

Таблица 1

Результаты проверки формул (3) — (5)

	1/P _г		1/P _н		1/P _α (α ² /ρ ³)	
	Строгое решение	По формуле (3)	Строгое решение	По формуле (4)	Строгое решение	По формуле (5)
$m_{II} = 1,0 + 1,0 \cdot s \cdot 10^{-6}$						
2	1,16	1,15	6,0	5,9	2,38	2,38
4	1,53	1,52	15,1	15,1	3,24	3,24
6	1,93	1,94	26,5	26,4	4,23	4,23
8	2,38	2,40	40,3	40,3	5,36	5,36
$m_{II} = 1,0 + 2,0 \cdot s \cdot 10^{-6}$						
2	1,56	1,53	7,4	7,2	2,72	2,70
4	2,44	2,44	20,4	19,4	4,50	4,53
6	3,48	3,49	39,0	38,8	6,72	6,81
8	4,68	4,60	64,5	61,3	9,39	9,64
$m_{II} = 1,0 + 3,0 \cdot s \cdot 10^{-6}$						
2	2,03	1,97	9,1	8,7	3,03	2,95
4	3,56	3,50	26,6	26,1	5,73	5,72
6	5,46	5,20	54,4	53,4	9,28	9,22
8	7,72	6,78	95,2	93,1	13,68	13,50
$m_{II} = 0,5 + 2,0 \cdot s \cdot 10^{-6}$						
2	2,55	2,45	10,8	10,1	3,31	3,14
4	4,88	4,11	33,7	32,4	6,90	6,73
6	7,86	6,82	72,5	69,7	11,80	11,17
8	11,50	8,56	132,4	127,7	18,00	13,66

Результаты проверки формул (6) — (8)

Таблица 2

α, км	n	Коэффициенты уравнений репреси		1/P _г		1/P _н		1/P _α (α ² /ρ ³)	
		c	k	Строгое решение	По формуле (6)	Строгое решение	По формуле (7)	Строгое решение	По формуле (8)
$0,4$									
1,0	1,0	0,0	0,0	0,197	0,196	25,3	25,3	0,400	0,400
1,0	1,0	1,0	1,0	0,284	0,275	32,9	31,9	0,536	0,521
1,0	1,0	2,0	2,0	0,378	0,370	41,0	40,1	0,662	0,663
1,0	1,0	3,0	3,0	0,478	0,482	49,6	50,5	0,780	0,792
0,5	0,5	2,0	2,0	0,585	0,607	58,6	63,5	0,891	0,934
2,0	2,0	5,0	5,0	0,427	0,424	45,3	45,0	0,722	0,716
$1,0$									
1,0	1,0	0,0	0,0	0,245	0,244	19,3	19,4	0,500	0,500
1,0	1,0	1,0	1,0	0,476	0,468	31,8	32,2	0,808	0,795
1,0	1,0	2,0	2,0	0,746	0,753	45,9	47,4	1,066	1,073
1,0	1,0	3,0	3,0	1,056	1,066	61,9	63,7	1,287	1,304
0,5	0,5	2,0	2,0	1,405	1,374	79,6	79,6	1,477	1,477
2,0	2,0	5,0	5,0	0,896	0,908	53,7	55,7	1,181	1,196

мул (3) — (8) с (2) показывает, что для моделей II и III обратные веса оцениваемых элементов с увеличением отношения k/c возрастают быстрее и пренебрежение неравноточностью измерений может привести к более значительным ошибкам. Так, при создании сети вида III электронным дальнометром с уравнением репреси

$$m_n = 1,0 + 2,0 \cdot s \cdot 10^{-6} \quad (10)$$

и стороной квадратов $a=1$ км пренебрежение неравноточностью измерений вызывает погрешность в прогнозе величин $1/P_g$, $1/P_n$, $1/P_\alpha$ элементов сетей, удаленных от ее края на пять фигур, соответственно 360, 211, 272, а на десять фигур — 745, 342, 625%. Сравнение результатов оценки точности моделей I [2, 3], II, III (см. табл. 1, 2) показывает, что и при неравноточном измерении жесткость моделей II и III значительно больше, чем жесткость модели I [2]. Причем, это справедливо как при равно- так и неравноточном измерении. Поэтому вывод о том, что при равно-точном измерении выгодней измерять возможно длинные стороны, можно обобщить на случай неравноточном измерений [1].

Список литературы: 1. Буглер С. А. Уравнивание тригонометрических сетей, определенных длинами сторон. — Геодезист, 1939, № 8, 9. 2. Виленский В. А. Вопросы применения приближенных формул для оценки точности геодезических сетей. — Геодезия, картография и аэрофотогеодезия, 1982, вып. 35. 3. Кулгазов И. А. Накопление погрешностей в рядах триангуляции с измерениями сторонами. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотогеодезия, 1957, вып. 72.

Статья поступила в редакцию 20.02.84

УДК 528.485:519.21

Д. К. ВОИСЛАВСКИЙ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УКЛОНОВ НА ТРАССАХ ЛИНЕЙНЫХ СООРУЖЕНИЙ

При изыскании и проектировании ряда линейных сооружений (железные и автомобильные дороги и т. д.) одной из важных инженерных характеристик рельефа является **уклон** местности i . Так, если уклон трассы $i_{тр} \geq i$, трассирование ведут вольным ходом, и, наоборот, если $i_{тр} < i$, трассирование ведут приближенным ходом [5]. Вот почему распределение уклонов по трассе может стать одним из критериев инженерной оценки местности.

Как известно, на продольном профиле трассы естественная поверхность земли аппроксимируется обычно ломаной линией. Уклоны отрезков этой ломаной можно рассматривать как непрерывную совокупность случайных величин. Отсюда возникает задача установления связи между возможными значениями уклонов и соответствующими им вероятностями, т. е. установить закон распределения случайной величины i .

Проведенные нами исследования показали, что распределение уклонов нельзя описать ни одним из известных законов распределения вероятностей. Поэтому поставленная задача решена другим способом.

Представим уклон как функцию случайных аргументов

$$l_j = \frac{h_j}{l_j}, \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где h_j, l_j — превышения и расстояния между характерными точками профиля соответственно.

Экспериментальными исследованиями установлено [3].

1. Превышения между характерными точками профиля имеют распределение Лапласа с плотностью вероятностей

$$f(h) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|h-\xi|}{\beta}\right), \quad (2)$$

где ξ и β — параметры.

2. Расстояния между характерными точками имеют гамма-распределение с плотностью вероятностей

$$f(l) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} l^{\alpha-1} \exp(-\lambda l), \quad (3)$$

где α и λ — параметры; $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

На основании (1)–(3), имея в виду, что l принимает только положительные значения, плотность распределения как функции независимых случайных аргументов h и l определим из выражения [2]

$$f(l) = \frac{\lambda^\alpha}{2\Gamma(\alpha)\beta} \int_0^\infty l^\alpha \exp\left[-\left(\lambda l + \frac{|hl-\xi|}{\beta}\right)\right] dl. \quad (4)$$

В результате интегрирования получим

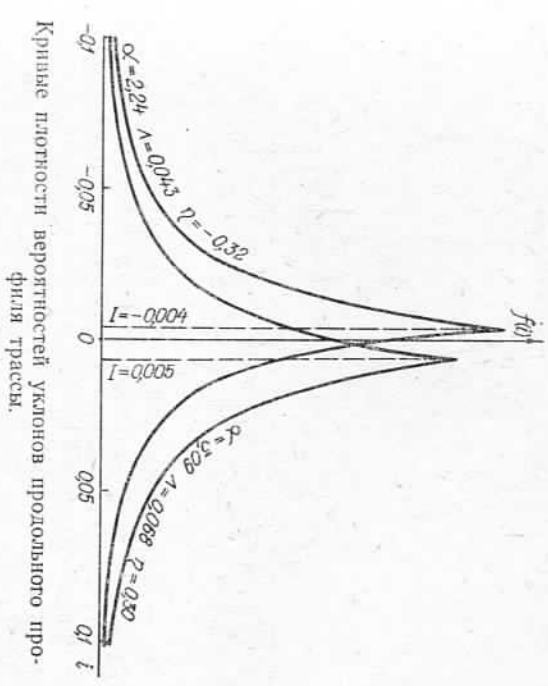
$$f(l) = \begin{cases} \frac{C \alpha \Delta^\alpha \exp(-\eta)}{2(\Delta-j)^{\alpha+1}}, & \text{если } -\infty < i < l; \\ \frac{C \alpha \Delta^\alpha \exp \eta}{2(\Delta+i)^{\alpha+1}}, & \text{если } l \leq i < \infty, \end{cases} \quad (5)$$

где α, Δ, η — параметры распределения; C — нормирующий множитель.

Кривые плотности вероятностей (5) показаны на рисунке. Как видно из представленных графиков, распределение $f(l)$ ассиметрично, унимодально и имеет максимум в точке l . Если $l < 0$, на графике преобладают отрицательные уклоны, а если $l > 0$ — положительные.

Точка l может быть определена из условия равенства плотности вероятностей, т. е. $\frac{e^{-\eta}}{(\Delta-l)^{\alpha+1}} - \frac{e^\eta}{(\Delta+l)^{\alpha+1}} = 0$. Решая это уравнение, найдем

$$\ln\left(\frac{1+I/\Delta}{1-I/\Delta}\right) = \frac{2\eta}{\alpha+1}.$$



Используя известное соотношение гиперболической тригонометрии $\ln(1+x/1-x) = 2 \operatorname{Arth} x$, получим

$$I = \Delta \operatorname{th}\left(\frac{\eta}{\alpha+1}\right). \quad (6)$$

При малых значениях η (6) можно заменить приближенной формулой

$$I \approx \Delta \eta / (\alpha+1). \quad (6a)$$

Множитель C находим из условия нормировки

$$\frac{C \alpha \Delta^\alpha}{2} \left[\int_{-\infty}^l \exp(-\eta) (\Delta-j)^{\alpha+1} di + \int_l^{\infty} \exp \eta (\Delta+i)^{\alpha+1} di \right] = 1. \quad (7)$$

Интегрируя (7), подставим вместо l его значения из (6). После ряда преобразований гиперболических функций имеем

$$C = \operatorname{sch}^{\alpha+1}\left(\frac{\eta}{\alpha+1}\right). \quad (8)$$

Параметр α в (5) равен соответствующему параметру в исходном распределении (3). Параметры Δ и η функционально связаны с параметрами исходных распределений (2) и (3) соотношениями

$$\Delta = \lambda\beta; \quad \eta = \xi/\beta. \quad (9)$$

Оценки параметров распределения (5) можно вычислить по эмпирическим данным при помощи уравнения

$$\ln \hat{\alpha} - \frac{d\Gamma(\hat{\alpha})}{d\alpha} + \frac{\sum_{j=1}^n \ln l_j}{n} - \ln \left(\frac{\sum_{j=1}^n l_j}{n} \right) = 0 \quad (10)$$

и формул

$$\hat{\eta} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{H_N - H_0}{|h_j - \frac{H_N - H_0}{n}|}}{L}; \quad \hat{\Delta} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{H_N - H_0}{|h_j - \frac{H_N - H_0}{n}|}}{L}, \quad (11)$$

где H_0, H_N — отметки начальной и конечной точек трассы; L — длина трассы; n — число характерных точек профиля на трассе. Выражения (10), (11) получены с учетом (9) методом максимального правдоподобия [1, 3].

Математическое ожидание случайной величины i , на основании (5), будет

$$M(i) = I(\alpha + 1/\alpha - 1). \quad (12)$$

Распределение уклонов поверхности между характерными точками

Номер профиля	Минимальный уклон, i_{\min}	Количество уклонов, попадающих в равные интервалы (длина интервала выражена для $R = i_{\max} - i_{\min}$)																	
		0-0,05	0,05-0,1	0,1-0,15	0,15-0,2	0,2-0,25	0,25-0,3	0,3-0,35	0,35-0,4	0,4-0,45	0,45-0,5	0,5-0,55	0,55-0,6	0,6-0,65	0,65-0,7	0,7-0,75	0,75-0,8	0,8-0,85	0,85-0,9
1	-0,571	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	-0,400	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	-0,517	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	-0,545	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	-0,500	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	-0,431	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	-0,146	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	-0,173	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	-0,093	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	-0,273	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Примечание. При вычислении критерия χ^2 интервала с теоретически ожидаемыми или несколькими соседними интервалами. Значительное сокращение числа интервалов влечет их модальных значений.

Принимая во внимание (6а) и (11), для малых абсолютных значений η (12) можно заменить приближенной формулой

$$M(i) \approx \frac{H_N - H_0}{L} \frac{\alpha}{\alpha - 1}. \quad (12a)$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины i будут соответственно равны

$$D(i) = \frac{2\{\Delta^2 + [M(i)]^2\}}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}; \quad \sigma(i) = \sqrt{\frac{2\{\Delta^2 + [M(i)]^2\}}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}} \quad (\alpha > 2). \quad (13)$$

Мода распределения (5) равна I . Принимая во внимание (6а) и (11), найдем ее приближенное значение

$$Mo(i) \approx \frac{H_N - H_0}{L} \frac{\alpha}{\alpha + 1}. \quad (14)$$

Медиану можно определить лишь приближенно на основании эмпирической зависимости, характерной для унимодальных распределений [4]

$$M(i) - Mo(i) = 3[M(i) - Me(i)],$$

где $Me(i)$ — медиана. Сделав соответствующие подстановки из (6а) и (12), а также учитывая (11), имеем

$$Me(i) \approx \frac{H_N - H_0}{L} \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - 1}. \quad (15)$$

Профиля трассы в интервале от i_{\min} до i_{\max}

на в до-	Максимальный уклон, i_{\max}	R	Параметры			Критерий согласия	
			α	λ	η	χ^2	$1 - N/n$
0,9-0,95	0,571	1,142	2,24	0,043	-0,319	10,6	4
0,95-1	0,725	1,125	2,60	0,050	0,042	6,0	3
	0,619	1,136	2,41	0,147	-0,041	4,5	7
	0,900	1,445	2,11	0,118	0,043	10,7	6
	0,737	1,237	3,25	0,035	-0,238	0,3	1
	0,450	0,881	2,52	0,057	0,178	6,4	5
	0,294	0,294	3,92	0,074	0,112	7,2	3
	0,300	0,473	3,30	0,060	0,027	5,6	6
	0,189	0,282	3,09	0,069	0,304	6,8	6
	0,335	0,608	2,82	0,066	-0,030	4,1	5

Число элементов менее десяти объединялись с одним обусловлено высокой концентрацией распределения

В исключительном случае, когда высоты начальной и конечной точек трассы равны, распределение (5) становится симметричным, т. е. $M(i), Mo(i), Me(i)$ равны нулю, а нормирующий множитель C — единице. В остальных случаях, так как $\alpha > 1$, на основании (12а), (14) и (15) можно заключить, что математическое ожидание и медиана случайной величины i по абсолютному значению всегда будут больше, а ее мода

всегда будет меньше уклона прямой, соединяющей конечные точки профиля.

Интегрируя (5) по переменной i , получим функцию распределения уклонов трассы

$$F(i) = \begin{cases} \frac{C \exp(-\eta)}{2 \left(1 - \frac{i}{\Lambda}\right)^\alpha}, & \text{если } -\infty < i \leq I; \\ 1 - \frac{C \exp \eta}{2 \left(1 + \frac{i}{\Lambda}\right)^\alpha}, & \text{если } I \leq i < \infty, \end{cases} \quad (16)$$

при помощи которой рассчитывается вероятность того, что уклон окажется в заданном интервале.

Итак, установлен закон распределения вероятностей уклонов поверхности по трассе линейного сооружения. Однако практическая ценность любой математической модели, как бы хорошо она не была обоснована, может оказаться весьма сомнительной, если она плохо согласуется с реальной действительностью. Вот почему меридиом достоверности распределения (5) будет согласна эмпирических распределений с теоретическими. Проверка согласия выполнена по десяти трассам линейных сооружений на основе критерия χ^2 . Результаты представлены в таблице. На основании приведенных данных можно констатировать удовлетворительное согласие между эмпирическими и теоретическими распределениями.

В заключение рассмотрим возможное практическое приложение закона распределения уклонов. Пусть задан уклон трассы $i_{тр}$. Исходя из того, что естественный уклон вдоль трассы будет меньше заданного. Действительно,

$$P(|i| \leq i_{тр}) = P(-i_{тр} \leq i \leq i_{тр}) = F(i_{тр}) - F(-i_{тр}).$$

Умножив полученную вероятность на длину трассы L , мы найдем приближенно ту ее часть, где трассирование возможно вести вольным ходом. Параметр распределения α для данной местности достаточно устойчив и, как видно из таблицы, изменяется в очень узких пределах. Поэтому для сравнения различных вариантов трассы можно использовать в качестве статистических критериев оценки местности математическое ожидание (12а), моду (14) и медиану (15).

Список литературы: 1. Брауни К. А. Статистическая теория и методология в науке и технике. — М.: Наука, 1977. 2. Венцель Е. С. Теория вероятностей. — М.: Физматгиз, 1962. 3. Войскацкий Д. К. Информационная модель профиля местности. — Геодезия, картография и аэрофотогеодезия, 1982, вып. 35. 4. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. — М.: Наука, 1966. 5. Райзен В. Ф. Инженерно-геодезические работы при изысканиях линейных сооружений. — М.: Недра, 1983.

Статья поступила в редакцию 07.03.84

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ АНОМАЛИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ МЕТОДОМ КОЛЛОКАЦИИ И ЛИНЕЙНЫМ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕМ

В настоящее время важное практическое значение имеет изучение гравитационного поля области морей, шельфовых зон и Мирового океана с целью выявления и освоения их природных ресурсов. На поверхности Земли существует еще немало районов, где характеристики гравитационного поля изучены очень слабо. Эти районы, как правило, расположены в труднодоступных для прямых измерений участках суши и занимают почти всю площадь морей и океанов.

Для решения многих задач теории фигуры Земли необходимо знание аномалий силы тяжести в любой точке земной поверхности. До настоящего времени характеристики гравитационного поля в таких районах определялись с помощью интерполирования (линейного или косвенного) [1, 2].

Большой интерес вызывает метод оптимальной линейной регрессии, или метод коллокации [3, 4].

Нам предпринята попытка сравнить результаты прогнозирования аномалий силы тяжести методом коллокации и линейным интерполированием. Исходным материалом послужил каталог гравиметрических пунктов I и II классов на территории Чехословакии [5], из которого использованы географические координаты гравиметрических пунктов и аномалии силы тяжести Буле.

Общее количество гравиметрических пунктов — 607, средняя их плотность — 1 пункт на 210 км², перепад высот пунктов — немногим более 1000 м.

Основные этапы данного исследования — линейная интерполяция прогнозируемых аномалий для указанного района; интерполирование тех же аномалий с помощью метода коллокации.

Линейную интерполяцию аномалий силы тяжести Буле и оценку точности для указанного района проводили по известной методике [1].

При интерполировании аномалий силы тяжести методом коллокации вначале необходимо составить эмпирическую ковариационную функцию, которую определяют по формуле

$$C(\psi) = M\{\Delta g_i \Delta g_j\}, \quad (1)$$

где $M\{\Delta g_i \Delta g_j\}$ — средняя сумма произведений аномалий $\Delta g_i \Delta g_j$ в разных точках i и j , находящихся на постоянном расстоянии ψ . Если пункты расположены на сфере, то расстояние между ними определяется из известного соотношения

$$\cos \psi = \cos \Theta \cdot \cos \Theta' + \sin \Theta \cdot \sin \Theta' \cos(\chi - \lambda), \quad (2)$$