

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ

О ГЕОМЕТРИИ СВЕТОВОГО ЛУЧА *

§ 1. За счет неоднородного строения атмосферы световой импульс (или радиоимпульс) распространяется по некоторой кривой линии. Для повышения точности геодезических построений желательное знание этой кривой, так как, зная уравнение светового луча, можно вычислить в его конечных точках поправки за рефракцию и средний показатель преломления $n_{\text{ср}}$ воздуха на его пути. В настоящее время обсуждаются, исследуются и частично используются на практике два метода определения поправок за рефракцию и нахождения $n_{\text{ср}}$: метеорологический и инструментальный.

* Статья содержит изложение доклада «О метеорологическом методе определения среднего значения показателя преломления воздуха и поправок за рефракцию при светодальномерных измерениях», прочитанного автором 16. IV. 74 г. на Всесоюзном совещании «Современные методы учета и исключения влияния рефракции световых волн при геодезических и астрономических измерениях» (Львов).

В первом из этих методов геодезическим наблюдениям должно сопутствовать одновременное измерение в ряде точек значений метеорологических элементов: температуры T воздуха, его давления B и влажности e . По формуле $n=f(T, B, e)$, например по формуле Барелла и Сирса, рекомендованной XII Генеральной ассамблеей МГС, в этих точках вычисляется показатель преломления n . Значит, можно полагать известной приближенную структуру поля n и, следовательно, получить приближенное решение обсуждаемых задач. При этом измерение метеорологических элементов предполагают (и выполняют) или в одной точке — на пункте наблюдения, или в двух — на пунктах наблюдения и визирования, а в некоторых случаях — в большем числе точек. Заметим, что данный метод реализует ситуацию так называемой прямой задачи математической физики, то есть в нашем случае такой задачи, в которой по известному полю n строится световая кривая, опирающаяся на две заданные в поле точки, либо исходящая из данной точки в наблюдаемом направлении. Точность решения задачи при этом лимитируется, в первую очередь, степенью приближенности восстанавливаемого по метеорологическим элементам поля n и зависит, с одной стороны, от количества и расположения точек измерения метеорологических элементов и, с другой, — от структуры и точности параметров используемой формулы $n=f(T, B, e)$. Для исключения погрешностей, обусловленных последним фактором, желательно было бы измерение не метеорологических, а непосредственно показателя преломления n , но, во-первых, это трудно осуществить технически и, во-вторых, скорее соответствует инструментальному методу, который, таким образом, частично является естественным следствием метеорологического способа.

В инструментальном методе предусматривается измерение спектральной разности, по которой затем вычисляется угол полной рефракции или среднего значения показателя преломления $n_{ср}$ воздуха на пути луча. В перспективе этот метод открывает широкие возможности для успешного разрешения обсуждаемых проблем. Однако, к сожалению, разработка геодезических интерферометров, рефрактометров и других новых приборов, к стати, дорогостоящих и «крупногабаритных», пока еще не вышла из стадии создания макетных установок и их исследования. Кроме того, использование таких приборов при условии достижения максимально возможной точности, необходимой для практики, требует обширных теоретических исследований математического и физического характера, которые в должной мере еще не ставились. В связи с этим, в частности, отметим, что с точки зрения математической физики инструментальный метод приводит к постановке и необходимости решения обратных задач теории дифференциальных уравнений и конкретно — к такой задаче, в которой, по некоторым известным из наблюдений функционалам решений волнового уравнения, требуется или определить коэффициент данного уравнения (показатель преломления n), или, исследовав семейство экстремалей этих функционалов, восстановить и изучить функцию, от которой они зависят. Значит, если метеорологическому методу соответствуют прямые, а инструментальному — обратные (некорректные — по Адамару) задачи, то, во-первых, математические теории этих методов различны, и, во-вторых, теория инструментального метода — в силу известных трудностей некорректных задач — оказывается более сложной.

На основании изложенного видно, что составной и, пожалуй, основополагающей частью проблемы повышения точности геодезических построений является изучение геометрии светового луча, а также теоретическое обоснование методов решения проблемы. Хотя вопросы геометрической теории рефракции уже привлекали внимание многих исследователей, ниже мы еще раз обратимся к отдельным частным вопросам

ее и дадим методику приближенного построения светового луча в реальных условиях наблюдений.

§ 2. В общем случае показатель преломления n воздуха является функцией положения точки в трехмерном пространстве, то есть $n = n(x, y, z)$. Однако, ограничиваясь рассмотрением вертикальной рефракции, будем полагать, что $n = n(x, y)$, где x, y — декартовы координаты точек вертикальной плоскости в пункте наблюдения, содержащей в себе точку визирования. Примем, что начало O системы координат совмещено с пунктом наблюдения, ось x проходит через точку визирования P , а ось y перпендикулярна к ней, и ее положительное направление приблизительно соответствует направлению к зениту точки O .

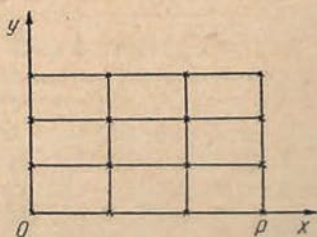


Рис. 1. Схема расположения точек измерения метеозлементов.

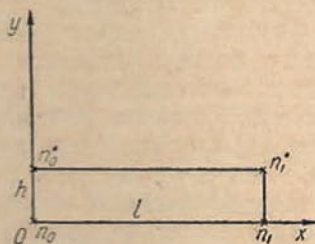


Рис. 2. Простейшая схема расположения узлов интерполирования $n = n(x, y)$.

Выбирая так систему координат, мы считаем приближенно известным взаимное расположение пунктов наблюдения и визирования, получаемое, в крайнем случае, при помощи топографической карты наиболее крупного масштаба.

Пусть в ряде пунктов линии визирования OP на различных уровнях, то есть в точках, отмеченных на рис. 1 крестиками, измерены метеозлементы, а по ним вычислены значения показателя преломления n . Тогда, выполняя интерполирование функции $n = n(x, y)$, последнюю можно представить интерполяционным многочленом, считая его определяющим приближенную структуру поля показателя преломления.

Ясно, что измерение метеозлементов по такой схеме увеличивает объем полевых работ и несколько усложняет их организацию. Однако в некоторых случаях это, очевидно, необходимо и при сравнительно небольшом числе точек измерения метеозлементов не приведет к значительным дополнительным затратам. Количество точек измерения T, B, e зависит как от целей геодезических работ, так и от характера их района. Вопрос выбора оптимального числа таких точек должен решаться особо в каждом конкретном случае. Методика рассматриваемых метеорологических измерений описана в [4], хотя в настоящее время она может быть частично модернизирована.

Остановимся на простейших случаях схемы измерения метеозлементов. Пусть T, B, e измерены одновременно в пунктах наблюдения и визирования на двух уровнях в каждом (рис. 2) и по ним вычислены соответствующие значения показателя преломления n_0, n_0^* и n_1, n_1^* . Если расстояние между пунктами l , а разность высот уровней h , то $n(x, y)$ приближенно представляется следующим интерполяционным многочленом

$$n^{(0)}(x, y) = n_0 + (n_1 - n_0) \frac{x}{l} + (n_0^* - n_0) \frac{y}{h} + [(n_1^* - n_1) - (n_0^* - n_0)] \frac{x}{l} \frac{y}{h},$$

$$n^2(x, y) = n_0 + \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x \partial y}\right)_0 xy = n_0 + Ax + By + Cxy. \quad (1)$$

При малых углах наклона α линии визирования к горизонту $\frac{\partial n}{\partial x}$ и $\frac{\partial n}{\partial y}$ можно считать соответственно горизонтальным и вертикальным градиентами показателя преломления, вычисляемыми в точке наблюдения. Ясно, что функцию $n(x, y)$ мы представляем здесь первыми членами ряда Тейлора в окрестности точки наблюдения с сохранением только одной производной второго порядка.

Добавляя к точкам измерения метеоэлементов, отмеченным на рис. 2, еще две (одну в пункте наблюдения на высоте $\frac{h}{2}$, вторую — в направлении линии визирования на расстоянии $l/2$), уточним формулу (1) членами с производными $\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 n}{\partial y^2}$. Если же метеоизмерения полагать выполненными в трех пунктах линии визирования (при $x=0, \frac{l}{2}, l$) на трех уровнях в каждом (при $y=0, \frac{h}{2}, h$), то есть в девяти точках,

то можно повысить точность представления $n=n(x, y)$ рядом Тейлора за счет сохранения в нем всех производных второго порядка и приняв, естественно, за начальную точку середину отрезка визирования. Высота h измерения метеоэлементов в каждом конкретном случае должна выбираться примерно равной «стрелке прогиба» световой кривой.

Итак, измерение метеорологических элементов всего в нескольких точках уже позволяет получить приближенную структуру поля показателя преломления.

§ 3. Как известно [1, 2], дифференциальное уравнение световой кривой, получаемое методами вариационного исчисления на основе принципа Ферма, имеет вид

$$ny'' = \left(\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial x} y'\right) (1 + y'^2). \quad (2)$$

При произвольной функции $n=n(x, y)$, это уравнение не интегрируется. Налагать же на эту функцию дополнительные условия, например считать поле $\ln n$ потенциальным, нет никаких оснований. Поэтому, полагая, что приближенная структура поля $n=n(x, y)$ на период геодезических наблюдений восстановлена по метеоизмерениям и дается формулой типа (1), будем далее иметь в виду интегрирование уравнения (2) численными методами с использованием ЭВМ. Польза введения указанной процедуры в том, что интегрирование (2) с учетом (1) дает наряду с результатами комплекса геодезических наблюдений, одновременно выполняемых на смежных пунктах геодезической сети (измерения зенитных расстояний z и времени τ прохождения светового импульса), дополнительное условие, связывающее измеряемые величины.

Действительно, ставя и решая для уравнения (2) задачу Коши

$$y|_{x=0}=0; \quad y'|_{x=0}=\text{ctg}(z+\alpha) \quad (3)$$

или краевую задачу

$$y|_{x=0}=0; \quad y|_{x=l}=0, \quad (4)$$

мы получаем уравнение кривой распространения света, а значит, и длину ее дуги s между пунктами наблюдения и визирования, и поправки за рефракцию в этих точках. Кроме того, на основании формул типа (1)

легко вычисляется и средний показатель преломления $n_{\text{ср}}^0$ вдоль траектории светового луча, соответствующий приближенной структуре реального поля n .

При этом нужно дополнительно исследовать вопрос о степени допустимой приближенности величин α и l . После выполнения по описываемой методике эксперимента, возможно, придется использовать способ последовательных приближений.

§ 4. Сравним решение задачи (2), (4), получаемое на основе формул типа (1), с обычно применяемой на практике заменой световой кривой дугой окружности, для построения которой достаточно измерения метеоэлементов только в двух точках (в конечных точках линии визирования). Для этого решим краевую задачу (2), (4) при частном задании показателя преломления n , когда он, во-первых, предполагается зависящим только от y и, во-вторых, выражается простейшей дробно-линейной функцией

$$n = n(y) = \frac{1}{\alpha y + \beta}. \quad (5)$$

Уравнение (2) при (5) легко интегрируется, световыми кривыми в поле (5) оказываются дуги окружностей, а использование граничных условий (4) выделяет из них окружность радиуса $R = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\alpha^2 l^2 + 4\beta^2}$ с центром в точке $\left(\frac{l}{2}, -\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

Таким образом, замена световой кривой дугой окружности, при которой поправки за рефракцию в конечных точках дуги оказываются равными, соответствует введению довольно сложной ситуации, вряд ли осуществляемой на практике. И любая из описанных выше схем измерения метеорологических элементов даже в малом числе точек (четыре или девяти) более приближает к реальности, во-первых, за счет увеличения числа этих точек, приводящего к большему числу параметров, определяющих поле, и, во-вторых, ввиду большей естественности аппроксимации поля первыми членами ряда Тейлора взамен дробно-линейной функции (5).

§ 5. Выше отмечалось, что решение краевой задачи (2), (4), с учетом (1), доставляет уравнение дуги $\Gamma^{(0)}$ световой кривой в поле $n^{(0)}(x, y)$, а значит, и средний показатель преломления

$$n_{\text{ср}}^{(0)} = \frac{1}{s} \int_0^l n^{(0)}(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = \frac{1}{s} \int_{\Gamma^{(0)}} n^{(0)}(x, y) ds,$$

соответствующий этому приближенному полю $n^{(0)}$. Получаемый при этом результат может быть уточнен.

При рассмотрении волнового уравнения, описывающего, в частности, и распространение электромагнитных волн,

$$\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u,$$

(c — скорость света в вакууме; Δ — оператор Лапласа; u — возмущение в момент t среды, характеризуемой функцией $n = n(x, y)$) вводит-ся [3] функционал

$$J(\Gamma) = \int_{\Gamma} n(x, y) ds.$$

причем $\min J(\Gamma) = \tau(l)$ дает время распространения светового импульса из точки $x=l$ в точку O (рис. 3).

Пусть

$$n(x, y) = n^{(0)}(x, y) + \Delta n(x, y), \quad (6)$$

где функция $\Delta n(x, y)$ предполагается малой и достаточно гладкой. Представим, соответственно,

$$\tau(l) = \tau^{(0)}(l) + \Delta\tau(l), \quad (7)$$

где функция $\Delta\tau(l)$ также мала, а функция $\tau^{(0)}(l)$ соответствует функции $n^{(0)}(x, y)$, то есть

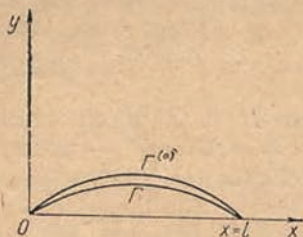
$$\tau^{(0)}(l) = \min J^{(0)}(\Gamma) = \min_{\Gamma(l)} \int n^{(0)}(x, y) ds. \quad (8)$$

В [3] доказана теорема, гласящая, что с точностью до малых порядка квадрата Δn функция $\Delta\tau$ может быть представлена в виде

$$\Delta\tau(l) = \int_{\Gamma^{(0)}(l)} \Delta n(x, y) ds, \quad (9)$$

где $\Gamma^{(0)}(l)$ кривая из семейства $\{\Gamma(l)\}$, на которой реализуется минимум функционала $J^{(0)}(\Gamma)$.

Рис. 3. Световые лучи, соответствующие реальной (Γ) и приближенной $(\Gamma^{(0)})$ структуре поля n .



В нашем случае действительное поле $n(x, y)$ заменено приближенно полем $n^{(0)}(x, y)$, для которого найдена из решения задачи (2), (4) кривая $\Gamma^{(0)}(l)$. Значит, для нее может быть вычислено $\tau^{(0)}(l)$. За счет этого и, располагая еще результатами светодальномерных измерений $\tau(l)$, находим из (7) $\Delta\tau$ и в соответствии с (9) получаем

$$\Delta n_{\text{ср}} = \frac{1}{s} \int_{\Gamma^{(0)}} \Delta n(x, y) dx = \frac{\Delta\tau}{s}.$$

Таким образом, средний показатель преломления, соответствующий реальному полю и близкий к его среднеинтегральному значению, выражается формулой

$$n_{\text{ср}} = \frac{1}{s} \left(\int_{\Gamma^{(0)}} n^{(0)}(x, y) ds + \Delta\tau \right). \quad (10)$$

Конечно, здесь остается пока открытым вопрос о влиянии на окончательный результат погрешности l .

В заключение отметим, что описанная в § 2 методика построения приближенного поля $n^{(0)}(x, y)$ по метеорологическим измерениям в ряде точек окрестности светового луча может быть использована при вычислении доли астрономической рефракции, обусловленной самым нижним, прилегающим к поверхности Земли, слоем атмосферы толщиной 10—15 м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1. М.—Л., ГИТТЛ, 1951.
2. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. М.—Л., ГИТТЛ., 1950.
3. Лаврентьев М. М., Васильев В. Г., Романов В. Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, «Наука», 1969.
4. Островский А. Л. О геодезическом методе определения физических редукций светодальномерных измерений. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1970, вып. 12.

Работа поступила 20 мая 1974 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.
