

Л. К. ВОЙСЛАВСКИЙ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УКЛОНОВ
НА ТРАССАХ ЛИНЕЙНЫХ СООРУЖЕНИЙ

При изыскании и проектировании ряда линейных сооружений (железные и автомобильные дороги и т. д.) одной из важных инженерных характеристик рельефа является **уклон** местности i . Так, если уклон трассы $i_{\text{тр}} \geq i$, трассирование ведут вольным ходом, и, наоборот, если $i_{\text{тр}} < i$, трассирование ведут напряженным ходом [5]. Вот почему распределение уклонов по трассе может стать одним из критериев инженерной оценки местности.

Как известно, на продольном профиле трассы естественная поверхность земли аппроксимируется обычно ломаной линией. Уклоны отрезков этой ломаной можно рассматривать как непрерывную совокупность случайных величин. Отсюда возникает задача установления связи между возможными значениями уклонов и соответствующими им вероятностями, т. е. установить закон распределения случайной величины i .

Проведенные нами исследования показали, что распределение уклонов нельзя описать ни одним из известных законов распределения вероятностей. Поэтому поставленная задача решена другим способом.

Представим уклон как функцию случайных аргументов

$$i_j = \frac{h_j}{l_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где h_j, l_j — превышения и расстояния между характерными точками профиля соответственно.

Экспериментальными исследованиями установлено [3].

1. Превышения между характерными точками профиля имеют распределение Лапласа с плотностью вероятностей

$$f(h) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|h-\xi|}{\beta}\right), \quad (2)$$

где ξ и β — параметры.

2. Расстояния между характерными точками имеют гамма-распределение с плотностью вероятностей

$$f(l) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} l^{\alpha-1} \exp(-\lambda l), \quad (3)$$

где α и λ — параметры; $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

На основании (1)–(3), имея в виду, что l принимает только положительные значения, плотность распределения как функции независимых случайных аргументов h и l определим из выражения [2]

$$f(i) = \frac{\lambda^\alpha}{2\Gamma(\alpha)\beta} \int_0^\infty l^\alpha \exp\left[-\left(\lambda l + \frac{|il-\xi|}{\beta}\right)\right] dl. \quad (4)$$

В результате интегрирования получим

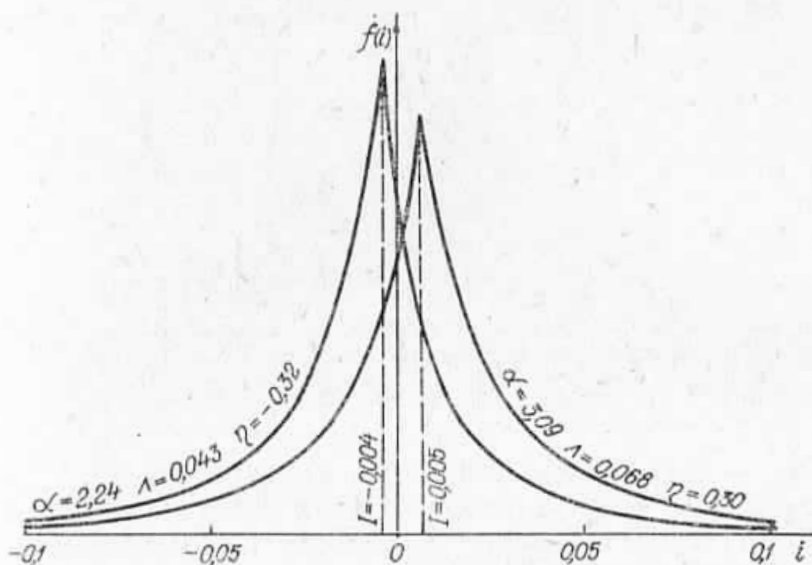
$$f(i) = \begin{cases} \frac{C \alpha \Lambda^\alpha \exp(-\eta)}{2(\Lambda - i)^{\alpha+1}}, & \text{если } -\infty < i < I; \\ \frac{C \alpha \Lambda^\alpha \exp \eta}{2(\Lambda + i)^{\alpha+1}}, & \text{если } I \leq i < \infty, \end{cases} \quad (5)$$

где α, Λ, η — параметры распределения; C — нормирующий множитель.

Кривые плотности вероятностей (5) показаны на рисунке. Как видно из представленных графиков, распределение $f(i)$ асимметрично, унимодально и имеет максимум в точке I . Если $I < 0$, на трассе преобладают отрицательные уклоны, а если $I > 0$ — положительные.

Точка I может быть определена из условия равенства плотности вероятностей, т. е. $\frac{e^{-\eta}}{(\Lambda - I)^{\alpha+1}} - \frac{e^{\eta}}{(\Lambda + I)^{\alpha+1}} = 0$. Решая это уравнение, найдем

$$\ln \left(\frac{1 + I/\Lambda}{1 - I/\Lambda} \right) = \frac{2\eta}{\alpha + 1}.$$



Кривые плотности вероятностей уклонов продольного профиля трассы.

Используя известное соотношение гиперболической тригонометрии $\ln(1+x/1-x) = 2 \operatorname{Arth} x$, получим

$$I = \Lambda \operatorname{th} \left(\frac{\eta}{\alpha + 1} \right). \quad (6)$$

При малых значениях η (6) можно заменить приближенной формулой

$$I \approx \Lambda \eta / \alpha + 1. \quad (6a)$$

Множитель C находим из условия нормировки

$$\frac{C\alpha\Lambda^\alpha}{2} \left[\int_{-\infty}^I \frac{\exp(-\eta)}{(\Lambda - i)^{\alpha+1}} di + \int_I^{\infty} \frac{\exp \eta}{(\Lambda + i)^{\alpha+1}} di \right] = 1. \quad (7)$$

Интегрируя (7), подставим вместо I его значения из (6). После ряда преобразований гиперболических функций имеем

$$C = \operatorname{sch}^{\alpha+1} \left(\frac{\eta}{\alpha + 1} \right). \quad (8)$$

Параметр α в (5) равен соответствующему параметру в исходном распределении (3). Параметры Λ и η функционально связаны с параметрами исходных распределений (2) и (3) соотношениями

$$\Lambda = \lambda\beta; \quad \eta = \xi/\beta. \quad (9)$$

Оценки параметров распределения (5) можно вычислить по эмпирическим данным при помощи уравнения

$$\ln \hat{\alpha} - \frac{d\Gamma(\hat{\alpha})}{d\hat{\alpha}} + \frac{\sum_1^n \ln l_j}{n} - \ln \left(\frac{\sum_1^n l_j}{n} \right) = 0 \quad (10)$$

и формул

$$\hat{\eta} = \frac{H_N - H_0}{\sum_1^n \left| h_j - \frac{H_N - H_0}{n} \right|}; \quad \hat{\Lambda} = \frac{\hat{\alpha} \sum_1^n \left| h_j - \frac{H_N - H_0}{n} \right|}{L}, \quad (11)$$

где H_0, H_N — отметки начальной и конечной точек трассы; L — длина трассы; n — число характерных точек профиля на трассе. Выражения (10), (11) получены с учетом (9) методом максимального правдоподобия [1, 3].

Математическое ожидание случайной величины i , на основании (5), будет

$$M(i) = I(\alpha + 1/\alpha - 1). \quad (12)$$

Распределение уклонов поверхности между характерными точками

Номер профиля	Минимальный уклон, i_{\min}	Количество уклонов, попадающих в равные интервалы (длина интервала выражена $R = i_{\max} - i_{\min}$)																	
		0-0,05	0,05-0,1	0,1-0,15	0,15-0,2	0,2-0,25	0,25-0,3	0,3-0,35	0,35-0,4	0,4-0,45	0,45-0,5	0,5-0,55	0,55-0,6	0,6-0,65	0,65-0,7	0,7-0,75	0,75-0,8	0,8-0,85	0,85-0,9
1	-0,571	1	—	—	1	1	1	1	2	9	101	84	2	1	—	1	2	—	—
2	-0,400	1	—	—	2	3	10	49	119	16	2	2	1	—	1	—	1	—	—
3	-0,517	1	2	—	—	2	2	20	17	52	59	30	11	8	2	—	1	—	—
4	-0,545	1	1	3	3	7	13	19	100	42	11	3	—	2	1	1	—	—	—
5	-0,500	1	—	—	—	—	—	2	75	126	3	—	—	—	—	—	—	—	—
6	-0,431	1	—	1	—	—	1	2	3	12	104	68	8	3	2	1	—	—	1
7	-0,146	1	—	—	1	—	—	4	12	42	44	45	38	11	4	2	—	—	1
8	-0,173	2	—	2	3	5	16	49	80	36	7	3	2	3	1	1	—	—	1
9	-0,093	2	4	9	10	6	33	44	33	35	14	9	2	3	1	—	—	—	1
10	-0,273	1	—	—	1	2	2	6	24	75	69	14	8	1	2	1	—	—	1

Примечание. При вычислении критерия χ^2 интервалы с теоретически ожидаемым или несколькими соседними интервалами. Значительное сокращение числа интервалов вблизи их модальных значений.

Принимая во внимание (6а) и (11), для малых абсолютных значений η (12) можно заменить приближенной формулой

$$M(i) \approx \frac{H_N - H_0}{L} \frac{\alpha}{\alpha - 1}. \quad (12a)$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины i будут соответственно равны

$$D(i) = \frac{2\{\Lambda^2 + [M(i)]^2\}}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}; \quad \sigma(i) = \sqrt{\frac{2\{\Lambda^2 + [M(i)]^2\}}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}} \quad (\alpha > 2). \quad (13)$$

Мода распределения (5) равна I . Принимая во внимание (6а) и (11), найдем ее приближенное значение

$$M_0(i) \approx \frac{H_N - H_0}{L} \frac{\alpha}{\alpha + 1}. \quad (14)$$

Медиану можно определить лишь приближенно на основании эмпирической зависимости, характерной для унимодальных распределений [4]

$$M(i) - M_0(i) = 3[M(i) - Me(i)],$$

где $Me(i)$ — медиана. Сделав соответствующие подстановки из (6а) и (12), а также учитывая (11), имеем

$$Me(i) \approx \frac{H_N - H_0}{L} \frac{\alpha^2 + \frac{\alpha}{3}}{\alpha^2 - 1}. \quad (15)$$

профиля трассы в интервале от i_{\min} до i_{\max}

на в до-		Максимальный уклон, i_{\max}	R	Параметры			Критерий согласия	
0,9—0,95	0,95—1			α	λ	η	χ^2	$k=N-1$
—	1	0,571	1,142	2,24	0,043	-0,319	10,6	4
—	1	0,725	1,125	2,60	0,050	0,042	6,0	3
—	1	0,619	1,136	2,41	0,147	-0,041	4,5	7
—	1	0,900	1,445	2,11	0,118	0,043	10,7	6
—	1	0,737	1,237	3,25	0,035	-0,238	0,3	1
—	1	0,450	0,881	2,52	0,057	0,178	6,4	5
—	1	0,148	0,294	3,92	0,074	0,112	7,2	3
—	1	0,300	0,473	3,30	0,060	0,027	5,6	6
—	2	0,189	0,282	3,09	0,069	0,304	6,8	6
—	1	0,335	0,608	2,82	0,066	-0,030	4,1	5

числом элементов менее десяти объединялись с одним обусловлено высокой концентрацией распределений

В исключительном случае, когда высоты начальной и конечной точек трассы равны, распределение (5) становится симметричным, η , $M(i)$, $M_0(i)$, $Me(i)$ равны нулю, а нормирующий множитель C — единице. В остальных случаях, так как $\alpha > 1$, на основании (12а), (14) и (15) можно заключить, что математическое ожидание и медиана случайной величины i по абсолютному значению всегда будут больше, а ее мода

всегда будет меньше уклона прямой, соединяющей конечные точки профиля.

Интегрируя (5) по переменной i , получим функцию распределения уклонов трассы

$$F(i) = \begin{cases} \frac{C}{2} \frac{\exp(-\eta)}{\left(1 - \frac{i}{\Lambda}\right)^\alpha}, & \text{если } -\infty < i \leq I; \\ 1 - \frac{C}{2} \frac{\exp \eta}{\left(1 + \frac{i}{\Lambda}\right)^\alpha}, & \text{если } I \leq i < \infty, \end{cases} \quad (16)$$

при помощи которой рассчитывается вероятность того, что уклон окажется в заданном интервале.

Итак, установлен закон распределения вероятностей уклонов поверхности по трассе линейного сооружения. Однако практическая ценность любой математической модели, как бы хорошо она не была обоснована, может оказаться весьма сомнительной, если она плохо согласуется с реальной действительностью. Вот почему мерилom достоверности распределения (5) будет согласие эмпирических распределений с теоретическими. Проверка согласия выполнена по десяти трассам линейных сооружений на основе критерия χ^2 . Результаты представлены в таблице. На основании приведенных данных можно констатировать удовлетворительное согласие между эмпирическими и теоретическими распределениями.

В заключение рассмотрим возможное практическое приложение закона распределения уклонов. Пусть задан уклон трассы $i_{тр}$. Используя функцию распределения (16), можно рассчитать вероятность того, что естественный уклон вдоль трассы будет меньше заданного. Действительно,

$$P(|i| \leq i_{тр}) = P(-i_{тр} \leq i \leq i_{тр}) = F(i_{тр}) - F(-i_{тр}).$$

Умножив полученную вероятность на длину трассы L , мы найдем приближенно ту ее часть, где трассирование возможно вести вольным ходом. Параметр распределения α для данной местности достаточно устойчив и, как видно из таблицы, изменяется в очень узких пределах. Поэтому для сравнения различных вариантов трассы можно использовать в качестве статистических критериев оценки местности математическое ожидание (12а), моду (14) и медиану (15).

Список литературы: 1. Браунли К. А. Статистическая теория и методология в науке и технике. — М.: Наука, 1977. 2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — М.: Физматгиз, 1962. 3. Войславский Л. К. Информационная модель профиля местности. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1982, вып. 35. 4. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. — М.: Наука, 1966. 5. Райфельд В. Ф. Инженерно-геодезические работы при изысканиях линейных сооружений. — М.: Недра, 1983.