А. Е. ФИЛИППОВ

# НЕКОТОРОЕ ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ФИГУРУ ФИЗИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

В настоящей работе мы приводим вывод формул, определяющих координаты точек земной поверхности, при следующих основных положениях [1].

1. Отсчетная поверхность $S_0$ рассматривается как неуровенный эллипсоид вращения.

2. Система вспомогательных высот $H$, устанавливаемая по результатам геометрического нивелирования и определяющая вместе с астрономическими координатами $\varphi$, $\lambda$ вспомогательную поверхность $S$ (поверхность Земли в первом приближении), произвольна в том отношении, что она не связывается с параметрами какого-либо нормального поля. Поверхность $S$ может быть сразу построена как сглаженная.

3. Нормальное поле в общепринятом смысле, как поле, создаваемое отсчетным уровенным эллипсоидом, при решении задачи не вводится.

Итак, пусть $\Sigma$ — физическая поверхность Земли, $S_0$ — отсчетная поверхность (эллипсоид вращения с элементами $a$, $\alpha$, малая ось которого параллельна оси вращения Земли), $\nu$ — направление внешней нормали к поверхности $S_0$. Для определения поверхности $\Sigma$ нужно найти геодезические координаты $B$, $L$, $H'$ точек этой поверхности.

По данным нивелирования и астрономическим определениям можно получить систему приближенных высот $H$ точек земной поверхности $\Sigma$. Откладывая от отсчетной поверхности по нормалям $\nu$ высоты $H$, построим вспомогательную поверхность $S$, близкую к поверхности $\Sigma$. Высоты $H$ могут быть любыми. Они должны лишь удовлетворять условию, чтобы расстояния $h=H'-H$ между поверхностями $\Sigma$ и $S$ оставались малыми величинами второго порядка, т. е. порядка $R\alpha^2$. Такой системой высот могут служить, например, высоты, снятые с гипсометрических карт земной поверхности. Последующие выводы будем делать, пренебрегая малыми величинами третьего порядка $\left(R\alpha^3 \text{ или } h\alpha, \frac{H^2}{a}\alpha\right)$. Отбросим также величины порядка $(\varphi-B)\alpha R$, $(\lambda-L)\cos\varphi R$.

Понимая под составляющими $\xi$, $\eta$ уклонения отвеса в точках поверхности $\Sigma$ углы между проекциями отвесной линии соответственно на плоскость меридиана и первого вертикала и нормалью к отсчетной поверхности, получим с достаточной точностью

$$B=\varphi-\xi,$$
$$L=\lambda-\eta\sec\varphi,$$
$$H'=H+h. \qquad (1)$$

Пусть, далее, $W$ — потенциал силы тяжести Земли, $W_\Sigma$, $W_s$ и $W_0$ — его значения на поверхности $\Sigma$ в соответствующих точках поверхности $S$ и на уровне моря, $g$ — ускорение силы тяжести на поверхности $\Sigma$, $g_s$ — ускорение силы тяжести в соответствующих точках поверхности $S$. Тогда мы имеем

$$W_\Sigma = W_0 - \int g\,dh_w. \tag{2}$$

В этом выражении $dh_w$ — элементарное нивелирное превышение, а интегрирование выполняется по избранному профилю от нульпункта нивелирования до рассматриваемой точки поверхности $\Sigma$.

Далее, с принятой точностью

$$W_s = W_\Sigma + gh = W_0 - \int g\,dh_w + gh.$$

откуда

$$h = \frac{W_s - W_0 + \int g\,dh_w}{g}. \tag{3}$$

Пренебрегая искривлением силовой линии реального поля на отрезке $h$, получим для составляющих уклонения отвеса в меридиане и в первом вертикале

$$\sin\xi = -\frac{1}{g_s(M+H)}\left.\frac{\partial W}{\partial B}\right|_s,$$

$$\sin\eta = -\frac{1}{g_s(N+H)\cos B}\left.\frac{\partial W}{\partial L}\right|_s.$$

В этих выражениях $M$ и $N$ — радиусы кривизны меридиана и первого вертикала отсчетного эллипсоида. С относительной погрешностью порядка $\alpha$ будем иметь

$$\xi = -\frac{1}{ga}\left.\frac{\partial W}{\partial B}\right|_s,$$

$$\eta = -\frac{1}{ga\cos B}\left.\frac{\partial W}{\partial L}\right|_s. \tag{4}$$

Формулы (1) вместе с формулами (3) и (4) определяют искомые геодезические координаты $B$, $L$, $H'$ точек земной поверхности $\Sigma$. Для практического использования их нужно найти значения потенциала силы тяжести $W$ и его производных в точках вспомогательной поверхности $S$.

Составим граничное условие для потенциала $W$ на поверхности $S$. С точностью до малых величин второго порядка имеем

$$g_s = g - \frac{\partial g}{\partial \nu}h = g - \frac{W_s - W_0 + \int g\,dh_w}{g}\frac{\partial g}{\partial \nu}, \tag{5}$$

$$g_s = -\left.\frac{\partial W}{\partial \nu}\right|_s. \tag{6}$$

Допустим, как это обычно делается, что

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial \nu}=-\frac{2}{a}+\mathrm{I}, \tag{7}$$

где I малая величина первого порядка. Тогда, учитывая (6) и (7), выражение (5) приведем к виду

$$\frac{\partial W}{\partial \nu}+\frac{2W}{a}=-g-\frac{2}{a}\int g\,dh_w+\frac{2W_0}{a}. \tag{8}$$

Уравнению (8) должен удовлетворять потенциал $W$ силы тяжести Земли в точках поверхности $S$. Индекс $s$ мы отбросили, чтобы не усложнять в дальнейшем написание формул.

Пусть, далее

$$W=V+\Omega, \tag{9}$$

где $V$ — потенциал притяжения Земли, а $\Omega$ — потенциал центробежной силы. Заменив в граничном условии (8) потенциал $W$ его выражением согласно (9), получим граничное условие для потенциала притяжения

$$\frac{\partial V}{\partial \nu}+\frac{2V}{a}=-g-\frac{2}{a}\int g\,dh_w+\frac{2W_0}{a}-\frac{\partial\Omega}{\partial \nu}-\frac{2\Omega}{a}. \tag{10}$$

Найдем выражения для $\Omega$ и $\frac{\partial\Omega}{\partial \nu}$ в точках поверхности $S$. Пусть $x$, $y$, $z$ — пространственные прямолинейные прямоугольные координаты, отнесенные к центру $O$ отсчетного эллипсоида, $x'$, $y'$, $z'$ — координаты, связанные с центром инерции Земли. Через $x_0$, $y_0$, $z_0$ обозначим координаты центра инерции Земли в системе $Oxyz$. Эти величины считаем малыми порядка $R\alpha^2$. Для точек поверхности $S$ имеем

$$\begin{aligned} x&=(N+H)\cos B\cos L,\\ y&=(N+H)\cos B\sin L,\\ z&=N(1-e^2)\sin B+H\sin B. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $e$ — первый эксцентрицитет отсчетного эллипсоида $S_0$, связанный со сжатием $\alpha$ известной зависимостью $e^2=2\alpha-\alpha^2$. Воспользовавшись выражением

$$N=a(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{1}{2}},$$

разложим правые части первых двух формул (11) в ряды по степеням $e$ и $\frac{H}{a}$, приведя их к следующему виду

$$\begin{aligned} x&=a\left(1+\frac{1}{2}e^2\sin^2 B+\frac{H}{a}\right)\cos B\cos L+\mathrm{II},\\ y&=a\left(1+\frac{1}{2}e^2\sin^2 B+\frac{H}{a}\right)\cos B\sin L+\mathrm{II}. \end{aligned} \tag{12}$$

Римской цифрой II обозначена совокупность членов второго и более высоких порядков малости $\left(ae^4,\ He^2,\ \frac{H^2}{a}\ \text{и т. д.}\right)$.

Выражение для потенциала центробежной силы $\Omega$, как известно, можно записать так:

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2}(x'^2 + y'^2), \tag{13}$$

где $\omega$ — угловая скорость вращения Земли. Заметим, что в точках поверхности $S$ потенциал $\Omega$ является величиной порядка $V\alpha$. Принимая во внимание, что

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0, \quad z' = z - z_0,$$

выражение (13) приведем к следующему виду

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \omega^2 x x_0 - \omega^2 y y_0 + \frac{\omega^2}{2}(x_0^2 + y_0^2).$$

Для точек поверхности $S$ три последние члена здесь являются малыми величинами третьего и четвертого порядка. Поэтому с принятой точностью

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \tag{14}$$

Вычисляем $\frac{\partial \Omega}{\partial \nu}$:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \nu} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \nu} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \nu} + \frac{\partial \Omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \nu},$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \omega^2 x, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \omega^2 y, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \nu} = \frac{\partial x}{\partial H} = \cos B \cos L, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu} = \frac{\partial y}{\partial H} = \cos B \sin L, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \nu} = (\omega^2 x \cos L + \omega^2 y \sin L)\cos B.$$

Заменив в формулах (14) и (15) координаты $x, y$ их выражениями, согласно (12), получим окончательно

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\omega^2 a^2}{2}\left(1 + e^2 \sin^2 B + \frac{2H}{a}\right)\cos^2 B + \mathrm{III}, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} &= \omega^2 a\left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B + \frac{H}{a}\right)\cos^2 B + \mathrm{III}. \end{aligned} \tag{16}$$

Используя формулы (16), приводим граничное условие (10) для потенциала притяжения $V$ к следующему виду

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} + \frac{2V}{a} = -g - \frac{2}{a}\int g\, dh_w + \frac{2W_0}{a} -$$

$$- 2\omega^2 a\left(1 + \frac{3}{4} e^2 \sin^2 B + \frac{3}{2}\frac{H}{a}\right)\cos^2 B. \tag{17}$$

Решение задачи определения в точках известной поверхности $S$, гармонической вне этой поверхности и регулярной на бесконечности функции $F$ пространственных координат, удовлетворяющей на поверхности $S$ граничному условию вида

$$\frac{\partial F}{\partial \nu} + \frac{2F}{a} = f(B, L, H),$$

дано М. С. Молоденским [2]. Относительная погрешность решения имеет порядок $\frac{H}{a}$ или $\alpha$. В настоящем случае, а именно, для отыскания функции $V$ мы не можем формально воспользоваться этим решением, потому что потенциал притяжения $V$ — величина нулевого порядка, а не второго порядка малости, как это имело место для возмущающего потенциала $T$ в теории М. С. Молоденского. Чтобы все же воспользоваться решением М. С. Молоденского, поступим следующим образом. Положим, что

$$V = V_0 + T, \tag{18}$$

где $V_0$ — приближенное значение потенциала притяжения, выбранное так, чтобы в точках поверхности $S$ потенциал $T$ был величиной второго порядка малости ($V\alpha^2$). Тогда граничное условие (17) превратится в граничное условие для потенциала $T$:

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} + \frac{2T}{a} = -g - \frac{2}{a}\int g dh_w + \frac{2W_0}{a} -$$

$$- 2\omega^2 a\left(1 + \frac{3}{4}e^2\sin^2 B + \frac{3}{2}\frac{H}{a}\right)\cos^2 B - \left(\frac{\partial V_0}{\partial \nu} + \frac{2V_0}{a}\right). \tag{19}$$

Решение этого уравнения относительно $T$ можно будет записать уже по аналогии с решением М. С. Молоденского, правомерно допуская погрешность порядка $T\frac{H}{a}$.

Основываясь на разложении потенциала притяжения в ряд по сферическим функциям, выражение для приближенного потенциала $V_0$ напишем в такой форме

$$V_0 = \frac{P}{\rho} + \frac{Q}{\rho^3}(1 - 3\sin^2\Phi) + \frac{R}{\rho^5}(3 - 30\sin^2\Phi + 35\sin^4\Phi). \tag{20}$$

Здесь $\rho$ и $\Phi$ — геоцентрические координаты внешней точки, отнесенные к центру отсчетного эллипсоида, а $P$, $Q$, $R$ — некоторые произвольные параметры. Мы допускаем, что эти параметры в принципе могут быть эмпирически определены так, чтобы в точках поверхности $S$ разность $V - V_0 = T$ была величиной второго порядка. Очевидно, $P$ будет величиной нулевого порядка, $Q$ — первого порядка малости, а $R$ — второго.

Найдем выражения для $V_0$ и $\frac{\partial V_0}{\partial \nu}$ в точках поверхности $S$. Имеем

$$\frac{\partial V_0}{\partial \nu} = \frac{\partial V_0}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \nu} + \frac{\partial V_0}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}.$$

Дифференцируем $V_0$ по $\rho$ и $\Phi$:

$$\frac{\partial V_0}{\partial \rho} = -\frac{P}{\rho^2} - \frac{3Q}{\rho^4}(1-3\sin^2\Phi) - \frac{5R}{\rho^6}(3-30\sin^2\Phi+35\sin^4\Phi),$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial \Phi} = -\frac{6Q}{\rho^3}\sin\Phi\cos\Phi + \mathrm{III}.$$

Используя зависимости

$$\rho^2 = N^2e^4\sin^2 B + (N+H)^2 - 2Ne^2(N+H)\sin^2 B,$$

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{N(1-e^2)+H}{N+H}\operatorname{tg} B$$

и выполняя разложения в ряды по степеням $e$ и $\frac{H}{a}$ нетрудно получить далее следующие выражения

$$\frac{\partial\rho}{\partial\nu} = \frac{\partial\rho}{\partial H} = 1 - \frac{1}{2}e^4\sin^2 B\cos^2 B + \mathrm{III},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \frac{\partial\Phi}{\partial H} = \frac{e^2}{a}\sin B\cos B + \mathrm{II},$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{2}e^2\sin^2 B - \frac{1}{2}e^4\sin^2 B + \frac{7}{8}e^4\sin^4 B - \frac{H}{a} + \right.$$
$$\left. + \frac{H^2}{a^2} - \frac{H}{a}e^2\sin^2 B\right) + \mathrm{III},$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2}\left(1 + e^2\sin^2 B - e^4\sin^2 B + 2e^4\sin^4 B - 2\frac{H}{a} + \right.$$
$$\left. + 3\frac{H^2}{a^2} - 3\frac{H}{a}e^2\sin^2 B\right) + \mathrm{III},$$

$$\frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{a^3}\left(1 + \frac{3}{2}e^2\sin^2 B - 3\frac{H}{a}\right) + \mathrm{II},$$

$$\frac{1}{\rho^4} = \frac{1}{a^4}\left(1 + 2e^2\sin^2 B - 4\frac{H}{a}\right) + \mathrm{II},$$

$$\frac{1}{\rho^5} = \frac{1}{a^5} + \mathrm{I},$$

$$\frac{1}{\rho^6} = \frac{1}{a^6} + \mathrm{I}.$$

С помощью этих выражений получаем, сохраняя принятую точность,

$$V_0 = \frac{P}{a}\left(1 + \frac{1}{2}e^2\sin^2 B - \frac{1}{2}e^4\sin^2 B + \frac{7}{8}e^4\sin^4 B - \frac{H}{a} + \right.$$
$$\left. + \frac{H^2}{a^2} - \frac{H}{a}e^2\sin^2 B\right) + \frac{Q}{a^3}\left(1 + \frac{3}{2}e^2\sin^2 B - 3\frac{H}{a}\right)(1-3\sin^2\Phi) +$$
$$+ \frac{R}{a^5}(3-30\sin^2\Phi+35\sin^4\Phi) + \mathrm{III},$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial \nu}=-\frac{P}{a^2}\left(1+e^2\sin^2 B-e^4\sin^2 B-\frac{1}{2}e^4\sin^2 B\cos^2 B+2e^4\sin^4 B-2\frac{H}{a}+\right.$$

$$\left.+3\frac{H^2}{a^2}-3\frac{H}{a}e^2\sin^2 B\right)-\frac{3Q}{a^4}\left(1+2e^2\sin^2 B-4\frac{H}{a}\right)(1-3\sin^2\Phi)-$$

$$-\frac{6Q}{a^4}e^2\sin B\cos B\sin\Phi\cos\Phi-\frac{5R}{a^6}(3-30\sin^2\Phi+35\sin^4\Phi)+\mathrm{III}. \quad (21)$$

Теперь, учитывая (21), а также используя зависимости

$$\sin^2\Phi=\sin^2 B-2e^2\sin^2 B\cos^2 B+\mathrm{II},$$

$$e^2=2\alpha-\alpha^2,$$

граничное условие (19) после несложных, но довольно громоздких преобразований, приведем к следующему виду

$$\frac{\partial T}{\partial \nu}+\frac{2T}{a}=-g-\frac{2}{a}\int g\,dh_w+\frac{2W_0}{a}-\frac{2}{a}\left(\frac{P}{a}+\frac{Q}{a^3}+\frac{3R}{a^5}+\frac{\omega^2a^2}{2}\right)+$$

$$+\frac{P}{a^2}\left(1+3\frac{Q}{Pa^2}-\frac{\omega^2a^3}{P}+15\frac{R}{Pa^4}\right)\left\{1+\left[2\frac{\omega^2a^3}{P}-3\frac{Q}{Pa^2}+\right.\right.$$

$$\left.+\alpha^2-12\frac{Q}{Pa^2}-9\frac{Q}{Pa^2}-\frac{\omega^2a^3}{P}+9\left(\frac{Q}{Pa^2}\right)^2+2\left(\frac{\omega^2a^3}{P}\right)^2+15\frac{R}{Pa^4}\right]\sin^2 B+$$

$$+\left[\frac{21}{2}\frac{Q}{Pa^2}\alpha-\frac{3}{4}\frac{\omega^2a^3}{P}\alpha-\frac{3}{4}\alpha^2-\frac{105}{4}\frac{R}{Pa^4}\right]\sin^2 2B+$$

$$\left.+\frac{H}{a}\left(3\frac{\omega^2a^3}{P}-2\alpha+18\frac{Q}{Pa^2}\right)\sin^2 B+\frac{H}{a}\left(\frac{H}{a}-3\frac{\omega^2a^3}{P}-6\frac{Q}{Pa^2}\right)\right\}. \quad (22)$$

Введем обозначения

$$g_e=\frac{P}{a^2}\left(1+3\frac{Q}{Pa^2}-\frac{\omega^2a^3}{P}+15\frac{R}{Pa^4}\right),$$

$$\beta=2\frac{\omega^2a^3}{P}-3\frac{Q}{Pa^2}+\alpha^2-12\frac{Q}{Pa^2}\alpha-9\frac{Q}{Pa^2}\frac{\omega^2a^3}{P}+9\left(\frac{Q}{Pa^2}\right)+$$

$$+2\left(\frac{\omega^2a^3}{P}\right)^2+15\frac{R}{Pa^4},$$

$$\beta_1=-\frac{21}{2}\frac{Q}{Pa^2}\alpha+\frac{3}{4}\frac{\omega^2a^3}{P}\alpha+\frac{3}{4}\alpha^2+\frac{105}{4}\frac{R}{Pa^4}. \quad (23)$$

Вместо параметров $P$, $Q$, $R$ в дальнейшем будем рассматривать параметры $g_e$, $\beta$, $\beta_1$. Очевидно, $g_e$ будет величиной нулевого порядка, $\beta$ — первого, а $\beta_1$ — второго. Решив уравнения (23) относительно $P$, $Q$ и $R$, найдем с погрешностью третьего порядка

$$P=g_e a^2\left(1-g+\beta-\frac{1}{7}\alpha^2+\frac{6}{7}\alpha g-\frac{8}{7}\beta_1\right),$$

$$Q=g_e a^4\left(\frac{2}{3}q-\frac{1}{3}\beta+\frac{4}{21}\alpha^2-\frac{31}{21}\alpha q+\frac{2}{3}\alpha\beta+\frac{4}{21}\beta_1\right), \quad (24)$$

$$R=g_e a^6\left(\frac{5}{21}\alpha q-\frac{1}{35}\alpha^2-\frac{2}{15}\alpha\beta+\frac{4}{105}\beta_1\right).$$

При решении введено обозначение $q=\frac{\omega^2 a}{g_e}$.

С той же точностью

$$3\frac{\omega^2 a^3}{P}-2\alpha+18\frac{Q}{Pa^2}=15q-6\beta-2\alpha,$$

$$-3\frac{\omega^2 a^3}{P}-6\frac{Q}{Pa^2}=2\beta-7q, \tag{25}$$

$$\frac{P}{a}+\frac{Q}{a^3}+\frac{3R}{a^5}+\frac{\omega^2 a^2}{2}=g_e a\left(1+\frac{1}{6}q+\frac{2}{3}\beta-\frac{4}{105}\alpha^2+\frac{2}{21}\alpha q+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{15}\alpha\beta-\frac{88}{105}\beta_1\right)=U_0'.$$

Граничное условие (22) для потенциала $T$ принимает теперь следующий простой вид

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \nu}+\frac{2T}{a}=-g-\frac{2}{a}\int g\,dh_w+g_e\left[1+\beta\sin^2 B-\beta_1\sin^2 2B+\right.$$

$$\left.+\frac{H}{a}(15q-6\beta-2\alpha)\sin^2 B+\frac{H}{a}\left(\frac{H}{a}-7q+2\beta\right)\right]+\frac{2}{a}(W_0-U_0'). \tag{26}$$

С точностью до малых величин второго порядка выражение (20) можно рассматривать как потенциал притяжения уровенного эллипсоида с элементами $a$, $\alpha$, вращающегося с угловой скоростью $\omega$. Только в этом случае величины $Q$ и $R$, сохраняя порядок малости, перестают быть произвольными и выражаются через $P$, $a$, $\alpha$ и $\omega$. Соответственно величины $\beta$ и $\beta_1$ выражаются через $g_e$, $a$, $\alpha$ и $\omega$, причем, как это будет ясно из дальнейшего, величины $g_e$. $\beta$ и $\beta_1$ приобретают смысл коэффициентов в формуле распределения силы тяжести на поверхности указанного эллипсоида

$$\gamma=g_e(1+\beta\sin^2 B-\beta_1\sin^2 2B). \tag{27}$$

Таким образом, в уравнении (26) численные значения произвольных параметров $g_e$, $\beta$ и $\beta_1$ можно установить на основании любой из известных формул нормального распределения силы тяжести на земной поверхности. Должно выполняться лишь условие, чтобы разность между измеренным значением силы тяжести $g$ в точке земной поверхности (с поправкой в свободном воздухе) и вычисленным для той же точки по формуле вида (27) оставалась всюду малой величиной второго порядка ($g\alpha^2$). Взятое из какой-либо нормальной формулы значение коэффициента $g_e$ может быть изменено на величину порядка $g_e\alpha^2$, а значение коэффициента $\beta$ — на величину порядка $\beta\alpha$.

Определение методом М. С. Молоденского гармонической и регулярной на бесконечности функции $T$, удовлетворяющей в точках известной поверхности $S$ граничному условию (26), приведет, как известно, к следующему решению*

$$T=\sum_{n=1}^{\infty} T_n. \tag{28}$$

* Мы имеем в виду решение в том виде, как оно приведено В. В. Броваром в работе [3].

В раскрытом виде мы выпишем только главные члены бесконечной суммы, соответствующие $n=0$ и $n=1$:

$$T_0=\frac{a}{4\pi}\int G_0\,[S(\psi)-1]\,d\sigma+X_1(B,\ L),$$

$$T_1=\frac{a}{4\pi}\int G_1\,[S(\psi)-1]\,d\sigma,$$

. . . . . . . . . . . . . .

$$G_0=g+\frac{2}{a}\int g\,dh_w-g_e\Big[1+\beta\sin^2 B-\beta_1\sin^2 2B+$$

$$+\frac{H}{a}(15q-6\beta-2\alpha)\sin^2 B+\frac{H}{a}\left(\frac{H}{a}-7q+2\beta\right)\Big]-\frac{2}{a}(W_0-U_0),$$

$$G_1=a^2\int\varkappa_0\,\frac{H-H_0}{r_0^3}\,d\sigma,$$

. . . . . . . . . . . . .

$$\chi_n=\frac{G_n}{2\pi}+\frac{3}{(4\pi)^2}\int G_n\,[S(\psi)-1]\,d\sigma. \qquad (29)$$

Здесь $d\sigma$ — элемент единичной сферы, по которой выполняется интегрирование, $H_0$ — значение $H$ в исследуемой точке, $r_0$ — расстояние между текущей и исследуемой точками на сфере радиуса $a$, $\psi$ — угол между радиусами-векторами этих точек, $S(\psi)$ — функция Стокса, $X_1(B,\ L)$ — сферическая функция первого порядка.

Решение (28), (29) определяет $T$ в точках поверхности $S$ с погрешностью порядка $T\alpha$.

Найдя $T$, получаем

$$W_s=V_0|_s+\Omega_s+T$$

и в соответствии с формулой (3) находим $h$:

$$gh=T+V_0|_s+\Omega_s-W_0+\int g\,dh_w. \qquad (30)$$

Вычислив производные $\left.\dfrac{\partial W}{\partial B}\right|_s$, $\left.\dfrac{\partial W}{\partial L}\right|_s$, найдем по формулам (4) составляющие уклонения отвеса $\xi$ и $\eta$.

Займемся сначала преобразованием правой части формулы (30), а потом уже обратимся к формулам для уклонений отвеса.

Выделим в $T$ главную часть $T_0$

$$T=T_0+\sum_{n=1}^{\infty}T_n,$$

где

$$T_0=\frac{a}{4\pi}\int G_0S(\psi)\,d\sigma-\frac{a}{4\pi}\int G_0\,d\sigma+X_1(B,\ L),$$

а вместо $V_0$ и $\Omega$ подставим их выражения согласно (21) и (16). Кроме того, введем обозначение

$$\Delta g = g + \frac{2}{a}\int g dh_w - g_e\Big[1+\beta\sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B + \frac{H}{a}(15q-6\beta-2\alpha)\sin^2 B + + \frac{H}{a}\Big(\frac{H}{a} - 7q + 2\beta\Big)\Big]. \tag{31}$$

Следовательно,

$$G_0 = \Delta g - \frac{2}{a}(W_0 - U_0'),$$

$$T_0 = \frac{a}{4\pi}\int \Delta g S(\psi)\, d\sigma - \frac{a}{4\pi}\int \Delta g d\sigma + 2(W_0 - U_0') + X_1(B,\ L).$$

Формулу (30) тогда можно будет представить в таком виде

$$gh = \frac{a}{4\pi}\int \Delta g S(\psi)\, d\sigma - \frac{a}{4\pi}\int \Delta g d\sigma + 2(W_0 - U_0') + X_1(B,\ L) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n +$$
$$+ \frac{P}{a}\Big(\frac{1}{2}e^2\sin^2 B - \frac{1}{2}e^4\sin^2 B + \frac{7}{8}e^4\sin^4 B - \frac{H}{a} + \frac{H^2}{a^2} - \frac{H}{a}e^2\sin^2 B\Big) +$$
$$+ \frac{Q}{a^3}\Big(\frac{3}{2}e^2\sin^2 B - 3\frac{H}{a}\Big)(1 - 3\sin^2\Phi) + \frac{R}{a^5}(-30\sin^2\Phi + 35\sin^4\Phi) +$$
$$+ \frac{\omega^2 a^2}{2}\Big(e^2\sin^2 B + 2\frac{H}{a}\Big) - \frac{\omega^2 a^2}{2}\Big(1 + e^2\sin^2 B + 2\frac{H}{a}\Big)\sin^2 B +$$
$$+ \Big(\frac{P}{a} + \frac{Q}{a^3} + \frac{3R}{a^5} + \frac{\omega^2 a^2}{2}\Big) - W_0 + \int g dh_w.$$

Воспользовавшись зависимостями

$$\sin^2\Phi = \sin^2 B - 4\alpha\sin^2 B + 4\alpha\sin^4 B + \mathrm{II},$$
$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2, \quad e^4 = 4\alpha^2 + \mathrm{III}$$

и принимая во внимание обозначения

$$q = \frac{\omega^2 a}{g_e}, \quad U_0' = \frac{P}{a} + \frac{Q}{a^3} + \frac{3R}{a^5} + \frac{\omega^2 a^2}{2},$$

получим с точностью до членов второго порядка малости

$$gh = \frac{a}{4\pi}\int \Delta g S(\psi)\, d\sigma - \frac{a}{4\pi}\int \Delta g d\sigma + W_0 - U_0' + X_1(B,\ L) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n +$$
$$+ \frac{P}{a}\Big(\alpha\sin^2 B - \frac{5}{2}\alpha^2\sin^2 B + \frac{7}{2}\alpha^2\sin^4 B - \frac{H}{a} + \frac{H^2}{a^2} - 2\frac{H}{a}\alpha\sin^2 B\Big) +$$
$$+ \frac{Q}{a^3}\Big(15\alpha\sin^2 B - 3\sin^2 B - 21\alpha\sin^4 B - 3\frac{H}{a} + 9\frac{H}{a}\sin^2 B\Big) +$$
$$+ \frac{R}{a^5}(-30\sin^2 B + 35\sin^4 B) + g_e a\Big(\alpha q\sin^2 B - \frac{1}{2}q\sin^2 B - \alpha q\sin^4 B +$$
$$+ \frac{H}{a}q - \frac{H}{a}q\sin^2 B\Big) + \int g dh_w.$$

Подставив сюда вместо $U_0'$, $P$, $Q$, $R$ их выражения через $g_e$, $\beta$ и $\beta_1$ согласно формулам (25) и (24), и сгруппировав затем члены относительно $\sin^2 B$, $\sin^4 B$, получим с прежней точностью

$$gh = \frac{a}{4\pi}\int \Delta g S(\psi)\, d\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} T_n + \int g dh_w -$$
$$- g_e H\left[1 - \frac{H}{a} - (5q - 3\beta - 2\alpha)\sin^2 B\right] + g_e\left[a\left(-1 - \frac{2}{3}\beta - \frac{1}{6}q + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{4}{105}\alpha^2 - \frac{2}{21}\alpha q - \frac{4}{15}\alpha\beta + \frac{88}{105}\beta_1 - \frac{1}{4\pi g_e}\int \Delta g d\sigma\right) + \frac{W_0}{g_e}\right] +$$
$$+ g_e a\left(\alpha + \beta - \frac{5}{2}q - \frac{31}{14}\alpha^2 + \frac{51}{7}\alpha q - 2\alpha\beta - \frac{12}{7}\beta_1\right)\sin^2 B +$$
$$+ g_e a\left(\frac{7}{3}\alpha\beta - \frac{20}{3}\alpha q + \frac{5}{2}\alpha^2 + \frac{4}{3}\beta_1\right)\sin^4 B + X_1(B, L). \qquad (32)$$

Введем обозначения

$$\mathrm{A} = a\left(\alpha + \beta - \frac{5}{2}q - \frac{31}{14}\alpha^2 + \frac{51}{7}\alpha q - 2\alpha\beta - \frac{12}{7}\beta_1\right),$$
$$\mathrm{B} = a\left(\frac{7}{3}\alpha\beta - \frac{20}{3}\alpha q + \frac{5}{2}\alpha^2 + \frac{4}{3}\beta_1\right), \qquad (33)$$
$$h_0 = a\left(-1 - \frac{2}{3}\beta - \frac{1}{6}q + \frac{4}{105}\alpha^2 - \frac{2}{21}\alpha q - \frac{4}{15}\alpha\beta + \right.$$
$$\left. + \frac{88}{105}\beta_1 - \frac{1}{4\pi g_e}\int \Delta g d\sigma\right) + \frac{W_0}{g_e}.$$

Примем, кроме того, во внимание, что

$$\alpha + \beta - \frac{5}{2}q = \mu \qquad (34)$$

есть величина второго порядка малости (такой порядок имеет величина A), а потому в формуле (32) в четвертом члене справа, допуская погрешность порядка $g_e H\mu$, можно сделать замену

$$5q - 3\beta - 2\alpha \approx -\beta.$$

Формула (32) тогда примет следующий окончательный вид:

$$gh = \frac{a}{4\pi}\int \Delta g S(\psi)\, d\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} T_n + \int g dh_w - g_e H\left(1 - \frac{H}{a} + \beta\sin^2 B\right) +$$
$$+ g_e \mathrm{A}\sin^2 B + g_e \mathrm{B}\sin^4 B + g_e h_0 + X_1(B, L). \qquad (35)$$

Здесь $\Delta g$ выражается формулой (31), которую с принятой точностью можно записать так:

$$\Delta g = g + \frac{2}{a}\int g dh_w - g_e\left[1 + \beta\sin^2 B - \beta_1\sin^2 2B + \right.$$
$$\left. + \frac{H}{a}\left(\frac{H}{a} - 2q - 2\alpha + 4\alpha\sin^2 B\right)\right], \qquad (36)$$

если снова принять во внимание, что $\alpha+\beta-\frac{5}{2}q=\mu$ — величина второго порядка малости.

Формула (35) определяет высоты точек физической поверхности Земли относительно вспомогательной поверхности $S$, полученной откладыванием от неуровенного отсчетного эллипсоида $S_0$ системы высот $H$, не связанной с каким-либо нормальным полем. В нее входят четыре постоянные, для определения которых необходимы градусные измерения. Три постоянные являются коэффициентами в общем выражении для сферической функции первого порядка $X_1(B, L)$, а четвертая входит в выражение для $h_0$, — это неизвестное значение потенциала силы тяжести Земли на уровне моря $W_0$.

Допуская погрешность третьего порядка, в формулах (35) и (36) геодезические координаты $B$, $L$ можно заменить геоцентрическими $\Phi$, $L$ или астрономическими $\varphi$, $\lambda$

Из формулы (35), как частные случаи, можно получить формулу Н. К. Мигаля [4], определяющую высоты внешней уровенной поверхности планеты относительно неуровенного отсчетного эллипсоида вращения, и формулу М. С. Молоденского для высот квазигеоида относительно эллипсоида вращения, поверхность которого является уровенной.

1. Определяемая внешняя поверхность планеты уровенная.

В этом случае

$$H=0, \qquad \int g dh_w=0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} T_n=0,$$
$$\Delta g=g-g_e(1+\beta\sin^2 B-\beta_1\sin^2 2B) \tag{37}$$

и формула (35) принимает вид

$$gh=\frac{a}{4\pi}\int \Delta g S(\psi)\,d\sigma+g_e\mathrm{A}\sin^2 B+g_e\mathrm{B}\sin^4 B+g_e h_0+X_1(B, L)$$

или с погрешностью порядка $h\dfrac{g-g_e}{g_e}$

$$h=\frac{a}{4\pi g_e}\int \Delta g S(\psi)\,d\sigma+\mathrm{A}\sin^2 B+\mathrm{B}\sin^4 B+h_0+\frac{1}{g_e}X_1(B, L), \tag{38}$$

где $\Delta g$ определяется выражением (37).

Подобная формула получена несколько иным путем Н. К. Мигалем [3]. При сопоставлении выражений (33) для величин А, В и $h_0$ с соответствующими выражениями в работе Н. К. Мигаля нужно принять во внимание, что $\mu=\alpha+\beta-\frac{5}{2}q$ — величина второго порядка.

2. Отсчетная поверхность — уровенный эллипсоид вращения. Система вспомогательных высот $H$ произвольна в смысле, указанном в начале статьи.

Пусть приближенный потенциал $V_0$ есть с точностью до малых величин второго порядка потенциал притяжения уровенного эллипсоида, вращающегося вокруг полярной оси с угловой скоростью $\omega$, поверхность которого совпадает с отсчетной поверхностью $a$, $\alpha$ $(S_0)$. Тогда $V_0+\Omega=U$ есть потенциал нормальной силы тяжести (нормальный потенциал). Значение нормального потенциала на отсчетной поверхности обозначим через $U_0$. Примем, далее, что ускорение нормальной силы тяжести $\gamma$ на экваторе уровенного эллипсоида равно выбранной нами постоянной $g_e$, тогда, как известно из решения проблемы Стокса для уровенного эллипсоида вращения,

$$U_0=g_e a\left(1-\frac{2}{3}\alpha+\frac{11}{6}q-\frac{4}{7}\alpha^2-\frac{1}{5}\right). \tag{39}$$

На отсчетной поверхности имеем

$$(V_0+\Omega)_{H=0}=U_0=\text{const}.$$

или, принимая во внимание (16) и (21),

$$\frac{P}{a}\left(1+\frac{1}{2}e^2\sin^2 B-\frac{1}{2}e^4\sin^2 B+\frac{7}{8}e^4\sin^4 B\right)+$$

$$+\frac{Q}{a^3}\left(1+\frac{3}{2}e^2\sin^2 B\right)(1-3\sin^2\Phi)+\frac{R}{a^5}(3-30\sin^2\Phi+35\sin^4\Phi)+$$

$$+\frac{\omega^2a^2}{2}(1+e^2\sin^2 B)\cos^2 B=U_0=\text{const}.$$

Переходя от геоцентрической широты $\Phi$ к геодезической $B$, от эксцентриситета $e$ к сжатию $\alpha$, а также используя выражение (39) и обозначение $q=\dfrac{\omega^2 a}{g_e}$, получим

$$\frac{P}{a}+\frac{Q}{a^3}+\frac{3R}{a^5}+\frac{1}{2}g_e aq+\left[\frac{P}{a}\alpha-\frac{5}{2}\frac{P}{a}\alpha^2-3\frac{Q}{a^3}+15\frac{Q}{a^3}\alpha-30\frac{R}{a^5}+\right.$$

$$\left.+g_e a\left(\alpha q-\frac{1}{2}q\right)\right]\sin^2 B+\left(\frac{7}{2}\frac{P}{a}\alpha^2-21\frac{Q}{a^3}\alpha+35\frac{R}{a^5}-g_e a\alpha q\right)\sin^4 B=$$

$$=g_e a\left(1-\frac{2}{3}\alpha+\frac{11}{6}q-\frac{4}{7}\alpha q-\frac{1}{5}\alpha^2\right).$$

Отсюда имеем три уравнения, связывающие $P$, $Q$, $R$, решение которых определит эти величины в функции $g_e$, $a$, $\alpha$, $\omega$.

$$\frac{P}{a}+\frac{Q}{a^3}+\frac{3R}{a^5}+\frac{1}{2}g_e aq=g_e a\left(1-\frac{2}{3}\alpha+\frac{11}{6}q-\frac{4}{7}\alpha q-\frac{1}{5}\alpha^2\right),$$

$$\frac{P}{a}\alpha-\frac{5}{2}\frac{P}{a}\alpha^2-3\frac{Q}{a^3}+15\frac{Q}{a^3}\alpha-30\frac{R}{a^5}+g_e a\left(\alpha q-\frac{1}{2}q\right)=0,$$

$$\frac{7}{2}\frac{P}{a}\alpha^2-21\frac{Q}{a^3}\alpha+35\frac{R}{a^5}-g_e a\alpha q=0.$$

Решив полученные уравнения, определим с точностью до малых величин второго порядка

$$P=g_e a^2\left(1-\alpha+\frac{3}{2}q-\frac{15}{14}\alpha q\right),$$

$$Q=g_e a^4\left(\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{6}q-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{5}{7}\alpha q\right), \tag{40}$$

$$R=g_e a^6\left(\frac{1}{10}\alpha^2-\frac{1}{14}\alpha q\right).$$

Величины $\beta$ и $\beta_1$ в данном случае не могут быть произвольными. Они, так же, как и $P$, $Q$, $R$, являются функциями $g_e$, $a$, $\alpha$, $\omega$. Подставив значения $P$, $Q$, $R$, определяемые формулами (40), в формулы (23), придем к соотношениям

$$\beta = \frac{5}{2} q - \alpha - \frac{17}{14} \alpha q,$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{8} \alpha^2 + \frac{5}{8} \alpha q. \qquad (41)$$

Из формул (41) и теории уровенного эллипсоида следует, что в рассматриваемом случае величины $\beta$ и $\beta_1$ имеют смысл коэффициентов в формуле распределения нормальной силы тяжести $\gamma$ на отсчетном эллипсоиде $S_0$.

$$\gamma = g_e (1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B). \qquad (42)$$

С относительной ошибкой порядка $\frac{H}{a}\beta_1$, $\frac{H^2}{a^2}\beta$, $\frac{H^3}{a^3}$ значения нормального потенциала $U$ и ускорения $\gamma$ нормальной силы тяжести на высоте $H$ могут быть представлены следующими выражениями

$$U(H) = U_0 - g_e H \left(1 - \frac{H}{a} + \beta \sin^2 B\right), \qquad (43)$$

$$\gamma(H) = g_e \left[1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B - (2\beta - 4\alpha) \frac{H}{a} \sin^2 B - \right.$$
$$\left. - 2(1 + \alpha + q) \frac{H}{a} + 3 \frac{H^2}{a^2}\right]. \qquad (44)$$

Формулы (43) и (44) нетрудно получить путем разложения в ряды по степеням $H$ потенциала $U$ и силы тяжести $\gamma$ с использованием (42) и известной формулы Брунса

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} = -\gamma \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) - 2\omega^2.$$

Итак, если отсчетная поверхность $S_0$ — уровенный эллипсоид, создающий потенциал $V_0 + \Omega = U$, то, принимая во внимание (39), (41) и (43), в формуле (35) будем иметь

$$A = 0, \quad B = 0, \quad g_e h_0 = -U_0 + W_0 - \frac{a}{4\pi} \int \Delta g d\sigma, \quad U'_0 = U_0,$$

и она примет вид

$$gh = \frac{a}{4\pi} \int \Delta g [S(\psi) - 1] d\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} T_n + \left[U(H) - U_0 + \int g dh_w\right] +$$
$$+ (W_0 - U_0) + X_1(B, L), \qquad (45)$$

где $\Delta g$ выражается формулой (36)

$$\Delta g = g + \frac{2}{a} \int g dh_w - g_e \left[1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B + \right.$$
$$\left. + \frac{H}{a} \left(\frac{H}{a} - 2q - 2\alpha + 4\alpha \sin^2 B\right)\right].$$

Напомним, что в рассматриваемом случае система высот $H$ не связана с параметрами нормального поля.

3. Отсчетная поверхность, как и в пункте 2, — уровенный эллипсоид вращения. Система высот $H$ установлена как система нормальных высот.

Нормальные высоты, как известно, определяются из условия

$$\int g dh_w - U_0 + U(H) = 0. \tag{46}$$

В этом случае, принимая во внимание (43), получаем

$$\frac{2}{a}\int g dh_w - g_e \frac{H}{a}\left(\frac{H}{a} - 2q - 2\alpha + 4\alpha \sin^2 B\right) =$$

$$= \frac{2}{a}\left[g_e H\left(1 - \frac{H}{a} + \beta \sin^2 B\right)\right] - g_e \frac{H}{a}\left(\frac{H}{a} - 2q - 2\alpha + 4\alpha \sin^2 B\right) =$$

$$= g_e\left[2(1+q+\alpha)\frac{H}{a} + (2\beta - 4\alpha)\frac{H}{a}\sin^2 B - 3\frac{H^2}{a^2}\right].$$

Следовательно,

$$\Delta g = g - g_e\left[1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B - 2(1+\alpha+q)\frac{H}{a} - \right.$$
$$\left. - (2\beta - 4\alpha)\frac{H}{a}\sin^2 B - 3\frac{H^2}{a^2}\right]$$

или, в соответствии с (44),

$$\Delta g = g - \gamma(H).$$

Формула (35) превращается в формулу М. С. Молоденского, определяющую высоты квазигеоида

$$gh = \frac{a}{4\pi}\int [g - \gamma(H)][S(\psi) - 1]\, d\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} T_n + (W_0 - U_0) + X_1(B, L).$$

Обратимся теперь к формулам (4), определяющим составляющие уклонения отвеса. Найдем выражение для производной $\frac{\partial W}{\partial B}$. Для точек поверхности $S$ имеем

$$W = T + V_0 + \Omega. \tag{47}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial W}{\partial B} = \frac{\partial T}{\partial B} + \frac{\partial (V_0 + \Omega)}{\partial B}. \tag{48}$$

Потенциал $T$, входящий в правую часть формулы (47), определяется формулами (29) только на вспомогательной поверхности $S$, т. е. в этих формулах $H = H(B, L)$. Поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial B} = \frac{dT}{dB} - \frac{\partial T}{\partial H}\frac{dH}{dB}. \tag{49}$$

Здесь нужно обратить внимание на следующее. Если при определении потенциала $T$ выполнялось сглаживание поверхности, для которой составлено граничное условие (26) (что непременно имеет место при решении задачи по М. С. Молоденскому), то в формулах (29) высоты $H$ в выражениях для $G_1$, $G_2$, ..., $\chi_1$, $\chi_2$,... относятся к точкам сглаженной поверхности, и производная $\frac{dH}{dB}$ в (49) характеризует наклоны именно этой сглаженной поверхности. Рассматриваемый нами путь решения задачи позволяет сразу выбрать систему высот $H$ так, чтобы поверхность $S$ не имела углов наклона, превышающих 45°. Тогда во всех без исключения формулах величины $H$ будут относиться только к поверхности $S$.

Производную $\frac{\partial T}{\partial H}$ найдем следующим образом. Дифференцируем (47) по $H$

$$\frac{\partial T}{\partial H}=\frac{\partial W}{\partial H}-\frac{\partial (V_0+\Omega)}{\partial H}. \qquad (50)$$

Производная $\frac{\partial W}{\partial H}=\frac{\partial W}{\partial \nu}$ определится из граничного условия (8) для $W$

$$\frac{\partial W}{\partial H}=-g+\frac{2}{a}\left(W_0-\int g dh_w-W\right),$$

которое с учетом (3) даст нам для точек поверхности $S$

$$\frac{\partial W}{\partial H}=-g\left(1+\frac{2h}{a}\right). \qquad (51)$$

Теперь, используя выражения (48), (49), (50) и (51), получаем

$$\frac{\partial W}{\partial B}=\frac{dT}{dB}+\left[g\left(1+\frac{2h}{a}\right)+\frac{\partial (V_0+\Omega)}{\partial H}\right]\frac{dH}{dB}+\frac{\partial (V_0+\Omega)}{\partial B}. \qquad (52)$$

Представим выражение $V_0+\Omega$ в виде разложения в ряд по степеням $H$. Опуская довольно громоздкие выкладки, напишем сразу результат

$$V_0+\Omega=g_e\mathrm{A}\sin^2 B+g_e\mathrm{B}\sin^4 B+U_0'-g_eH\left[1+\left(2\alpha-5q+3\beta+\frac{4}{7}\alpha^2+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{26}{21}\alpha q+\frac{2}{3}\alpha\beta-\frac{16}{21}\beta_1\right)\sin^2 B-\left(\frac{10}{3}\alpha q-\frac{5}{4}\alpha^2-\frac{7}{6}\alpha\beta-\frac{5}{3}\beta_1\right)\sin^2 2B+$$

$$\left.+\frac{H}{a}\left(\frac{25}{2}q-6\beta-3\alpha\right)\sin^2 B-\frac{H}{a}\left(1+\frac{7}{2}q-\beta\right)+\frac{H^2}{a^2}\right]. \qquad (53)$$

Мы должны были удержать здесь члены третьего порядка малости вида $H^2\beta$, $H\beta_1$, $H^3$, $H^2\alpha$ и т. д., так как при дифференцировании по $H$, которое придется сейчас выполнить, они превращаются в члены второго порядка малости.

Дифференцируя (53) по $H$ и $B$, получаем с погрешностью третьего порядка

$$\frac{\partial (V_0+\Omega)}{\partial H}=-g_e\left[1+\left(2\alpha-5q+3\beta+\frac{4}{7}\alpha^2+\frac{26}{21}\alpha q+\frac{2}{3}\alpha\beta-\frac{16}{21}\beta_1\right)\sin^2 B-\right.$$

$$-\left(\frac{10}{3}\alpha q-\frac{5}{4}\alpha^2-\frac{7}{6}\alpha\beta-\frac{5}{3}\beta_1\right)\sin^2 2B+$$

$$\left.+2\frac{H}{a}\left(\frac{25}{2}q-6\beta-3\alpha\right)\sin^2 B-2\frac{H}{a}\left(1+\frac{7}{2}q-\beta\right)+3\frac{H^2}{a^2}\right], \qquad (54)$$

$$\frac{\partial (V_0+\Omega)}{\partial B}=g_e\mathrm{A}\sin 2B+4g_e\mathrm{B}\sin^3 B\cos B-g_eH(2\alpha-5q+3\beta)\sin 2B.$$

Последнюю формулу, принимая во внимание обозначение $\mu=\alpha+\beta-\frac{5}{2}q$ и порядок величины $\mu$, напишем так

$$\frac{\partial (V_0+\Omega)}{\partial B}=g_e\mathrm{A}\sin 2B+4g_e\mathrm{B}\sin^3 B\cos B-g_eH\beta\sin 2B.$$

Теперь формула (52) примет вид

$$\frac{\partial W}{\partial B}=\frac{d}{dB}\left(\frac{a}{4\pi}\int\Delta gS(\psi)\,d\sigma+\sum_{n=1}^{\infty}T_n\right)+g_e\mathrm{A}\sin 2B+4g_e\mathrm{B}\sin^3 B\cos B-$$
$$-g_eH\beta\sin 2B+\frac{\partial X_1(B,\ L)}{\partial B}+\left\{g\left(1+\frac{2h}{a}\right)-g_e\left[1+\left(2\alpha-5q+3\beta+\right.\right.\right.$$
$$\left.+\frac{4}{7}\alpha^2+\frac{26}{21}\alpha q+\frac{2}{3}\alpha\beta-\frac{16}{21}\beta_1\right)\sin^2 B-\left(\frac{10}{3}\alpha q-\frac{5}{4}\alpha^2-\frac{7}{6}\alpha\beta-\frac{5}{3}\beta_1\right)\times$$
$$\left.\left.\times\sin^2 2B+2\frac{H}{a}\left(\frac{25}{2}q-6\beta-3\alpha\right)\sin^2 B-2\frac{H}{a}\left(1+\frac{7}{2}q-\beta\right)+3\frac{H^2}{a^2}\right]\right\}\frac{dH}{dB},$$

если еще выделить в $T$ главный член $T_0$

$$T=T_0+\sum_{n=1}^{\infty}T_n,$$

$$T_0=\frac{a}{4\pi}\int\Delta gS(\psi)\,d\sigma-\frac{a}{4\pi}\int\Delta g\,d\sigma+2(W_0-U_0')+X_1(B,\ L).$$

Следовательно, с принятой точностью

$$\xi=-\frac{1}{ga}\frac{\partial W}{\partial B}=-\frac{1}{g_ea}\frac{d}{dB}\left(\frac{a}{4\pi}\int\Delta gS(\psi)\,d\sigma+\sum_{n=1}^{\infty}T_n\right)-$$
$$-\frac{\mathrm{A}}{a}\sin 2B-4\frac{\mathrm{B}}{a}\sin^3 B\cos B+\frac{H\beta}{a}\sin 2B-\frac{1}{g_e}\left\{g\left(1+\frac{2h}{a}\right)-\right.$$
$$-g_e\left[1+\left(2\alpha-5q+3\beta+\frac{4}{7}\alpha^2+\frac{26}{21}\alpha q+\frac{2}{3}\alpha\beta-\frac{16}{21}\beta_1\right)\sin^2 B-\right.$$
$$-\left(\frac{10}{3}\alpha q-\frac{5}{4}\alpha^2-\frac{7}{6}\alpha\beta-\frac{5}{3}\beta_1\right)\sin^2 2B+2\frac{H}{a}\left(\frac{25}{2}q-6\beta-3\alpha\right)\sin^2 B-$$
$$\left.\left.-2\frac{H}{a}\left(1+\frac{7}{2}q-\beta\right)+3\frac{H^2}{a^2}\right]\right\}\frac{dH}{adB}-\frac{1}{g_e}\frac{\partial X_1(B,\ L)}{a\partial B},\qquad(55)$$

где $\Delta g$ выражается формулой (36).

Подобным же путем нетрудно получить и выражение для долготной компоненты

$$\eta=-\frac{1}{ga\cos B}\frac{\partial W}{\partial L}=-\frac{\sec B}{g_ea}\frac{d}{dL}\left(\frac{a}{4\pi}\int\Delta gS(\psi)\,d\sigma+\sum_{n=1}^{\infty}T_n\right)-$$
$$-\frac{1}{g_e}\left\{g\left(1+\frac{2h}{a}\right)-g_e\left[1+\left(2\alpha-5q+3\beta+\frac{4}{7}\alpha^2+\frac{26}{21}\alpha q+\frac{2}{3}\alpha\beta-\frac{16}{21}\beta_1\right)\times\right.\right.$$

$$\times \sin^2 B - \left(\frac{10}{3}\alpha q - \frac{5}{4}\alpha^2 - \frac{7}{6}\alpha\beta - \frac{5}{3}\beta_1\right)\sin^2 2B + 2\frac{H}{a}\left(\frac{25}{2}q - 6\beta - 3\alpha\right)\times$$

$$\times \sin^2 B - 2\frac{H}{a}\left(1 + \frac{7}{2}q - \beta\right) + 3\frac{H^2}{a^2}\Bigg]\Bigg\} \sec B \frac{dH}{a dL} - \frac{\sec B}{g_e}\frac{\partial X_1(B, L)}{a\partial L}. \quad (56)$$

Заметим, что производную $\frac{\partial(V_0+\Omega)}{\partial H}$ можно получить с требуемой точностью и не удерживая где-либо в промежуточных выкладках члены третьего порядка малости, содержащие $H$. Для этого необходимо сначала выполнить дифференцирование по нормали $\nu$ к отсчетной поверхности выражения для $V_0+\Omega$, заданного в функции геоцентрических координат $\rho$, $\Phi$, $L$, и только после этого, если необходимо, применять разложение в ряд по степеням $H$.

В заключение рассмотрим те же частные случаи, что и для формулы (35).

1. Определяемая внешняя поверхность планеты уровенная. В этом случае

$$H=0, \quad \frac{dH}{dB} = \frac{dH}{dL} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_n = 0,$$

$$\xi = -\frac{1}{4\pi g_e}\int \Delta g \frac{dS(\psi)}{dB} d\sigma - \frac{\mathrm{A}}{a}\sin 2B - 4\frac{\mathrm{B}}{a}\sin^3 B\cos B - \frac{1}{g_e}\frac{\partial X_1(B, L)}{a\partial B},$$

$$\eta = -\frac{\sec B}{4\pi g_e}\int \Delta g \frac{dS(\psi)}{dL} d\sigma - \frac{\sec B}{g_e}\frac{\partial X_1(B, L)}{a\partial L}, \quad (57)$$

где

$$\Delta g = g_e[1 + \beta\sin^2 B - \beta_1\sin^2 2B].$$

Мы получили формулы Н. К. Мигаля [5].

2. Отсчетная поверхность — уровенный эллипсоид. Параметры, определяющие нормальный потенциал: $g$ , $a$, $\alpha$, $\omega$. Вспомогательные высоты $H$ не связываются с нормальным полем.

В этом случае

$$\beta = \frac{5}{2}q - \alpha - \frac{17}{14}\alpha q,$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{5}{8}\alpha q,$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = 0.$$

С погрешностью третьего порядка малости в формулах (55) и (56) можно принять

$$1 + \frac{7}{2}q - \beta \approx 1 + q + \alpha,$$

$$2\alpha - 5q + 3\beta + \frac{4}{7}\alpha^2 + \frac{26}{21}\alpha q + \frac{2}{3}\alpha\beta - \frac{16}{21}\beta_1 \approx \beta,$$

$$\frac{10}{3}\alpha q - \frac{5}{4}\alpha^2 - \frac{7}{6}\alpha\beta - \frac{5}{3}\beta_1 \approx \frac{1}{8}\alpha^2 - \frac{5}{8}\alpha q = -\beta_1,$$

$$\frac{25}{2}q - 6\beta - 3\alpha = \left(\frac{25}{2}q - 5\beta - 5\alpha\right) - \beta + 2\alpha \approx -\beta + 2\alpha.$$

Член в фигурных скобках в указанных формулах принимает вид

$$g\left(1+\frac{2h}{a}\right)-g_e\left[1+\beta\sin^2 B-\beta_1\sin^2 2B-(2\beta-4\alpha)\frac{H}{a}\sin^2 B-\right.$$

$$\left.-2(1+q+\alpha)\frac{H}{a}+3\frac{H^2}{a^2}\right]=g\left(1+\frac{2h}{a}\right)-\gamma(H),$$

где, в соответствии с (44), $\gamma(H)$ — нормальное ускорение силы тяжести на высоте $H$.

Следовательно,

$$\xi=-\frac{1}{g_e a}\frac{d}{dB}\left(\frac{a}{4\pi}\int\Delta g S(\psi)\,d\sigma+\sum_{n=1}^{\infty}T_n\right)+\frac{H\beta}{a}\sin 2B-$$

$$-\frac{1}{g_e}\left[g\left(1+\frac{2h}{a}\right)-\gamma(H)\right]\frac{dH}{adB}-\frac{1}{g_e}\frac{\partial X_1(B,\ L)}{a\partial B},$$

$$\eta=-\frac{\sec B}{g_e a}\frac{d}{dL}\left(\frac{a}{4\pi}\int\Delta g S(\psi)\,d\sigma+\sum_{n=1}^{\infty}T_n\right)-\frac{1}{g_e}\left[g\left(1+\frac{2h}{a}\right)-\right.$$

$$\left.-\gamma(H)\right]\sec B\frac{dH}{adL}-\frac{\sec B}{g_e}\frac{\partial X_1(B,\ L)}{a\partial L}, \tag{58}$$

где

$$\Delta g=g+\frac{2}{a}\int g\,dh_w-g_e\left[1+\beta\sin^2 B-\beta_1\sin^2 2B+\right.$$

$$\left.+\frac{H}{a}\left(\frac{H}{a}-2q-2\alpha+4\alpha\sin^2 B\right)\right].$$

3. Отсчетная поверхность — уровенный эллипсоид. Высоты $H$ — нормальные высоты.

Имеем

$$\int g\,dh_w-U_0+U(H)=0,$$

$$W=T+V_0+\Omega=T+U(H),$$

$$gh=W-W_0+\int g\,dh_w=W-W_0+U_0-U(H)=T-(W_0-U_0),$$

$$\frac{2gh}{a}=\frac{2T}{a}-\frac{2(W_0-U_0)}{a}.$$

Формулы (58) принимают вид

$$\xi=-\frac{1}{g_e a}\frac{d}{dB}\left(\frac{a}{4\pi}\int\Delta g S(\psi)\,d\sigma+\sum_{n=1}^{\infty}T_n\right)+\frac{H\beta}{a}\sin 2B-$$

$$-\frac{1}{g_e}\left[g-\gamma(H)+\frac{2T}{a}-\frac{2(W_0-U_0)}{a}\right]\frac{dH}{adB}-\frac{1}{g_e}\frac{\partial X_1(B,\ L)}{a\partial B},$$

$$\eta=-\frac{\sec B}{g_e a}\frac{d}{dL}\left(\frac{a}{4\pi}\int\Delta g S(\psi)\,d\sigma+\sum_{n=1}^{\infty}T_n\right)-\frac{1}{g_e}\left[g-\gamma(H)+\right.$$

$$\left.+\frac{2T}{a}-\frac{2(W_0-U_0)}{a}\right]\sec B\frac{dH}{adL}-\frac{\sec B}{g_e}\frac{\partial X_1(B,\ L)}{a\partial L}, \tag{59}$$

где

$$\Delta g = g - \gamma(H).$$

Формулы (59) отличаются от формул М. С. Молоденского [2, 3] по существу только наличием члена $\frac{H\beta}{a}\sin 2B$. Этот член появился потому, что под уклонением отвеса мы понимаем угол в рассматриваемой точке между отвесной линией и нормалью к отсчетному эллипсоиду, а не между отвесной линией и силовой линией нормального поля. Указанный член выражает угол между нормалью к отсчетному эллипсоиду и силовой линией нормального поля.

Мы не приводим здесь выражений для производных

$$\frac{d}{dB}\left(\frac{a}{4\pi}\int \Delta g S(\psi)\, d\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} T_n\right) \text{ и } \frac{d}{dL}\left(\frac{a}{4\pi}\int \Delta g S(\psi)\, d\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} T_n\right).$$

Эти выражения можно написать по аналогии с соответствующими выражениями в работе [2]. Заметим только, что предварительно в формулах для потенциала $T$ (если использовать решение (29)) следует удержать члены третьего порядка малости, явно зависящие от $H$*. В выше упомянутой работе это не было сделано, вследствие чего в формулах для уклонений отвеса оказались потерянными некоторые члены второго порядка малости.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Н. К. Мигаль. Теория совместного определения фигуры и размеров Земли. Научные записки ЛПИ, серия геодезическая № 1, Львов, 1949.
2. М. С. Молоденский, В. Ф. Еремеев, М. И. Юркина. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Труды ЦНИИГАиК, вып. 131, М., 1960.
3. В. В. Бровар, В. А. Магницкий, Б. П. Шимберев. Теория фигуры Земли. Геодезиздат, М., 1961.
4. Н. К. Мигаль. К вопросу определения фигуры Земли без использования нормального гравитационного поля. Научные записки ЛПИ, серия геодезическая № 5, Львов, 1959.
5. Н. К. Мигаль. Относительно точности определения редукционных постоянных, высот геоида и отклонений отвеса. Научные записки ЛПИ серия геодезическая № 9, Львов, 1962.


---

* Впервые на это обратил внимание М. И. Марыч (см. сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 1. Примечание редактора).


Работа поступила
26 сентября 1964 г.