УДК 528.35

Б. П. КВАСНЮК

О СОСТАВЛЕНИИ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ В ТРИЛАТЕРАЦИИ

Прием, предложенный К. Н. Терпуговым и Ю. А. Гордеевым для составления типового условного уравнения [3], можно применить также для составления весовых функций в трилатерации. В частности, в качестве весовых функций служат формулы поправок координат, предложенные в работах [1 и 3].

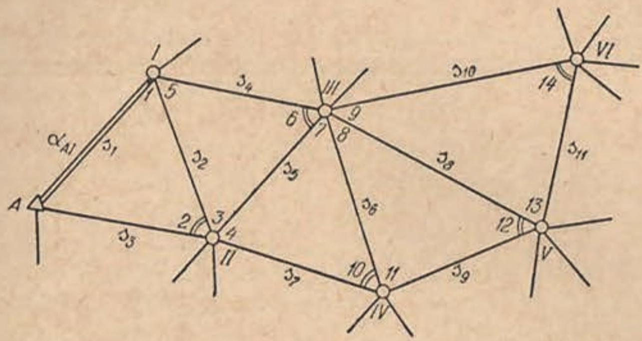

Рис. 1. Составление весовых функций.

Мы ставили задачу получения правил, которые позволили бы записать формулы поправок (весовые функции) координат любого пункта сети, исключая громоздкие выводы.

Пусть в сети трилатерации (рис. 1) A — исходный пункт, $\alpha_{A,I}$ — исходный дирекционный угол.

В [1] установлено, что δx_I, δy_I, δx_{II}, δy_{II} определяются формулами

$$\delta x_{\rm I} = \cos\alpha_{A,\rm I}\cdot v_1, \quad \delta y_{\rm I} = \sin\alpha_{A,\rm I}\cdot v_1; \tag{1}$$

$$\delta x_{\rm II} = \frac{\sin\alpha_{\rm I,II}}{\sin 2} v_3 - \frac{\sin\alpha_{A,\rm II}}{\sin 2} v_2 + \frac{\sin\alpha_{A,\rm II}}{\sin 2}\cos 1\cdot v_1,$$

$$\delta y_{\rm II} = -\frac{\cos\alpha_{\rm I,II}}{\sin 2} v_3 + \frac{\cos\alpha_{A,\rm II}}{\sin 2} v_2 - \frac{\cos\alpha_{A,\rm II}}{\sin 2}\cdot\cos 1\cdot v_1, \tag{2}$$

Для получения формул поправок координат любого пункта сети необходимо решать уравнения поправок сторон вида

$$v_j = \cos\alpha_{ik}\,\delta x_k + \sin\alpha_{ik}\,\delta y_k - \cos\alpha_{ik}\,\delta x_i - \sin\alpha_{ik}\,\delta y_i, \tag{3}$$

где v_j — поправка стороны s_j, соединяющей пункты i и k; α_{ik} — дирекционный угол направления; δx_i, δy_i, δx_k, δy_k — поправки координат пунктов i и k.

Так, решая уравнения поправок сторон s_4 и s_5 (рис. 1) с учетом (1) и (2), находим

$$\delta x_{\rm III} = a_5 v_5 - a_4 v_4 + a_3 v_3 - a_2 v_2 + [a_2\cos 1 + a_4\cos(1+5)]\cdot v_1,$$
$$\delta y_{\rm III} = -b_5 v_5 + b_4 v_4 - b_3 v_3 + b_2 v_2 - [b_2\cos 1 + b_4\cos(1+5)]\cdot v_1. \quad (4$$

Коэффициенты вычисляются:

$$
\begin{gathered}
a_5 = \frac{\sin \alpha_{\mathrm{I, III}}}{\sin 6}, \quad a_4 = \frac{\sin \alpha_{\mathrm{II, III}}}{\sin 6}; \\
a_3 = T_{3-5}\, a_5, \quad a_2 = T_{2-5}\, a_5; \\
b_5 = \frac{\cos \alpha_{\mathrm{I, III}}}{\sin 6}, \quad b_4 = \frac{\cos \alpha_{\mathrm{II, III}}}{\sin 6}; \\
b_3 = T_{3-5}\, b_5, \quad b_2 = T_{2-5}\, b_5,
\end{gathered} \tag{5}
$$

где

$$
T_{3-5} = \frac{\sin 3}{\sin 2}, \quad T_{2-5} = \frac{\sin (2+3)}{\sin 2}. \tag{6}
$$

Через T_{j-m} и $T_{(j-1)-m}$ в формулах коэффициентов при поправках сторон s_j и s_{j-1}, необходимых для вычисления приближенных координат

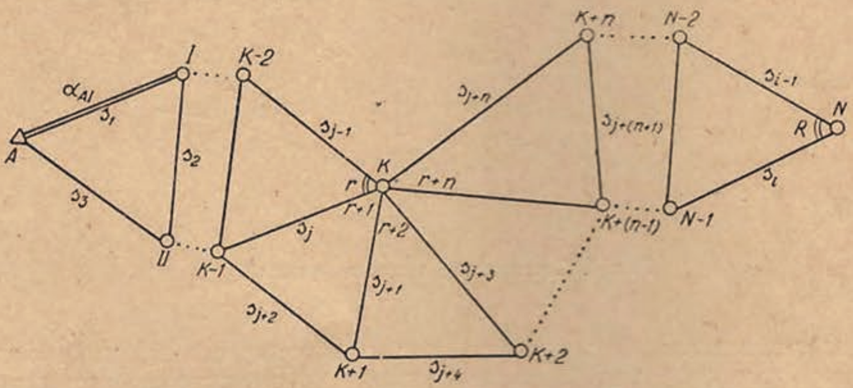

Рис. 2. Образование коэффициентов.

пункта K (рис. 2) от исходного A, будем в дальнейшем обозначать величины, которые вычисляются так:

$$
\begin{gathered}
T_{j-(j+1)} = \frac{\sin [r + (r+1)]}{\sin r}, \\
T_{j-(j+3)} = \frac{\sin [r + (r+1) + (r+2)]}{\sin r}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
T_{j-(j+n)} = \frac{\sin [r + (r+1) + (r+2) + \cdots + (r+n)]}{\sin r}.
\end{gathered} \tag{7а}
$$

$$
\begin{gathered}
T_{(j-1)-(j+1)} = \frac{\sin (r+1)}{\sin r}, \\
T_{(j-1)-(j+3)} = \frac{\sin [(r+1) + (r+2)]}{\sin r}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
T_{(j-1)-(j+n)} = \frac{\sin [(r+1) + (r+2) + \cdots + (r+n)]}{\sin r}.
\end{gathered} \tag{7б}
$$

Решая уравнения поправок сторон s_6 и s_7 (рис. 1), находим

$$\delta x_{IV} = a_7 v_7 - a_6 v_6 + a_5 v_5 - a_4 v_4 + a_3 v_3 - a_2 v_2 + \\ + [a_2 \cos 1 + a_4 \cos (1+5)] v_1,$$

$$\delta y_{IV} = - b_7 v_7 + b_6 v_6 - b_5 v_5 + b_4 v_4 - b_3 v_3 + b_2 v_2 - \\ - [b_2 \cos 1 + b_4 \cos (1+5)] v_1, \qquad (8)$$

где

$$a_7 = \frac{\sin \alpha_{III,\,IV}}{\sin 10}, \quad a_6 = \frac{\sin \alpha_{II,\,IV}}{\sin 10};$$

$$a_5 = T_{5-6}\, a_6, \quad a_4 = T_{4-6}\, a_6;$$

$$a_3 = T_{3-5}\, a_5 + T_{3-7}\, a_7, \quad a_2 = T_{2-5}\, a_5 + T_{2-7}\, a_7; \qquad (9)$$

$$b_7 = \frac{\cos \alpha_{III,\,IV}}{\sin 10}, \quad b_6 = \frac{\cos \alpha_{II,\,IV}}{\sin 10};$$

$$b_5 = T_{5-6}\, b_6, \quad b_4 = T_{4-6}\, b_6;$$

$$b_3 = T_{3-5}\, b_5 + T_{3-7}\, b_7, \quad b_2 = T_{2-5}\, b_5 + T_{2-7}\, b_7.$$

Следует отметить, что в уравнениях (9) некоторые коэффициенты a и b с одинаковыми индексами (a_5 и b_5, a_4 и b_4, a_3 и b_3, a_2 и b_2) вычисляются по аналогичным формулам. Это дает нам возможность в дальнейшем приводить формулу для k_j, по которой вычисляются a_j и b_j.

Из решения уравнений поправок сторон s_8 и s_9, s_{10} и s_{11} получим сначала формулы для δx_V, δy_V, а затем и для δx_{VI}, δy_{VI}. Приводим последние

$$\delta x_{VI} = a_{11} v_{11} - a_{10} v_{10} + a_9 v_9 - a_8 v_8 + a_7 v_7 - a_6 v_6 + a_5 v_5 - a_4 v_4 + \\ + a_3 v_3 - a_2 v_2 + [a_2 \cos 1 + a_4 \cos (1+5)] v_1,$$

$$\delta y_{VI} = - b_{11} v_{11} + b_{10} v_{10} - b_9 v_9 + b_8 v_8 - a_7 v_7 + b_6 v_6 - b_5 v_5 + \\ + b_4 v_4 - b_3 v_3 + b_2 v_2 - [b_2 \cos 1 + b_4 \cos (1+5)] v_1. \qquad (10)$$

Коэффициенты a_{11}, b_{11} и a_{10}, b_{10} вычисляются по формулам:

$$a_{11} = \frac{\sin \alpha_{III,\,VI}}{\sin 14}, \quad b_{11} = \frac{\cos \alpha_{III,\,VI}}{\sin 14}, \quad a_{10} = \frac{\sin \alpha_{III,\,V}}{\sin 14}, \quad b_{10} = \frac{\cos \alpha_{III,\,V}}{\sin 14}. \qquad (11)$$

Формулы для вычисления остальных коэффициентов имеют вид

$$k_9 = T_{9-11}\, k_{11}; \quad k_8 = T_{8-11}\, k_{11};$$

$$k_7 = T_{7-9}\, k_9; \quad k_6 = T_{6-9}\, k_9;$$

$$k_5 = T_{5-6}\, k_6 + T_{5-8}\, k_8 + T_{5-10}\, k_{10}; \quad k_4 = T_{4-6}\, k_6 + T_{4-8}\, k_8 + T_{4-10}\, k_{10};$$

$$k_3 = T_{3-5}\, k_5 + T_{3-7}\, k_7; \quad k_2 = T_{2-5}\, k_5 + T_{2-7}\, k_7. \qquad (12)$$

Нетрудно заметить, что выражения (2), (4), (8) и (10) подчинены единым правилам.

В формулы поправок координат любого пункта входят поправки всех сторон цепи треугольников, соединяющей этот пункт с исходным пунктом A и дирекционным углом $\alpha_{A,I}$.

Знаки коэффициентов при поправках двух сторон s_j и s_{j-1}, необходимых для вычисления координат k-го пункта цепи треугольников от исходного A и образующих между собой угол (на рис. 1 — углы 2, 6, 10, 12, 14), распределяются так: в формулах для вычисления δx_k при поправке стороны s_j, образующей левое направление угла, ставится знак плюс, а при поправке стороны s_{j-1} — минус; в формулах для вычисления

δy_k знаки коэффициентов b_j, b_{j-1} противоположны знакам коэффициентов a_j и a_{j-1}.

Правила образования коэффициентов при поправках сторон также едины.

Коэффициенты a и b в формулах для δx_N и δy_N необходимо вычислять последовательно, начиная с коэффициентов при поправках двух последних сторон s_i и s_{i-1} (рис. 2) цепи треугольников, соединяющей пункт N с исходным A и исходным дирекционным углом $\alpha_{A,\mathrm{I}}$.

Эти коэффициенты имеют вид

$$a_i = \frac{\sin \alpha_{(N-2)-N}}{\sin R}, \quad a_{i-1} = \frac{\sin \alpha_{(N-1)-N}}{\sin R};$$

$$b_i = \frac{\cos \alpha_{(N-2)-N}}{\sin R}, \quad b_{i-1} = \frac{\cos \alpha_{(N-1)-N}}{\sin R}. \qquad (13)$$

Так образуются коэффициенты a_3 и a_2, b_3 и b_2 в уравнениях (2), a_5 и a_4, b_5 и b_4 — (5), a_7 и a_6, b_7 и b_6 — (9), a_{11} и a_{10}, b_{11} и b_{10} — (11).

Коэффициенты a и b при поправках пары сторон s_j и s_{j-1}, необходимых для вычисления координат пункта K (рис. 2) от исходного A, вычисляются

$$k_j = \sum_{m=j+1}^{m=j+n} T_{j-m} k_m; \quad k_{j-1} = \sum_{m=j+1}^{m=j+n} T_{(j-1)-m} k_m. \qquad (14)$$

Число слагаемых в (14) всегда равно числу сторон выбранной цепи треугольников, идущих с пункта k, без двух. Так, например, коэффициенты при поправках сторон s_4 и s_5 в одном случае вычисляются как сумма трех произведений (12), в другом — как одно произведение (9).

Коэффициент при поправке v_1 стороны s_1, имеющей исходный дирекционный угол $\alpha_{A,\mathrm{I}}$, образуется по тому же правилу, что и коэффициенты при поправках сторон с исходным дирекционным углом в условных уравнениях сторон [1] и условных уравнениях дирекционных углов [2]. Он всегда равен алгебраической сумме произведений коэффициентов при поправках сторон, идущих от определяемого пункта, который расположен на конце стороны с исходным дирекционным углом, на косинусы соответствующих углов (со знаком минус).

Чтобы получить весовую функцию дирекционного угла α_{ik}, воспользуемся известной зависимостью между поправкой $\delta\alpha_{ik}$ и поправками координат δx_i, δy_i, δx_k, δy_k пунктов i и k.

$$\delta\alpha_{ik} = -\rho'' \frac{\sin \alpha_{ik}}{s_j} \delta x_k + \rho'' \frac{\cos \alpha_{ik}}{s_j} \delta y_k + \rho'' \frac{\sin \alpha_{ik}}{s_j} \delta x_i - \rho'' \frac{\cos \alpha_{ik}}{s_j} \delta y_i; \qquad (15)$$

или

$$\frac{s_j}{\rho''} \delta\alpha_{ik} = -\sin \alpha_{ik} \delta x_k + \cos \alpha_{ik} \delta y_k + \sin \alpha_{ik} \delta x_i - \cos \alpha_{ik} \delta y_i, \qquad (16)$$

где s_j — измеренное значение стороны, соединяющей пункты i и k.

Заменив в (16) поправки координат поправками сторон, использовав для этого установленные выше зависимости, получим искомую весовую функцию.

Так, весовая функция дирекционного угла $\alpha_{\mathrm{III,VI}}$ (рис. 1) будет

$$\frac{s_{10}}{\rho''} \delta\alpha_{\mathrm{III,\,VI}} = -a_{11} v_{11} + a_{10} v_{10} - a_9 v_9 + a_8 v_8 - a_7 v_7 + a_6 v_6 - a_5 v_5 +$$

$$+ a_4 v_4 - a_3 v_3 + a_2 v_2 - [a_2 \cos 1 + a_4 \cos (1+5)] v_1, \qquad (17)$$

где

$$a_{11} = \operatorname{cosec} 14, \quad a_{10} = \operatorname{ctg} 14;$$
$$a_9 = T_{9-11} a_{11}, \quad a_8 = T_{8-11} a_{11};$$
$$a_7 = T_{7-9} a_9, \quad a_6 = T_{6-9} a_9;$$
$$a_5 = T_{5-6} a_6 + T_{5-8} a_8 + T_{5-10} a_{10} + \frac{\cos(6+7+8+9)}{\sin 6}; \qquad (18)$$
$$a_4 = T_{4-6} a_6 + T_{4-8} a_8 + T_{4-10} a_{10} + \frac{\cos(7+8+9)}{\sin 6};$$
$$a_3 = T_{3-5} a_5 + T_{3-7} a_7, \quad a_2 = T_{2-5} a_5 + T_{2-7} a_7.$$

Из (17) и (18) видно, что весовая функция дирекционного угла имеет вид типового условного уравнения дирекционного угла необходимой стороны [2], а ее коэффициенты образуются по тем же правилам, что и коэффициенты указанного уравнения с учетом (7а), (7б).

В [2] не рассматривалось составление условных уравнений для дирекционных углов направлений, идущих с определяемого пункта, находящегося на конце стороны, которая имеет исходный дирекционный угол. Однако в практике может возникнуть необходимость оценить такие дирекционные углы. Поэтому приводим здесь весовые фукции дирекционных углов $\alpha_{\mathrm{I,II}}$ и $\alpha_{\mathrm{I,III}}$ (рис. 1)

$$\frac{s_2}{\rho''} \delta\alpha_{\mathrm{I,\,II}} = -a_3 v_3 + a_2 v_2 + (\sin 1 - a_2 \cos 1) \cdot v_1, \qquad (19)$$

где

$$a_3 = \operatorname{cosec} 2, \quad a_2 = \operatorname{ctg} 2; \qquad (20)$$

$$\frac{s_4}{\rho''} \delta\alpha_{\mathrm{I,\,III}} = -a_5 v_5 + a_4 v_4 - a_3 v_3 + a_2 v_2 +$$
$$+ [\sin(1+5) - a_2 \cos 1 - a_4 \cos(1+5)]\, v_1, \qquad (21)$$

где

$$a_5 = \operatorname{cosec} 6, \quad a_4 = \operatorname{ctg} 6;$$
$$a_3 = T_{3-5} a_5, \quad a_2 = T_{2-5} a_5. \qquad (22)$$

Формулы (19)—(22) подчиняются правилам, изложенным в [2], с той лишь разницей, что в формуле коэффициента при поправке v_1 стороны s_1, имеющей исходный дирекционный угол, добавляется синус угла между исходным дирекционным углом и дирекционным углом, для которого составляется весовая функция.

В заключение отметим, что если сторона s_1 исходная ($v_1 = 0$), то в формулах (2), (4), (8), (10), (17), (19), (21) отсутствует член с поправкой v_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Квасюк Б. П. Уравнивание сетей трилатерации, не имеющих исходных сторон, с использованием типового условного уравнения. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1973, вып. 18.
2. Кваснюк Б. П. Составление типового условного уравнения в сетях трилатерации для избыточного дирекционного угла. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, вып. 19.
3. Терпугов К. Н., Гордеев Ю. А. Уравнивание линейных триангуляций по методу условий с использованием типового условного уравнения и механических правил. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1961, № 4.

Работа поступила 13 мая 1974 года. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Львовского политехнического института.