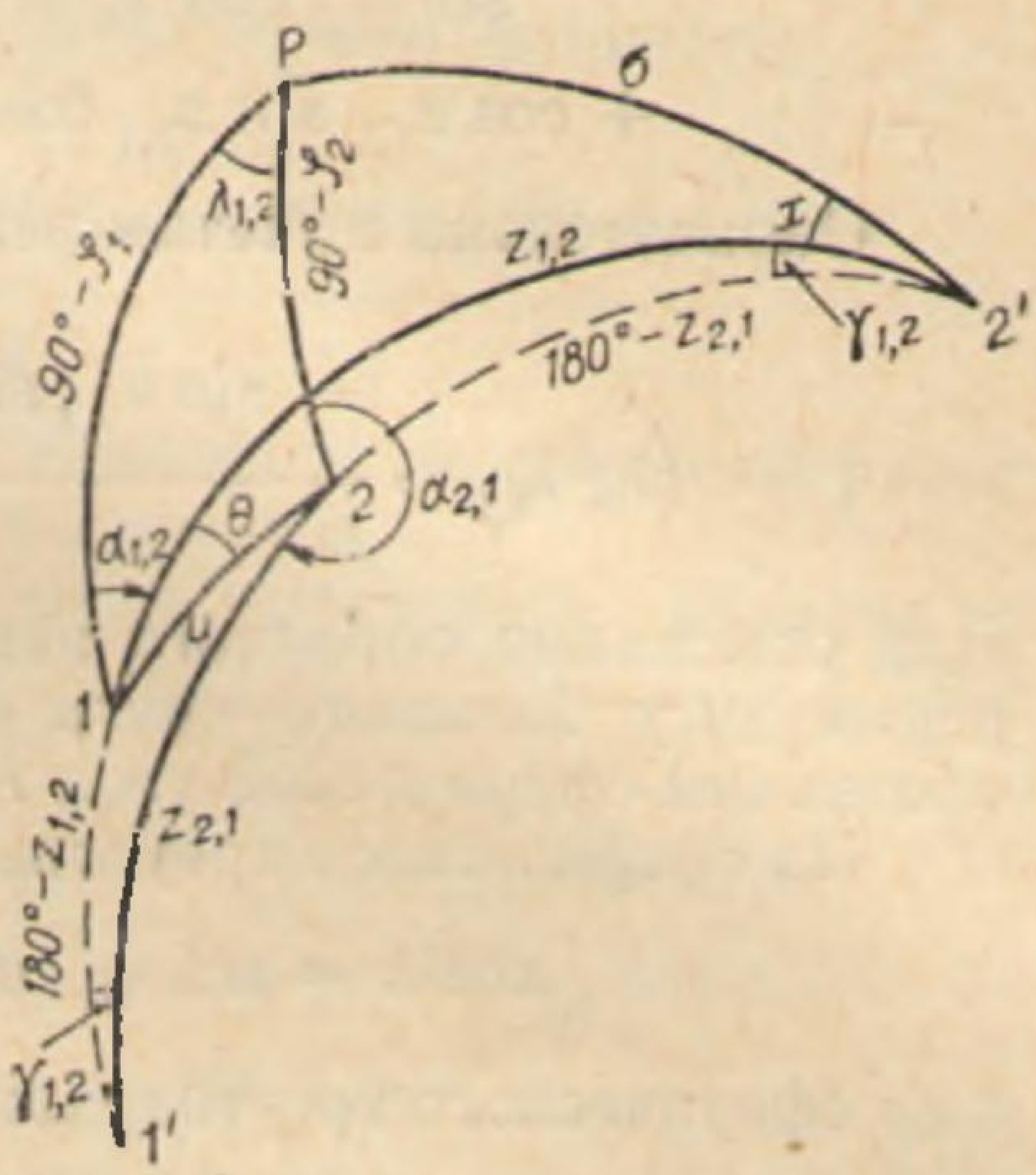
МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1967 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 6

В. И. РУДСКИЙ

К ВОПРОСУ О ПЕРЕДАЧЕ АСТРОНОМИЧЕСКИХ КООРДИНАТ И АЗИМУТА

Довольно громоздкие формулы передачи астрономических координат и азимута в результате ряда упрощений и замен приобрели компактный вид (см. [1]). Сам же вывод формул основывался на весьма сложных и утомительных выкладках и преобразованиях, связанных с переходом от выражений в векторной форме к выражениям в функциях непосредственно измеренных величин.



Здесь нам представляется уместным показать иной возможный путь решения той же задачи, что и прежде, но более простым путем. Для этого обратимся к следующему рисунку (см. рисунок). На нем: *1* и *2* — астрономические зениты соответствующих пунктов триангуляции на вспомогательной небесной сфере; *P* — северный полюс мира; $\smile 12' = z_{1,2}$ — большой круг небесной сферы, образованный сечением ее вертикальной плоскостью с пункта *1* на пункт *2*; $\smile 21' = z_{2,1}$ — то же при сечении вертикальной плоскости с пункта *2* на пункт *1*; $\gamma_{1,2}$ — угол между плоскостями взаимных вертикальных сечений в пунктах *1* и *2*.

Соединим точки *1* и *2* дугой *u* большого круга и обозначим буквой Θ угол между этой дугой и дугой *1 2'*.

Тогда, из сферического треугольника $1P2$ запишем:

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cos u + \cos \varphi_1 \sin u \cos (\alpha_{1,2} + \Theta) \tag{1}$$

или

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cos u + \cos \varphi_1 \sin u (\cos \alpha_{1,2} \cos \Theta - \sin \alpha_{1,2} \sin \Theta). \tag{2}$$

Воспользовавшись одним из двух сферических треугольников *1 2 1'* или *1 2 2'*, для *u* найдем:

$$\cos u = -\cos z_{1,2} \cos z_{2,1} + \sin z_{1,2} \sin z_{2,1} \cos \gamma_{1,2}, \tag{3}$$

а из треугольника *1 2 2'* получим:

$$\sin u \cos \Theta = -\sin z_{1,2} \cos z_{2,1} - \cos z_{1,2} \sin z_{2,1} \cos \gamma_{1,2} \tag{4}$$

$$\text{и} \quad \sin u \sin \Theta = \sin z_{2,1} \sin \gamma_{1,2}. \tag{5}$$

Подставив (3), (4) и (5) в (2), для φ_2 будем иметь:

$$\sin\varphi_2 = \sin\varphi_1(\sin z_{1,2}\sin z_{2,1}\cos\gamma_{1,2} - \cos z_{1,2}\cos z_{2,1}) -$$
$$- \cos\varphi_1[\cos\alpha_{1,2}(\sin z_{1,2}\cos z_{2,1} + \cos z_{1,2}\sin z_{2,1}\cos\gamma_{1,2}) +$$
$$+ \sin\alpha_{1,2}\sin z_{2,1}\sin\gamma_{1,2}]. \qquad (6)$$

Или, учитывая малую величину угла $\gamma_{1,2}$, окончательно получим:

$$\sin\varphi_2 = -\sin\varphi_1\cos(z_{1,2} + z_{2,1}) -$$
$$- \cos\varphi_1\left[\cos\alpha_{1,2}\sin(z_{1,2} + z_{2,1}) + \sin\alpha_{1,2}\sin z_{2,1}\frac{\gamma''_{1,2}}{\rho''}\right]. \qquad (7)$$

Из того же треугольника $1P2$ можем написать:

$$\sin\lambda_{1,2}\cos\varphi_2 = \sin u\sin(\alpha_{1,2} + \Theta) \qquad (8)$$

или

$$\sin\lambda_{1,2}\cos\varphi_2 = \sin u(\sin\alpha_{1,2}\cos\Theta + \cos\alpha_{1,2}\sin\Theta). \qquad (9)$$

Подставив сюда выражения (4) и (5), найдем:

$$\sin\lambda_{1,2}\cos\varphi_2 = -\sin\alpha_{1,2}(\sin z_{1,2}\cos z_{2,1} +$$
$$+ \cos z_{1,2}\sin z_{2,1}\cos\gamma_{1,2}) + \cos\alpha_{1,2}\sin z_{2,1}\sin\gamma_{1,2}. \qquad (10)$$

Окончательно с учетом величины угла $\gamma_{1,2}$ определим:

$$\sin\lambda_{1,2} = \frac{-\sin\alpha_{1,2}\sin(z_{1,2} + z_{2,1}) + \cos\alpha_{1,2}\sin z_{2,1}\frac{\gamma''_{1,2}}{\rho''}}{\cos\varphi_2}. \qquad (11)$$

Для отыскания обратного азимута $\alpha_{2,1}$ на рисунке дополнительно проведем дугу большого круга σ, соединяющую точки P и $2'$. Буквой x обозначим сферический угол $P2'1$.

Из сферического треугольника $1P2'$

$$\cos\sigma = \sin\varphi_1\cos z_{1,2} + \cos\varphi_1\sin z_{1,2}\cos\alpha_{1,2}, \qquad (12)$$

а из сферического треугольника $2P2'$

$$\cos\sigma = -\sin\varphi_2\cos z_{2,1} + \cos\varphi_1\sin z_{2,1}\cos(\alpha_{2,1} - 180^\circ)$$

или

$$\cos\sigma = -\sin\varphi_2\cos z_{2,1} - \cos\varphi_2\sin z_{2,1}\cos\alpha_{2,1}. \qquad (13)$$

Из (12) и (13) найдем:

$$\cos\alpha_{2,1} = -\frac{\sin\varphi_1\cos z_{1,2} + \sin\varphi_2\cos z_{2,1} + \cos\varphi_1\cos\alpha_{1,2}\sin z_{1,2}}{\cos\varphi_2\sin z_{2,1}}, \qquad (14)$$

В свою очередь, из этих же двух треугольников можно записать следующие соотношения:

$$\sin\sigma = \frac{\sin\alpha_{1,2}\cos\varphi_1}{\sin x}; \quad \sin\sigma = \frac{-\sin\alpha_{2,1}\cos\varphi_2}{\sin(x+\gamma_{1,2})},$$

откуда

$$\sin\alpha_{2,1} = -\frac{\sin\alpha_{1,2}\cos\varphi_1\sin(x+\gamma_{1,2})}{\cos\varphi_2\sin x}$$

или

$$\sin\alpha_{2,1} = -\frac{\sin\alpha_{1,2}\cos\varphi_1(\sin x\cos\gamma_{1,2} + \cos x\sin\gamma_{1,2})}{\cos\varphi_2\sin x}.$$

Разделив числитель и знаменатель правой части на $\sin x$, имеем:

$$\sin \alpha_{2,1} = -\frac{\sin \alpha_{1,2} \cos \varphi_1 (\cos \gamma_{1,2} + \sin \gamma_{1,2} \operatorname{ctg} x)}{\cos \varphi_2}. \tag{15}$$

Для сферического треугольника $1\,P\,2'$ запишем следующее известное соотношение:

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \varphi_1) \sin z_{1,2} = \operatorname{ctg} x \sin \alpha_{1,2} + \cos \alpha_{1,2} \cos z_{1,2},$$

откуда

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 \sin z_{1,2} - \cos \alpha_{1,2} \cos z_{1,2}}{\sin \alpha_{1,2}}. \tag{16}$$

Заменив в формуле (15) $\operatorname{ctg} x$ его значением из (16), для $\alpha_{2,1}$ получим:

$$\sin \alpha_{1,2} = \\ = \frac{-\sin \alpha_{1,2} \cos \varphi_1 \cos \gamma_{1,2} - \sin \varphi_1 \sin z_{1,2} \sin \gamma_{1,2} + \cos \alpha_{1,2} \cos \varphi_1 \cos z_{1,2} \sin \gamma_{1,2}}{\cos \varphi_2}. \tag{17}$$

С учетом малости угла $\gamma_{1,2}$ окончательно можем написать:

$$\sin \alpha_{2,1} = -\frac{\cos \varphi_1 \left(\cos \alpha_{1,2} \cos z_{1,2} \frac{\gamma''_{1,2}}{\rho''} - \sin \alpha_{1,2} \right) - \sin \varphi_1 \sin z_{1,2} \frac{\gamma''_{1,2}}{\rho''}}{\cos \varphi_2}. \tag{18}$$

Выражения (7), (11) и (18) совершенно идентичны полученным ранее значениям для вычисления широт, долгот и азимутов.

Дополнительно здесь получена формула обратного азимута в функции косинуса.

Разделив (17) на (14), получим:

$$\operatorname{tg} \alpha_{2,1} = \frac{(-\sin \alpha_{1,2} \cos \varphi_1 \cos \gamma_{1,2} - \sin \varphi_1 \sin z_{1,2} \sin \gamma_{1,2}) \sin z_{2,1} +}{-(\sin \varphi_1 \cos z_{1,2} + \sin \varphi_2 \cos z_{2,1} + \cos \varphi_1 \sin z_{1,2} \cos \alpha_{1,2})} \\ \frac{+ \cos \alpha_{1,2} \cos \varphi_1 \cos z_{1,2} \sin \gamma_{1,2} \sin z_{2,1}}{-(\sin \varphi_1 \cos z_{1,2} + \sin \varphi_2 \cos z_{2,1} + \cos \varphi_1 \sin z_{1,2} \cos \alpha_{1,2})}. \tag{19}$$

После некоторых преобразований знаменателя выражение (19) примет вид:

$$\operatorname{tg} \alpha_{2,1} = \frac{\cos \varphi_1 \cos \alpha_{1,2} \cos z_{1,2} \sin \gamma_{1,2} - \sin \alpha_{1,2} \cos \gamma_{1,2}) -}{-(A' \cos \varphi_1 + B' \sin \varphi_1)} \\ \frac{- \sin \varphi_1 \sin z_{1,2} \sin \gamma_{1,2}}{-(A' \cos \varphi_1 + B' \sin \varphi_1)}. \tag{20}$$

Здесь

$$A' = \cos \alpha_{1,2} (\sin z_{1,2} \sin z_{2,1} - \cos z_{1,2} \cos z_{2,1} \cos \gamma_{1,2}) - \sin \alpha_{1,2} \cos z_{2,1} \sin \gamma_{1,2}],$$

$$B' = \sin z_{1,2} \cos z_{2,1} \cos \gamma_{1,2} + \cos z_{1,2} \sin z_{2,1}$$

По малости угла $\gamma_{1,2}$ выражение (20) запишем:

$$\operatorname{tg} \alpha_{2,1} = \frac{\cos \varphi_1 \left(\sin \alpha_{1,2} - \cos \alpha_{1,2} \cos z_{1,2} \frac{\gamma''_{1,2}}{\rho''} \right) + \sin \varphi_1 \sin z_{1,2} \frac{\gamma''_{1,2}}{\rho''}}{-A \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1} \tag{21}$$

$$A = \cos \alpha_{1,2} \cos (z_{1,2} + z_{2,1}) + \sin \alpha_{1,2} \cos z_{2,1} \frac{\gamma''_{1,2}}{\rho''},$$

$$B = \sin (z_{1,2} + z_{2,1}),$$

Во всех приведенных формулах угол $\gamma_{1,2}$ вычисляется как и прежде (см. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудский В. И. Некоторое обобщение формул передачи астрономических координат и азимута. Республиканский межведомственный научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 4. Изд-во Львовского ун-та, 1966

Работа поступила
24 июня 1966 г.