведено в работе [2].

Учитывая (2), для обратного азимута получили:

$$\sin \alpha_{2,1} = \frac{(\cos \varphi_1 \cos z_{1,2} - \sin \varphi_1 \cos \alpha_{1,2} \sin z_{1,2}) \sin \lambda_2 - \sin \alpha_{1,2} \sin z_{1,2} \cos \lambda_2}{\sin z_{2,1}}. \tag{26}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Молоденский. Изучение фигуры физической поверхности Земли геометрическим (астрономо-геодезическим) методом. Труды ЦНИИГАиК, вып. 75, М., 1950.

2. K. Ledersteger. Astronomische und physikalische Geodäsie (Erdmessung). Jordan (Eggert) Kneissl. Handbuch der Vermessungskunde, B. V, 3-te lfg. 1957.

Работа поступила
20 октября 1964 г.