

Л. С. ХИЖАК, Д. И. МАСЛИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ ГОДОВОГО ХОДА КОЭФФИЦИЕНТА РЕФРАКЦИИ

Коэффициент рефракции является функцией многих переменных как известных, так и неизвестных величин, которые очень трудно поддаются учету. К этим величинам можно отнести следующие: температура, вертикальный температурный градиент, давление, влажность, скорость ветра, облачность, а также высота прохождения луча, условия прохождения луча, время суток, время года, общая высота над уровнем моря и другие.

Проведенный нами и другими авторами анализ экспериментальных материалов по измерению зенитных расстояний указал на наличие сезонного изменения коэффициента рефракции. Однако изучить закономерности этого изменения существующими методами — задача очень сложная, так как совокупное влияние перечисленных факторов подчиняется очень сложным законам, выявить которые из отдельного эксперимента не представляется возможным.

На наш взгляд, наиболее рациональным методом определения указанных закономерностей является статистический метод обработки большого экспериментального материала, выполненного в различных районах и в различных условиях. Такой метод обработки позволяет выделить влияние интересующих нас факторов на годовой ход коэффициента рефракции (k), исключая в большой степени влияние остальных факторов. Из перечисленных выше факторов наибольшее влияние оказывают вертикальный градиент температуры и высота прохождения визирного луча.

Учитывая это, представим значение k в виде следующей зависимости:

$$k = k_0 + \alpha + \beta + \gamma \psi + \delta h, \quad (1)$$

где k_0 — значение коэффициента рефракции при $\psi=0$ и $h=0$;

h — эквивалентная высота, которая равна 0 при $\psi=0$, $h>0$ при $\psi<0$ и $h<0$ при $\psi>0$. Приписывание знака эквивалентной высоте вызвано тем, что при $\psi>0$ k уменьшается и при $\psi<0$ k увеличивается с высотой. При этом предполагается, что коэффициент δ как при инверсии, так и при нормальной стратификации один и тот же;

γ — вертикальный температурный градиент на высоте 1 м;

α — суммарное влияние остальных факторов на суточный ход;

β — суммарное влияние остальных факторов на годовой ход;

γ и δ — коэффициенты.

Конечно, каждое в отдельности измеренное значение k не может удовлетворять равенству (1). Однако можно предположить, что осред-

ненные из большого количества наблюдений значения k , γ , h будут соответствовать указанной зависимости — модели.

Для проведения подобных исследований были использованы наиболее многочисленные по количеству определений значения k , γ и h , полевые материалы, полученные нами в 1966 г. на геодезическом полигоне ЛПИ (Судовая Вишня) и результаты исследований ЦНИИГАиК в 1951 г. на геодезическом полигоне в 40—70 км к юго-востоку от г. Москвы [1].

Учитывая особенность этих материалов — наблюдения ЦНИИГАиК выполнены в летний период (июнь, июль, август и сентябрь), а наблюдения на полигоне ЛПИ выполнены в феврале и апреле, — мы разделили весь указанный материал на шесть групп:

1-я группа — наблюдения в первой половине февраля (наблюдения проводились при отрицательных температурах и наличии снежного покрова);

2-я группа — наблюдения во второй половине февраля и в начале марта (небольшие положительные температуры, снежный покров отсутствует);

3-я группа — наблюдения в апреле;

4-я группа — наблюдения в июне;

5-я группа — наблюдения в июле—августе;

6-я группа — наблюдения в сентябре.

Кроме того, все светлое время суток также было разбито на 6 примерно равных периодов, причем длина каждого периода зависела от продолжительности светлого времени дня.

Для каждой группы и каждого периода вычислялись средние k , γ и h , причем в обработку брались только те результаты, для которых можно было определить γ и h . Абсолютное значение h соответствовало эквивалентной высоте h_0 , в ма γ — значение вертикального градиента температуры на высоте 1 м в $^{\circ}\text{C}/\text{м}$.

Полученные средние значения k , γ и h , а также количество серий измерений n были выписаны по группам и периодам в таблице.

Предварительный анализ данных таблицы указывает на наличие годового хода k . Он отчетливо выражен для всех периодов, за исключением первого. Наглядно видна зависимость между k и вертикальным градиентом температуры. Так, в первом периоде не заметен годовой ход γ , чем и обусловлено отсутствие годового хода k .

Отчетливо также виден и суточный ход как градиента, так и коэффициента рефракции для всех групп (сезонов).

Для определения влияния на величину k каждого рассматриваемого фактора в отдельности применим ковариационный анализ.

Наши основные предположения в этой задаче будут сводиться к следующему:

$$k_{ij} = k_0 + \alpha_i + \beta_j + \gamma \lambda_{ij} + \delta h_{ij} + l_{ij}, \quad (2)$$

$$\sum \alpha_i = 0, \quad \sum \beta_j = 0, \quad (3)$$

k_0 — генеральное среднее значение k ;

l_{ij} — независимы и распределены по закону: $N(0, \sigma^2), \dots$ (4)

где k_{ij} — значение коэффициента рефракции в i - j -й ячейке;

α_i, β_j — суммарное влияние остальных факторов на суточный и годовой ход, соответственно в i -м периоде и j -й группе; будем считать что взаимосвязи между столбцами и строками = 0;

$\gamma \lambda_{ij}$ — ошибки определения значений k_{ij} .

При этом отметим, что зависимость, выраженная формулой (2), будет иметь место при определении k_{ij} из значительного количества

экспериментальных материалов, так как в этом случае влияние уклонений от описанной зависимости можно считать случайным. Остаточные же ошибки войдут в последний член l_{ij} и будем считать, что они подчиняются написанному нами условию.

Дальнейшая обработка материалов заключалась в определении величин (см. Г. Шеффе «Дисперсионный анализ» [2]).

$$\begin{aligned} m_{kk} &= \sum_i \sum_j k_{ij}^2 - J \sum_i k_{i*}^2 - I \sum_j k_{*j}^2 + JI k_{**}^2, \\ m_{\gamma\gamma} &= \sum_i \sum_j \gamma_{ij}^2 - J \sum_i \gamma_{i*}^2 - I \sum_j \gamma_{*j}^2 + JI \gamma_{**}^2, \\ m_{hh} &= \sum_i \sum_j h_{ij}^2 - J \sum_i h_{i*}^2 - I \sum_j h_{*j}^2 + JI h_{**}^2, \\ m_{k\gamma} &= \sum_i \sum_j k_{ij} \gamma_{ij} - J \sum_i k_{i*} \gamma_{i*} - I \sum_j k_{*j} \gamma_{*j} + JI k_{**} \gamma_{**}, \\ m_{kh} &= \sum_i \sum_j k_{ij} h_{ij} - J \sum_i k_{i*} h_{i*} - I \sum_j k_{*j} h_{*j} + JI k_{**} h_{**}, \\ m_{\gamma h} &= \sum_i \sum_j \gamma_{ij} h_{ij} - J \sum_i \gamma_{i*} h_{i*} - I \sum_j \gamma_{*j} h_{*j} + JI \gamma_{**} h_{**}, \end{aligned} \quad (5)$$

где k_{i*} , γ_{i*} , h_{i*} — средние годовые значения соответственно k , γ и h для i -го периода (средние из групп для каждого периода);

i — номер периода;

j — номер группы;

I — количество периодов;

J — количество групп;

k_{*j} , γ_{*j} , h_{*j} — средние суточные значения k , γ и h для j -й группы;

k_{**} , γ_{**} , h_{**} — общее среднее из всех результатов.

Для оценки величин α_i , β_j , k_0 , v и δ вычисляются значения $\bar{\alpha}_i$, $\bar{\beta}_j$, \bar{k}_0 , v и δ , используя величины, определяемые системой (5). При этом значения v и δ получаем из следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} m_{\gamma\gamma} v + m_{\gamma h} \bar{\delta} &= m_{k\gamma}, \\ m_{\gamma h} v + m_{hh} \bar{\delta} &= m_{kh} \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

а значения $\bar{\alpha}_i$, $\bar{\beta}_j$ и \bar{k}_0 получим из соотношений

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha}_i &= k_{i*} - k_{**} - v(\gamma_{i*} - \gamma_{**}) - \bar{\delta}(h_{i*} - h_{**}), \\ \bar{\beta}_j &= k_{*j} - k_{**} - v(\gamma_{*j} - \gamma_{**}) - \bar{\delta}(h_{*j} - h_{**}), \\ \bar{k}_0 &= k_{**} - v\gamma_{**} - \bar{\delta}h_{**}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Для проверки наличия остаточного годового хода k после исключения влияния h и γ был применен критерий

$$F_{\beta\pi} = \frac{(\Phi_{\omega\beta} - \Phi_{\Omega})(J \cdot I - J - I - 1)}{\Phi_{\Omega}(J - 1)}, \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\omega\beta} &= m_{kk\beta} - m_{k\gamma\beta} v_{\beta} - m_{kh\beta} \bar{\delta}_{\beta}, \\ \Phi_{\Omega} &= m_{kk} - m_{k\gamma} v - m_{kh} \bar{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Величины $m_{kk\beta}$, $m_{k\gamma\beta}$ и т. д. определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 m_{kk\beta} &= \sum_i \sum_j k_{ij}^2 - J \sum_i k_{i*}^2, \\
 m_{k\gamma\beta} &= \sum_i \sum_j \gamma_{ij}^2 - J \sum_i \gamma_{i*}^2, \\
 m_{hh\beta} &= \sum_i \sum_j h_{ij}^2 - J \sum_i h_{i*}^2, \\
 m_{k\gamma\beta} &= \sum_i \sum_j k_{ij}\gamma_{ij} - J \sum_i k_{i*}\gamma_{i*}, \\
 m_{hh\beta} &= \sum_i \sum_j k_{ij}h_{ij} - J \sum_i k_{i*}h_{i*}, \\
 m_{\gamma h\beta} &= \sum_i \sum_j \gamma_{ij}h_{ij} - J \sum_i \gamma_{i*}h_{i*}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

а коэффициенты ν_β и δ_β из следующей системы уравнений

$$\begin{aligned}
 m_{kk\beta}\nu_\beta + m_{kh\beta}\delta_\beta &= m_{k\gamma\beta}, \\
 m_{kh\beta}\nu_\beta + m_{hh\beta}\delta_\beta &= m_{h\beta}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Если $F_{\beta\text{п}} < F_{\beta\text{т}}$ (где $F_{\beta\text{т}}$ — теоретическое распределение), то можно утверждать, что влияние остальных, неучтенных нами факторов на годовой ход k меньше ошибок определения средних значений k в ячейке. Аналогично можно провести оценку влияния неучтенных факторов на суточный ход.

Результаты вычислений значений δ , ν , \bar{k}_0 , \bar{a}_i и $\bar{\beta}_j$ приведены в таблице.

Анализируя эти результаты, отметим следующее:

1. Все осредненные значения k в ячейках оказались положительными величинами. Следовательно, отрицательные значения k , полученные в отдельных сериях, можно объяснить большими по абсолютной величине градиентами температуры при нормальной стратификации.

2. В зимние месяцы осредненный вертикальный градиент остается положительным во всех периодах дня.

3. Данные нашей таблицы наглядно показывают суточный и годовой ходы вертикального градиента температуры. В годовом ходе ν достигает максимальных положительных значений в зимние периоды и минимальных — в летние. В суточном ходе максимальных значений градиент достигает в утренние и вечерние периоды, а минимальных — в близполуденные. При этом в зимние периоды на протяжении всего дня градиент остается положительным, а в летний период в близполуденное время принимает отрицательные значения.

4. Значение k_0 (где k_0 — коэффициент вертикальной рефракции при $\gamma=0$) получилось равным 0,1809, то есть, если предположить, что при изотермии коэффициент k не зависит от высоты, его величина равна указанной выше.

5. Оценка результатов обработки показала, что в условиях, в которых проводились наши исследования, годовой и суточный ходы после исключения из них влияния вертикального градиента температуры и высоты отсутствуют или во всяком случае меньше ошибок определений средних значений коэффициента k , так как $F_{\alpha\text{п}} < F_{\alpha\text{т}}$ и $F_{\beta\text{п}} < F_{\beta\text{т}}$.

Периоды	Месяцы			Февраль			Март			Апрель		
	<i>k</i>	γ	<i>h</i>	<i>k</i>	γ	<i>h</i>	<i>k</i>	γ	<i>h</i>	<i>k</i>	γ	<i>h</i>
I период <i>n</i>	+0,3102	+0,1747 57	-21,47	+0,3595	+0,1160, 54	-21,01	+0,2237	-0,0269 51	+ 4,			
II период <i>n</i>	+0,2604	+0,1167 88	-16,86	+0,2537	+0,0356 87	-12,95	+0,2001	-0,0143 92	+11,			
III период <i>n</i>	+0,2067	+0,0336 101	-12,06	+0,1646	-0,0054 109	- 3,15	+0,1333	-0,0581 149	+12,			
IV период <i>n</i>	+0,1979	+0,0772 101	-14,78	+0,1522	-0,0115 125	- 3,76	+0,1253	-0,0591 157	+13,			
V период <i>n</i>	+0,1940	+0,0570 93	-11,73	+0,1569	-0,0195 136	- 6,12	+0,1193	-0,0569 148	+ 7,			
VI период <i>n</i>	+0,2351	+0,1754 76	-18,74	+0,1970	+0,0634 64	-14,12	+0,1848	+0,0215 73	-23,			
$k_{i*}, \gamma_{i*}, h_{i*}$	+0,2340	+0,1058	-15,94	+0,2139	+0,0296	-10,20	+0,1644	-0,0323 + 4				
$\bar{\beta}_j$		-0,0106			-0,0083				+0,0024			
	$\sum_i \sum_j k_{ij}^2 + 1,957405$			$\sum_i \sum_j \gamma_{ij}^2 + 1,714554$			$\sum_i \sum_j h_{ij}^2 + 6966,2140$					
	$-J \sum_i k_{i*}^2 - 1,723668$			$-J \sum_i \gamma_{i*}^2 - 0,870696$			$-J \sum_i h_{i*}^2 - 3231,8034$					
	$-I \sum_j k_{*j}^2 - 1,400637$			$-I \sum_j \gamma_{*j}^2 - 0,123816$			$-I \sum_j h_{*j}^2 - 2518,3476$					
	$J I k_{**}^2 + 1,363290$			$J I \gamma_{**}^2 + 0,026050$			$J I h_{**}^2 + 163,3284$					
	m_{kk}	+ 0,196391		$m_{\gamma\gamma}$	+ 0,746092		m_{hh}	+ 1379,3914				
	$m_{kk\beta}$	+ 0,233738		$m_{\gamma\gamma\beta}$	+ 0,843858		$m_{hh\beta}$	+ 3734,4106				
	m_{kka}	+ 0,556769		$m_{\gamma\gamma\alpha}$	+ 1,590737		$m_{hh\alpha}$	+ 4447,8664				

Ковариационная таблица

Июнь			Июль — август			Сентябрь			k_{*j}	γ_{*j}	h_{*j}	α_i	
k	γ	h	k	γ	h	k	γ	h					
+0,5231 57	+0,6453 —0,0875 24	-19,98 +10,38	+0,2782 +0,0813	+0,1663 -0,0749 83	-7,72 +5,96	+0,5518 +0,1186	+0,5038 -0,1170 27	-19,35 + 6,00					
+0,0592 24	-0,1964 25	+19,76	+0,0572	-0,1514 118	+4,41	+0,0713 +0,0723	-0,1944 35	+18,10	+0,3744 +0,1622	+0,2632 -0,0236	-14,25 + 0,67	+0,0772	
+0,0185 25	-0,4087 39	+19,60	+0,0622	-0,1426 133	+8,84	+0,0723 +0,1144	-0,1924 42	+17,48	+0,1086 +0,1073	-0,0955 -0,1228	+ 6,58 + 6,76	-0,0240	
+0,0339 39	-0,3204 86	+17,96	+0,1383	-0,0297 134	+1,85	+0,1144 54	-0,0718 + 7,84		+0,1319 +0,2830	-0,0736 +0,2137	+ 2,89 -15,42	-0,0136	
+0,2994 79	+0,2810 79	-10,13	+0,3257	+0,1611 53	-7,16	+0,4562 +0,5800	-18,90					-0,0145	
+0,1671 +0,0001	-0,0144 +0,0001	+6,26	+0,1572	-0,0119 -0,0173	+1,03	+0,2308 +0,0168	+0,0847 + 1,86		+0,1946 +0,0269	+0,0269 - 2,13		-0,001224	
$\sum_i \sum_j k_{ij} \gamma_{ij}$			+ 1,130490			$\sum_i \sum_j k_{ij} h_{ij}$			- 64,426928			$\sum_i \sum_j \gamma_{ij} h_{ij}$	
$-J \sum_i k_{i*} \gamma_{i*}$			- 0,731614			$-J \sum_i k_{i*} h_{i*}$			- 85,558687			k_{**}	
$-I \sum_j k_{*j} \gamma_{*j}$			- 0,246302			$-J \sum_i \gamma_{i*} h_{i*}$			+ 46,615554			$+ 0,1946$	
$Jk_{**} \gamma_{**}$			+ 0,188451			$-J \sum_i \gamma_{i*} h_{i*}$			+ 52,397328			δ	
$Jk_{**} h_{**}$			- 14,921928			$-I \sum_j \gamma_{*j} h_{*j}$			+ 21,474468			$- 0,0113$	
$Jk_{**} h_{**}$			- 2,062692			$-I \sum_j \gamma_{*j} h_{*j}$			+ 12,419160			$+ 0,419670$	
k_{**}			δh_{**}			δh_{**}			δ			$- 0,002119$	
γ_{**}			γ_{**}			γ_{**}			γ_{**}			$+ 0,458410$	
γ_{β}			γ_{β}			γ_{β}			γ_{β}			$- 0,000837$	
γ_{α}			γ_{α}			γ_{α}			γ_{α}			$+ 0,439790$	
$m_{k\gamma}$			+ 0,341025			m_{kh}			- 11,258834			$- 22,804891$	
$m_{k\gamma\beta}$			+ 0,398876			$m_{kh\beta}$			- 17,811374			$- 33,161359$	
$m_{k\gamma\alpha}$			+ 0,84188			$m_{kh\alpha}$			- 42,952460			$+ 0,043408$	
$m_{\gamma h}$			$m_{\gamma h}$			$m_{\gamma h\beta}$			- 73,139527			$+ 0,039492$	
$m_{\gamma h\alpha}$			$m_{\gamma h\alpha}$			$\varphi_{\omega\beta}$			$\varphi_{\omega\alpha}$			$+ 0,060432$	

Годовой и суточный ходы после исключения влияния вертикального температурного градиента и высоты показаны соответственно в строке β_j и a_i таблицы. Таким образом, представленная модель хорошо характеризует зависимость среднего значения k от вертикального градиента температуры и высоты прохождения луча над подстилающей поверхностью.

6. Величины v и δ оказались равными:

$$v = +0,419670,$$

$$\delta = -0,001224,$$

то есть при изменении вертикального градиента температуры на $1^{\circ}/m$ коэффициент рефракции изменяется на 0,419670, а при изменении высоты на 1 м величина k изменяется на 0,001 в пределах высот в среднем 10—40 м.

Таким образом, годовой коэффициент рефракции вызван годовым ходом вертикального градиента температуры. Влияние же остальных рассматриваемых факторов меньше ошибок определения средних значений k .

ЛИТЕРАТУРА

1. Изотов А. А., Пеллинен Л. П. Исследование земной рефракции и методов геодезического нивелирования. Труды ЦНИИГАиК, вып. 102, Геодезиздат, 1955.
2. Шеффе Г. Дисперсионный анализ, перевод с английского. Физматгиз, М., 1963.

Работа поступила
23 сентября 1966 г.