

П. И. ЕФИМОВ

ПРОДОЛЬНЫЙ И ПОПЕРЕЧНЫЙ СДВИГИ ТРИАНГУЛЯЦИОННОГО РЯДА С ДОПОЛНИТЕЛЬНО ИЗМЕРЕННЫМИ СВЯЗУЮЩИМИ СТОРОНАМИ

1. В статье «О продольном и поперечном сдвигах триангуляционного ряда» [1] предложены формулы для подсчета величин продольного и поперечного сдвигов ряда, которые отражают не только размеры сторон треугольников, их количество и форму, но и форму самого ряда.

Для ряда произвольной формы, состоящего из правильных треугольников, эти формулы имеют вид:

1. Ряд уравновешен только за условия фигур

$$\frac{1}{P_{t_{n+1}}} = \frac{1}{P_{u_{n+1}}} = 15,90 \cdot 10^{-12} [D^2]_{n+1}^1 \quad (1)$$

2. Ряд уравновешен за условия фигур, базисов (твердых сторон) и дирекционных углов

$$\frac{1}{P_{t_{n+1}}} = \frac{1}{P_{u_{n+1}}} = 15,90 \cdot 10^{-12} \left\{ [D^2]_{n+1}^1 - \frac{[(x_{n+1} - x)]_{n+1}^2 + [(y_{n+1} - y)]_{n+1}^2}{n} \right\} \quad (2)$$

Применительно к ряду, вытянутому в одном направлении, формула (2) примет вид

$$\frac{1}{P_{t_{n+1}}} = \frac{1}{P_{u_{n+1}}} = \frac{1}{3} s^2 \cdot 10^{-12} (n^3 + 8n) \quad (3)$$

Вычисление величин средних квадратических ошибок $m_{t_{n+1}}$ и $m_{u_{n+1}}$ в случаях применения формул (1), (2) и (3) производится по формуле

$$m_{\theta} = \pm \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\theta}}} \cdot 10^3 \quad (4)$$

В формулах (1), (2), (3) и (4) приняты следующие обозначения:
 $\frac{1}{P_{\theta}}$ — величина, обратная весу либо продольного, либо поперечного сдвига;

μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса;

$[D^2]_{n+1}^1$ — сумма квадратов расстояний вершин ходовой линии от $(n+1)$ -ой до всех предшествующих;
 $[(x_{n+1} - x)]^2$ и $[(y_{n+1} - y)]^2$ — квадраты сумм проекций расстояний вершин ходовой линии на координатные оси;
 n — число треугольников ряда;
 s — длина стороны треугольника (в км).

Ходовая линия назначена по вершинам промежуточных углов, а направление оси y -ков совпадает с направлением замыкающей ряда.

При проектировании триангуляционного ряда как типовой схемы построения геодезического обоснования при строительстве надземных и подземных сооружений и, в частности тоннелей различного назначения, величины продольного и поперечного сдвигов ряда (m_t и m_u) обычно предусматриваются соответствующими техническими условиями. Если величины m_t и m_u запроектированного ряда выходят за установленные пределы, то уменьшение их может быть достигнуто либо изменением величины средней квадратической ошибки измерения угла,

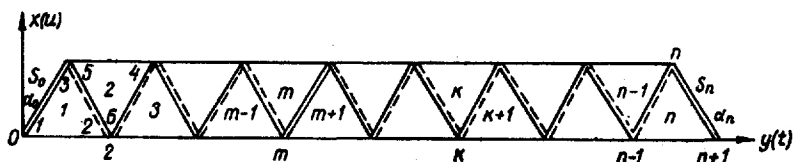


Рис. 1.

либо изменением формы ряда и формы входящих в него треугольников. Может случиться, что эти возможности уменьшения величин сдвигов ряда и доведения их до требуемых размеров практически не могут быть реализованы. В таком случае можно рекомендовать третий путь, заключающийся в измерении дополнительно одной или нескольких связующих сторон ряда.

Это измерение приведет к резкому уменьшению продольного сдвига ряда. Чтобы получить значительное уменьшение величины поперечного сдвига, необходимо определить азимуты дополнительно измеренных связующих сторон ряда, с последующим переходом к дирекционным углам этих сторон. В связи с этим можно предложить соответствующие формулы для вычисления продольного и поперечного сдвигов триангуляционного ряда с дополнительно измеренными связующими сторонами и определенными значениями дирекционных углов этих сторон.

Приведенные далее формулы так же, как и формулы (1) и (2), отражают помимо прочих факторов, действующих на величины продольного и поперечного сдвигов ряда, еще и фактор изломанности самого ряда.

Пусть в триангуляционном ряду, изображенном на рис. 1, кроме крайних его сторон, дополнительно измерена связующая сторона ряда $s_{m, m+1}$ и определен ее дирекционный угол. В результате этого ряд разделился на два звена, которые обозначим соответственно через I и II.

В данном случае, кроме условий фигур для треугольников всего ряда, следует написать еще четыре условных уравнения — два сторон и два дирекционных углов.

Эти условные уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1(1) - \delta_2(2) + \delta_3(5) - \delta_4(4) + \dots + \\ + \delta_{3m-2}(3m-2) - \delta_{3m-1}(3m-1) + W_{s_I} = 0, \\ \delta_{3m+1}(3m+1) - \delta_{3m+2}(3m+2) + \dots + \\ + \delta_{3n-2}(3n-2) - \delta_{3n-1}(3n-1) + W_{s_{II}} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} - (3) + (6) - \dots - (3m) + W_{a_I} = 0, \\ (3m+3) - (3m+6) + \dots - (3n) + W_{a_{II}} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Весовые функции для координат какой-либо вершины ходовой линии, идущей по связующим сторонам ряда, в общем виде могут быть записаны так:

$$\left. \begin{aligned} f_{y_K} &= \frac{1}{M10^6} \{ \Sigma [(y_K - y) \delta_A(A) - (y_K - y) \delta_B(B)] + \\ &\quad + \Sigma [k(x_K - x) (\mp c)] \}, \\ f_{x_K} &= \frac{1}{M10^6} \{ \Sigma [(x_K - x) \delta_A(A) - (x_K - x) \delta_B(B)] + \\ &\quad + \Sigma [-k(y_K - y) (\mp c)] \}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь (А), (В) и (С) — поправки соответственно связующих и промежуточных углов;

δ_A и δ_B — переменные логарифмов синусов связующих углов, при изменении самих углов на 1" (в единицах шестого знака логарифмов); $K = \frac{M \cdot 10^6}{\rho''} = 2,106$ (M — модуль перехода, равный 0,43429...).

Для случая измерения и определения дирекционного угла, кроме двух крайних сторон ряда, еще дополнительно какой-либо его третьей связующей стороны формула для вычисления величины обратного веса функции уравновешенных элементов при двухгрупповом способе уравновешивания ряда за условия фигур, сторон и дирекционных углов, может быть записана так:

$$\frac{1}{P_{\Theta}} = [FF] - \frac{[AF]_I^2}{[AA]_I} - \frac{[AF]_{II}^2}{[AA]_{II}} - \frac{[BF \cdot 1]_I^2}{[BB \cdot 1]_I} - \frac{[BF \cdot 1]_{II}^2}{[BB \cdot 1]_{II}}. \quad (8)$$

Здесь F_i , A_i и B_i — преобразованные коэффициенты весовой функции, а значки I или II указывают, к какому звену (части) ряда относятся соответствующие алгоритмы Гаусса.

Для ряда хотя и произвольной формы, но состоящего из правильных треугольников, формула (8) принимает вид

$$\frac{1}{P_{\Theta}} = [FF] - \frac{[AF]_I^2}{[AA]_I} - \frac{[AF]_{II}^2}{[AA]_{II}} - \frac{[BF]_I^2}{[BB]_I} - \frac{[BF]_{II}^2}{[BB]_{II}}. \quad (9)$$

Определив значения величин членов формулы (9), мы получим для ряда с дополнительно измеренной связующей стороной и определенным ее дирекционным углом, следующую формулу для вычисления

$\frac{1}{P_{y_K}}$ и $\frac{1}{P_{x_K}}$

$$\frac{1}{P_{y_K}} = \frac{1}{P_{x_K}} = 15,90 \cdot 10^{-12} \left\{ [D^2]_K - \frac{[(x_K - x)]_K^2 + [(y_K - y)]_K^2}{n_I} - \frac{[(x_K - x)]_K^{2m+1} + [(y_K - y)]_K^{2m+1}}{n_{II}} \right\}. \quad (10)$$

В этой формуле, кроме обозначений, принятых в формуле (2), n_I и n_{II} — число треугольников в звеньях (частях) ряда, а $i = 1, 2, 3, \dots, m$.

Если направление оси y совместить с направлением замыкающей ряда то для продольного и поперечного сдвигов конечной вершины ряда можно написать

$$\frac{1}{P_{t_{n+1}}} = \frac{1}{P_{u_{n+1}}} = 15,90 \cdot 10^{-12} \left\{ [D^2]_{n+1} - \frac{[(x_{n+1} - x)]_{n+1}^2 + [(y_{n+1} - y)]_{n+1}^2}{n_I} - \frac{[(x_{n+1} - x)]_{n+1}^{2m+1} + [(y_{n+1} - y)]_{n+1}^{2m+1}}{n_{II}} \right\}. \quad (11)$$

Вычисление величин средних квадратических ошибок координат любой k -ой вершины ряда (m_{y_K} и m_{x_K}) или продольного и поперечного его сдвигов ($m_{t_{n+1}}$ и $m_{u_{n+1}}$) следует производить по формуле (4), а для вычисления величины средней квадратической ошибки общего линейного смещения вершины применить формулы:

$$M_{n+1}^2 = m_{t_{n+1}}^2 + m_{u_{n+1}}^2 \quad \text{и} \quad M_K^2 = m_{y_K}^2 + m_{x_K}^2. \quad (12)$$

Написать формулы для вычисления величин $\frac{1}{P_{y_K}}$, $\frac{1}{P_{x_K}}$, $\frac{1}{P_{t_{n+1}}}$ и $\frac{1}{P_{u_{n+1}}}$ при различных вариантах учета, возникающих в ряду условий, трудностей не представляет.

Здесь напишем формулы для вычисления величин обратных весов для продольного и поперечного сдвигов ряда, уравновешенного за условия фигур и трех сторон:

$$\frac{1}{P_{t_{n+1}}} = 15,90 \cdot 10^{-12} \left\{ [D^2]_{n+1} - \frac{[(y_{n+1} - y)]_{n+1}^2}{n_I} - \frac{[(y_{n+1} - y)]_{n+1}^{2m+1}}{n_{II}} \right\}, \quad (13)$$

$$\frac{1}{P_{u_{n+1}}} = 15,90 \cdot 10^{-12} \left\{ [D^2]_{n+1} - \right.$$

$$- \left. \frac{[(x_{n+1} - x)]_{n+1}^2}{n_I} - \frac{[(x_{n+1} - x)]_{n+1}^{m+1}}{n_{II}} \right\}, \quad (14)$$

и уравновешенного за условия фигур и трех дирекционных углов:

$$\frac{1}{P_{t_{n+1}}} = 15,90 \cdot 10^{-12} \left\{ [D^2]_{n+1}^1 - \right. \\ \left. - \frac{[(x_{n+1} - x)]_{n+1}^2}{n_I} - \frac{[(x_{n+1} - x)]_{n+1}^{m+1}}{n_{II}} \right\}, \quad (15)$$

$$\frac{1}{P_{u_{n+1}}} = 15,90 \cdot 10^{-12} \left\{ [D^2]_{n+1}^1 - \right. \\ \left. - \frac{[(y_{n+1} - y)]_{n+1}^2}{n_I} - \frac{[(y_{n+1} - y)]_{n+1}^{m+1}}{n_{II}} \right\}. \quad (16)$$

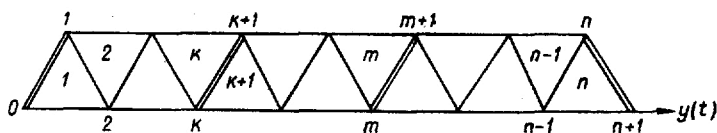


Рис. 2.

Не приводя далее подробных выводов, связанных с получением $\frac{1}{P_{y_K}}$, $\frac{1}{P_{x_K}}$, $\frac{1}{P_{t_{n+1}}}$ и $\frac{1}{P_{u_{n+1}}}$, напомним формулы для $\frac{1}{P_{t_{n+1}}}$ и $\frac{1}{P_{u_{n+1}}}$ при условии, что в ряду дополнительно измерены с определением дирекционных углов две стороны, кроме крайних (рис. 2) (ряд уравновешивается за условия фигур, трех условий сторон и трех условий дирекционных углов).

Получим, что

$$\frac{1}{P_{t_{n+1}}} = \frac{1}{P_{u_{n+1}}} = 15,90 \cdot 10^{-12} \left\{ [D^2]_{n+1}^1 - \right. \\ \left. - \frac{[(x_{n+1} - x)]_{n+1}^2 + [(y_{n+1} - y)]_{n+1}^2}{n_I} - \right. \\ \left. - \frac{[(x_{n+1} - x)]_{n+1}^{m+1} + [(y_{n+1} - y)]_{n+1}^{m+1}}{n_{II}} \right\}. \quad (17)$$

В этой формуле, кроме обозначений, принятых ранее, $i_1 = 1, 2, 3, \dots, K$; $i_{II} = K + 1, \dots, m$; n_{III} — число треугольников в третьем звене (части) ряда.

Величины m_t , m_u и M вычисляются по формулам (4) и (12).

Таким образом, формулы для вычисления P_{yK}^{-1} и P_{xK}^{-1} , или $P_{i_{n+1}}^{-1}$ и $\frac{1}{P_{i_{n+1}}}$ могут быть получены очень просто для ряда с любым количе-

ством дополнительно измеренных сторон с определенными для них значениями дирекционных углов* и для любого варианта учета возникающих при этом в ряду условий.

Все приведенные здесь формулы могут получить еще значительное упрощение для ряда, состоящего также из правильных треугольников, но вытянутого в одном направлении. Необходимо здесь же заметить, что если для вычисления величин средних квадратических ошибок дирекционных углов и длин сторон ряда треугольников безразлична форма самого ряда, то в отношении его продольного и поперечного сдвигов форма ряда (его изломанность) имеет существенное значение и при соответствующих расчетах пренебрегать формой ряда нельзя.

Практическое применение всех приведенных формул расчета точности координат любой вершины ряда, а также и вычисление его продольного и поперечного сдвигов, трудностей не вызывает. При проектировании ряда все необходимые данные можно брать графически с чертежа ряда в крупном масштабе, а сами вычисления производить на логарифмической линейке.

Анализ предлагаемых формул приводит к следующим выводам.

1. При уравнивании ряда за условия фигур, сторон и дирекционных углов дополнительное измерение и определение дирекционного угла связующей стороны ряда, расположенной, примерно, в его середине, приводит к уменьшению величин продольного и поперечного сдвигов ряда почти в два раза по сравнению с величинами этих сдвигов, вычисленными для ряда, у которого измерены (или даны как твердые) только крайние стороны и определены (или даны как твердые) дирекционные углы этих крайних сторон.

2. Дальнейшее уменьшение величин продольного и поперечного сдвигов ряда может быть достигнуто за счет измерения и определения дирекционного угла двух (кроме крайних) связующих сторон ряда, расположенных, примерно, в серединах левой и правой половин ряда. Принятие такого варианта приводит к уменьшению величин продольного и поперечного сдвигов ряда еще, примерно, на 20—25% по сравнению с величинами тех же сдвигов при наличии только одной средней дополнительно измеренной стороны ряда.

Эти выводы относятся как к прямолинейным, так и к ломаным рядам, причем, как об этом уже упоминалось ранее, фактор изломанности ряда оказывает существенное влияние на величины продольного и поперечного сдвигов ряда.

II. Все предложенные ранее в этой статье формулы расчета точности координат триангуляционного ряда и его продольного и поперечного сдвигов не учитывают влияние ошибок измерения сторон ряда и ошибок определения их дирекционных углов. Применение этих формул, особенно для рядов с небольшим количеством треугольников, может привести к неправильным выводам в отношении организации и

* Здесь, как и в дальнейшем, конечно, не предусматривается случай изменения всех связующих сторон ряда.

Величину $d\alpha_i''$ следует принять равной $\mp(\alpha_i)$ при определении дирекционного угла стороны s_i , причем, при применении формулы (20) ее надо брать с минусом, а при применении формулы (21) — с плюсом. Эти же величины ($d\alpha_i''$) в случаях вычисления дирекционных углов связующих сторон через промежуточные углы следует принимать равными:

$$\left. \begin{aligned} d\alpha_1 &= \mp(\alpha_0) - (3), \\ d\alpha_2 &= \mp(\alpha_0) - (3) + (6), \\ &\dots\dots\dots \\ d\alpha_m &= \mp(\alpha_0) - (3) + (6) - \dots\dots + (3m), \\ &\dots\dots\dots \\ d\alpha_{n-1} &= \mp(\alpha_0) - (3) + \dots\dots + (3m) - \dots\dots + (3n-3). \end{aligned} \right\} (23)$$

Имея это в виду, получим:

$$\left. \begin{aligned} d(x_1 - x_0) &= \frac{1}{M10^6} \{ (x_1 - x_0) \Delta_0(s_0) - k(y_1 - y_0)(-\alpha_0) \}, \\ d(x_2 - x_1) &= \frac{1}{M10^6} \{ (x_2 - x_1) \Delta_0(s_0) + (x_2 - x_1) \delta_1(1) - \\ &\quad - (x_2 - x_1) \delta_2(2) - k(y_2 - y_1)(-\alpha_0) - k(y_2 - y_1)(-3) \}, \\ &\dots\dots\dots \\ d(x_n - x_{n-1}) &= \frac{1}{M10^6} \{ (x_n - x_{n-1}) \Delta_0(s_0) + (x_n - x_{n-1}) \delta_1(1) - \\ &\quad - (x_n - x_{n-1}) \delta_2(2) + \dots\dots + (x_n - x_{n-1}) \delta_{3m-2}(3m-2) - \\ &\quad - (x_n - x_{n-1}) \delta_{3m-1}(3m-1) + \dots\dots\dots + \\ &\quad + (x_n - x_{n-1}) \delta_{3n-4}(3n-4) - (x_n - x_{n-1}) \delta_{3n-5}(3n-5) - \\ &\quad - k(y_n - y_{n-1})(-\alpha_0) - k(y_n - y_{n+1})(-3) - \dots\dots - \\ &\quad - k(y_n - y_{n-1})(3m) - \dots\dots - k(y_n - y_{n-1})(3n-3). \end{aligned} \right\} (24)$$

В результате суммирования выражений (24) и после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} f_{x_{n+1}} &= \frac{1}{M10^6} \left\{ [(x_n - x) \delta_{3i-2}(3i-2)]_n^1 - [(x_n - x) \delta_{3i-1}(3i-1)]_n^1 + \right. \\ &\quad + (x_n - x_0) \Delta_0(s_0) + (x_{n+1} - x_n) \Delta_n(s_n) + \\ &\quad + [-k(y_n - y)(\mp 3i)]_n^1 + [-k(y_n - y_0)(-\alpha_0)] + \\ &\quad \left. + [-k(y_{n+1} - y_n)(-\alpha_n)] \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Аналогично будем иметь

$$\begin{aligned} f_{y_{n+1}} &= \frac{1}{M10^6} \left\{ [(y_n - y) \delta_{3i-2}(3i-2)]_n^1 - [(y_n - y) \delta_{3i-1}(3i-1)]_n^1 + \right. \\ &\quad + (y_n - y_0) \Delta_0(s_0) + (y_{n+1} - y_n) \Delta_n(s_n) + \\ &\quad \left. + [k(x_n - x)(\mp 3i)]_n^1 + k(x_n - x_0)(\alpha_0) + k(x_{n+1} - x_n)(\alpha_n) \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Имея далее в виду применение двухгруппового способа уравнивания ряда за условия фигур, сторон и дирекционных углов, формулу для вычисления величины обратного веса уравниваемого элемента ломаного ряда, состоящего из правильных треугольников, можно записать так:

$$\frac{1}{P_{\theta}} = [qFF] - \frac{[qAF]^2}{[qAA]} - \frac{[qBF]^2}{[qBB]}, \quad (27)$$

где F_i , A_i и B_i — преобразованные коэффициенты весовой функции, а q — величина, обратная весу измеренного элемента.

Если теперь вес измеренного угла принять равным единице, то:

$$P_{s_i} = \frac{m_{\beta}^2}{m_{s_i}^2} \text{ и } q_i = \frac{m_{s_i}^2}{m_{\beta}^2}, \quad (28)$$

где m_{s_i} и m_{β} — средние квадратические ошибки измерения i -ой стороны и углов ряда.

Среднюю квадратическую ошибку определения дирекционного угла измеренной стороны примем равной m_{β} , причем $m_{s_0} = m_{s_n}$.

При этом условии члены формулы (27) будут равны (приняв $m_{s_0} = m_{s_n}$):

$$\begin{aligned} [qFF]_{x_{n+1}} &= N \{ 3 [D^2]_n^1 + \omega ((x_n - x_0)^2 + (x_{n+1} - x_n)^2) + \\ &\quad + 4,5 ((y_n - y_0)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2) \}, \\ [qFF]_{y_{n+1}} &= N \{ 3 [D^2]_n^1 + \omega ((y_n - y_0)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2) + \\ &\quad + 4,5 ((x_n - x_0)^2 + (x_{n+1} - x_n)^2) \}, \\ [qAF]_{x_{n+1}}^2 &= N \{ 3 [(x_n - x)]_n^1 + \omega ((x_n - x_0) - (x_{n+1} - x_n)) \}^2, \\ [qAF]_{y_{n+1}}^2 &= N \{ 3 [(y_n - y)]_n^1 + \omega ((y_n - y_0) - (y_{n+1} - y_n)) \}^2, \\ [qAA]_{x_{n+1}} &= [qAA]_{y_{n+1}} = 3(n - 1) + 2\omega, \\ [qBF]_{x_{n+1}}^2 &= N \{ 1,4 [(y_n - y)]_n^1 + 2,1 ((y_n - y_0) + (y_{n+1} - y_n)) \}^2, \\ [qBF]_{y_{n+1}}^2 &= N \{ 1,4 [(x_n - x)]_n^1 + 2,1 ((x_n - x_0) + (x_{n+1} - x_n)) \}^2, \\ [qBB]_{x_{n+1}} &= [qBB]_{y_{n+1}} = \frac{1}{3}(2n + 4). \end{aligned} \quad (29)$$

В этих выражениях, кроме обозначений, принятых ранее:

$N = 5,30 \cdot 10^{-12} \cdot s^2$, $\omega = q\Delta^2$ и

n — число треугольников в ряду.

Если направление оси y совместить с направлением замыкающей ряда, то

$$[qFF]_{y_{n+1}} = [qFF]_{ln+1}, [qFF]_{x_{n+1}} = [qFF]_{un+1} \text{ и т. д.}$$

Для вытянутого ряда получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{ln+1}} &= N \left\{ \frac{2n^3 - 3n^2 + 10n + 2\omega(n^2 + 1) + 56}{8} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{((0,75n + 0,5\omega)(n - 1))^2}{3(n - 1) + 2\omega} - 0,6 \frac{(n - 1)^2}{n + 2} \right\}, \quad (30) \\ \frac{1}{P_{un+1}} &= N \left\{ \frac{2n^3 - 3n^2 + 10n + 12\omega + 9(n^2 + 1)}{8} - \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{1,3(n-1) + 1,75\omega^2}{3(n-1) + 2\omega} - \frac{1,5(0,35n^2 + 0,65n + 1)^2}{n+2} \right\}, \quad (31)$$

где N , ω и n сохраняют те же значения, что и в выражениях (29).

Практическое применение формул (30) и (31), несмотря на их довольно сложный вид, затруднений не вызывает.

Эти формулы получают весьма значительное и при этом естественное упрощение, если условиться о равенстве средних квадратических ошибок (выраженных в относительной мере) измерения углов и сторон ряда и определения их азимутов. При этом условии величина $\omega = q\Delta^2$ становится равной 4,71 и постоянной, независимо от размеров сторон ряда, состоящего из правильных треугольников.

Принимая это во внимание, приведем формулы (30) и (31) к простому виду:

$$\frac{1}{P_{tn+1}} = N \left\{ \frac{n(0,063n^3 + 0,50n^2 + 2,6n + 14) + 14}{n+2} \right\}, \quad (30')$$

$$\frac{1}{P_{un+1}} = N \left\{ \frac{n(0,066n^3 + 0,57n^2 + 0,7n + 2)}{n+2} \right\}, \quad (31')$$

где $N = 5,3 \cdot s^2 \cdot 10^{-12}$, а n — число треугольников ряда, причем s — длина стороны треугольника.

Влияние средних квадратических ошибок измерения крайних сторон ряда и средних квадратических ошибок определения их дирекционных углов на величины m_t и m_u видно из таблицы 1, при составлении которой принято: $s = 2,0$ км; $m_s = \pm 0,020$ м; $m_\alpha = m_\beta = \pm 2''$. Ряд состоит из правильных треугольников, вытянут в одном направлении и уравновешен за условия фигур, сторон и дирекционных углов.

Таблица 1

Число тре- угольн.	$m_{t_{n+1}}$		$m_{u_{n+1}}$		M_{n+1}	
	По ф-ле (3), м*	По ф-ле (30), м	По ф-ле (3), м*	По ф-ле (31), м	По ф-ле (12), м*	По ф-ле (12), м
3	$\pm 0,016$	$\pm 0,042$	$\pm 0,016$	$\pm 0,024$	$\pm 0,023$	$\pm 0,048$
5	29	56	29	42	41	70
7	46	74	46	60	65	95
9	66	92	66	84	93	122
11	87	118	87	108	123	159
13	111	144	110	136	157	194
15	136	168	136	166	192	235

* m_t , m_u и $M(n+1)$ -ой вершины ряда вычислены по отношению первой его вершины (рис. 1).

Ознакомление с этой таблицей приводит нас к выводу о том, что пренебрегать ошибками измерения сторон и определения их азимутов (дирекционных углов) мы не имеем права. Этот вывод, вообще говоря, относится не только к расчету точности величин продольного и поперечного сдвигов ряда или координат его вершин, но и к расчету величин ошибок и других элементов ряда (сторон и дирекционных углов).

Вывод формул для вычисления величин, обратных весам продольного и поперечного сдвигов ряда, в котором, кроме крайних его сторон и определения их дирекционных углов, измерена еще одна связующая сторона и определен ее дирекционный угол, принципиально мало отличается от вывода формул при наличии только двух (крайних) сторон.

Если применительно к рис. 1 дополнительно измерена связующая сторона $s_{m,m+1}$ и определен ее дирекционный угол α_m , то ряд разделится на два звена, которые обозначим соответственно через I и II.

В этом случае, кроме условий фигур, будут иметь место два условных уравнения сторон и два условных уравнения дирекционных углов вида:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0(s_0) + \delta_1(1) - \delta_2(2) + \dots + \delta_{3m-2}(3m-2) - \\ - \delta_{3m-1}(3m-1) - \Delta_m(s_m) + w_{s_1} = 0, \\ \Delta_m(s_m) + \delta_{3m-4}(3m-4) - \delta_{3m-5}(3m-5) + \dots + \\ + \delta_{3n-2}(3n-2) - \delta_{3n-1}(3n-1) - \Delta_n(s_n) + W_{s_{II}} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} \mp(\alpha_0) - (3) + (6) - \dots + (3m) \mp(\alpha_m) + W_{\alpha_I} = 0, \\ \mp(\alpha_m) - (3m-3) + \dots - (3n) \mp(\alpha_n) + W_{\alpha_{II}} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

В уравнениях (32) и (33) приняты те же обозначения, что в (18) и (19).

Весовые функции для данного варианта ряда будут:

$$\begin{aligned} f_{x_{n+1}} = \frac{1}{M 10^6} \left\{ [(x_m - x) \delta_{3i-2}^I(3i-2)]_m^1 - [(x_m - x) \delta_{3i-1}^I(3i-1)]_m^1 + \right. \\ \left. + [(x_n - x) \delta_{3i-2}^{II}(3i-2)]_n^{m+1} - [(x_n - x) \delta_{3i-1}^{II}(3i-1)]_n^{m+1} + \right. \\ \left. + (x_m - x_0) \Delta_0(s_0) + (x_n - x_m) \Delta_m(s_m) + (x_{n+1} - x_n) \Delta_n(s_n) + \right. \\ \left. + [-k(y_m - y) (\mp 3i)^I]_m^1 + [-k(y_n - y) (\mp 3i)^{II}]_n^{m+1} + \right. \quad (34) \\ \left. + (-k(y_m - y_0)(-\alpha_0)) + (-k(y_n - y_m)(-\alpha_m)) + (-k(y_{n+1} - y_n)(-\alpha_n)) \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{y_{n+1}} = \frac{1}{M 10^6} \left\{ [(y_m - y) \delta_{3i-2}^I(3i-2)]_m^1 - [(y_m - y) \delta_{3i-1}^I(3i-1)]_m^1 + \right. \\ \left. + [(y_n - y) \delta_{3i-2}^{II}(3i-2)]_n^{m+1} - [(y_n - y) \delta_{3i-1}^{II}(3i-1)]_n^{m+1} + \right. \\ \left. + (y_m - y_0) \Delta_0(s_0) + (y_n - y_m) \Delta_m(s_m) + (y_{n+1} - y_n) \Delta_n(s_n) + \right. \\ \left. + [k(x_m - x) (\mp 3i)^I]_m^1 + [k(x_n - x) (\mp 3i)^{II}]_n^{m+1} + \right. \\ \left. + k(x_m - x_0)(\alpha_0) + k(x_n - x_m)(\alpha_m) + k(x_{n+1} - x_n)(\alpha_n) \right\}. \quad (34') \end{aligned}$$

Что касается формулы для вычисления величины $\frac{1}{P_\Theta}$, то она будет иметь вид

$$\frac{1}{P_\Theta} = [qFF] - \frac{[qAF]_I^2}{[qAA]_I} - \frac{[qAF]_{II}^2}{[qAA]_{II}} - \frac{[qBF]_I^2}{[qBB]_I} - \frac{[qBF]_{II}^2}{[qBB]_{II}} \quad (35)$$

Сохраняя условия (28) и принимая $m_{x_n} = m_{x_m} = m_{x_n}$ и $\Delta_0 = \Delta_m = \Delta_n$, получим, что члены формулы (35) будут равны:

$$\begin{aligned}
 [qFF]_{t_{n+1}} &= N \{ 3 [D^2]_m^1 + 3 [D^2]_n^{m+1} + \omega ((y_m - y_0)^2 + (y_n - y_m)^2 + \\
 &\quad + (y_{n+1} - y_n)^2) + 4,5 ((x_m - x_0)^2 + (x_n - x_m)^2 + (x_{n+1} - x_n)^2) \}; \\
 [qFF]_{u_{n+1}} &= N \{ 3 [D^2]_m^1 + 3 [D^2]_n^{m+1} + \omega ((x_m - x_0)^2 + (x_n - x_m)^2 + \\
 &\quad + (x_{n+1} - x_n)^2) + 4,5 ((y_m - y_0)^2 + (y_n - y_m)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2) \}; \\
 [qAF]_{t_{n+1}(I)}^2 &= N \{ 3 [(y_m - y)]_m^1 + \omega (y_m - y_0)^2 \}; \\
 [qAF]_{u_{n+1}(I)}^2 &= N \{ 3 [(x_m - x)]_m^1 + \omega (x_m - x_0)^2 \}; \\
 [qAF]_{t_{n+1}(II)}^2 &= N \{ 3 [(y_n - y)]_n^{m+1} + \omega ((y_n - y_m) - (y_{n+1} - y_n))^2 \}; \\
 [qAF]_{u_{n+1}(II)}^2 &= N \{ 3 [(x_n - x)]_n^{m+1} + \omega ((x_n - x_m) - (x_{n+1} - x_n))^2 \}; \\
 [qAA]_{t_{n+1}(I)} &= [qAA]_{u_{n+1}(I)} = 3(n_1 - 1) + 2\omega; \\
 [qAA]_{t_{n+1}(II)} &= [qAA]_{u_{n+1}(II)} = 3(n_2 - 1) + 2\omega; \\
 [qBF]_{t_{n+1}(I)}^2 &= N \{ 1,4 [(x_m - x)]_m^1 + 2,1 (x_m - x_0)^2 \}; \\
 [qBF]_{u_{n+1}(I)}^2 &= N \{ 1,4 [(y_m - y)]_m^1 + 2,1 (y_m - y_0)^2 \}; \\
 [qBF]_{t_{n+1}(II)}^2 &= N \{ 1,4 [(x_n - x)]_n^{m+1} + 2,1 ((x_n - x_m) + (x_{n+1} - x_n))^2 \}; \\
 [qBF]_{u_{n+1}(II)}^2 &= N \{ 1,4 [(y_n - y)]_n^{m+1} + 2,1 ((y_n - y_m) + (y_{n+1} - y_n))^2 \}; \\
 [qBB]_{t_{n+1}(I)} &= [qBB]_{u_{n+1}(I)} = \frac{1}{3} (2n_1 + 4); \\
 [qBB]_{t_{n+1}(II)} &= [qBB]_{u_{n+1}(II)} = \frac{1}{3} (2n_2 + 4).
 \end{aligned} \tag{36}$$

В выражениях (36) приняты те же обозначения, что и в формулах (1), (2), (10), (11) и (29), причем n_1 и n_2 — число треугольников соответственно в первом и во втором звеньях ряда.

Для вытянутого ряда получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{P_{t_{n+1}}} &= N \left\{ \frac{2(n_1^3 + n_2^3) - 3(n_1^2 + n_2^2) + 10(n_1 + n_2) + 2\omega(n_1^2 + n_2^2 + 1) + 56}{8} - \right. \\
 &\quad - \frac{((0,75n_1(n_1 - 1) + 0,7\omega))^2}{3(n_1 - 1) + 2\omega} - \frac{((0,75n_2 + 0,5\omega(n_2 - 1))^2}{3(n_2 - 1) + 2\omega} \\
 &\quad \left. - 0,6 \left(\frac{n_1^2}{n_1 + 2} + \frac{(n_2 - 1)^2}{n_2 + 2} \right) \right\}, \tag{37}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{P_{u_{n+1}}} &= N \left\{ \frac{2(n_1^3 + n_2^3) - 3(n_1^2 + n_2^2) + 10(n_1 + n_2) + 12\omega + 9(n_1^2 + n_2^2 + 1)}{8} - \right. \\
 &\quad - \frac{1,7n_1^2}{3(n_1 - 1) + 2\omega} - \frac{(1,3(n_2 - 1) + 1,75\omega)^2}{3(n_2 - 1) + 2\omega} \\
 &\quad \left. - \frac{1,5(0,35n_1^2 + 0,65n_1)^2}{n_1 + 2} - \frac{1,5(0,35n_2^2 + 0,65n_2 + 1)^2}{n_2 + 2} \right\}. \tag{38}
 \end{aligned}$$

Если принять во внимание условие, согласно которому получены формулы (30¹) и (31¹), то практически с малой потерей точности при вычислениях формулы (37) и (38) могут быть записаны так:

$$\frac{1}{P_{t_{n+1}}} = N \left\{ \frac{n_1 (0,063 n_1^3 + 0,45 n_1^2 + 1,3 n_1 + 2)}{n_1 + 2} + \right. \\ \left. + \frac{n_2 (0,063 n_2^3 + 0,50 n_2^2 + 2,6 n_2 + 14) + 14}{n_2 + 2} \right\}; \quad (37')$$

$$\frac{1}{P_{u_{n+1}}} = N \left\{ \frac{n_1 (0,066 n_1^3 + 0,62 n_1^2 + 1,5 n_1 + 2)}{n_1 + 2} + \right. \\ \left. + \frac{n_2 (0,066 n_2^3 + 0,57 n_2^2 + 0,7 n_2 + 2)}{n_2 + 2} \right\}. \quad (38')$$

Вывод и структура формул для вычисления величин продольного и поперечного сдвигов триангуляционного ряда с дополнительно измененными связующими сторонами и определенными азимутами (дирекционными углами) этих сторон ясны из предыдущего изложения. Написать соответствующие формулы для ряда, в котором имеются, например, три дополнительно измеренных стороны и их дирекционные углы, затруднений не вызовет. Также нетрудно написать эти формулы для различных вариантов учета возникающих в ряду условий.

Переход от $\frac{1}{P_{\theta}}$ к m_{θ} во всех случаях следует производить по формулам (4) и (12).

Анализ и практическое применение предлагаемых в этой статье формул вычисления величин продольного и поперечного сдвигов триангуляционного ряда приводит к следующим основным выводам.

1. Игнорировать ошибки линейных измерений и азимутальных определений при проектировании триангуляционного ряда как геодезического обоснования для производства последующих геодезических и маркшейдерских работ нельзя. Это замечание имеет особое значение для рядов с небольшим количеством треугольников.

2. Приведенные формулы позволяют достаточно быстро и обоснованно решить вопрос о точности не только конечной вершины ряда относительно начальной, но и любой промежуточной вершины ряда относительно любой другой промежуточной его вершины. Эта необходимость возникает довольно часто при строительстве наземных и подземных сооружений и при развитии сетей сгущения, основой для которых являются сети высших классов.

3. Измерение всех связующих сторон ряда или сторон по его диагонали не приводит к желаемым результатам: при резком уменьшении продольного сдвига, поперечный сдвиг остается практически без изменений. Поэтому можно рекомендовать сводить к обоснованному минимуму количество измеряемых связующих сторон ряда, но с обязательным определением их дирекционных углов. Это приводит к значительному уменьшению поперечного сдвига и уменьшению ошибки в положении конечного пункта ряда. Необходимо иметь в виду, что многие специальные геодезические работы, связанные со строительством инженерных сооружений, как раз и требуют наличия возможно меньших величин поперечных сдвигов ряда.

4. Для рядов с количеством треугольников больше девяти-десяти, оптимальным соотношением точностей угловых и линейных измерений, а также и азимутальных определений следует считать примерное равенство их средних квадратических ошибок, выраженных в относительной форме. Для рядов с числом треугольников меньше девяти-десяти зависимость между указанными выше ошибками нужно устанавливать такую, при которой знаменатели дробей, выражающих относительные

ошибки измерения углов (определения азимутов) и измерения сторон, относились бы, примерно, как 1 : 1,5.

В первом случае величина $\omega = q\Delta^2$ (где $q = \frac{m_s^2}{m_\beta^2}$, а Δ — изменение логарифма при изменении длины стороны на 1 мм, в шестом знаке логарифмов), равна 4,7, а во втором — 2,1, независимо от размера стороны проектируемого ряда, состоящего из правильных треугольников или треугольников, близких к ним.

Выполнение этих условий приведет к минимально возможным и, примерно, равным величинам продольного и поперечного сдвигов, и, как следствие, — к максимально возможному уменьшению общего линейного смещения конечного пункта ряда.

Это замечание относится как к ряду, в котором измерены и определены дирекционные углы только двух крайних сторон, так и к ряду с тем или иным количеством дополнительно измеренных сторон с определением их азимутов (дирекционных углов).

5. При известном отступлении от строгости выводов, средние квадратические ошибки исходных (твердых) сторон и их дирекционных углов можно рассматривать как ошибки измеренных величин и вводить их при использовании предлагаемых формул для вычисления величин сдвигов ряда.

Отмечается, что приведенные формулы относятся к рядам, состоящим из правильных треугольников с нечетным их числом. Конечно, для рядов с четным числом треугольников соответствующие формулы будут иметь несколько иной вид. Однако характер влияния ошибок измерения сторон и определения их азимутов (дирекционных углов) будет таким же, как и при нечетном числе треугольников ряда.

III. В заключение статьи помещаем таблицу 2 расчета точности по предлагаемым формулам продольного и поперечного сдвигов звена триангуляции 1 класса, состоящего из равносторонних треугольников и уравновешенного по углам за условия фигур, сторон и дирекционных углов.

При вычислении величин продольной и поперечной ошибок принято: $n = 19$; $s = 20$ км; $m_\beta = \pm 0,7$ и $m_s : s = 1 : 300\,000$.

Что касается величин средней квадратической ошибки определения азимутов (дирекционных углов) измеренных сторон, то их можно принять равными m_β . Это следует из того, что средняя квадратическая ошибка определения азимута Лапласа, вычисляемая по формуле

$$m_A = \pm \sqrt{m_\alpha^2 + m_\lambda^2 \sin^2 \varphi},$$

приводит к ее значению, равному, примерно, для средних широт — $\pm 0,7$.

Таблица 2

	С учетом средних квадратических ошибок					
	m_β	$m_\beta; m_s$ и m_α двух крайних сторон	$m_\beta; m_s$ и m_α двух крайних и одной средн. стор.	$m_\beta; m_s$ и m_α двух крайних и двух средн. стор.	m_β и m_s всех сторон по диагонали*	m_β и m_s всех связанных сторон*
	1	2	3	4	5	6
m_t	$\pm 0,68$ м	$\pm 0,79$ м	$\pm 0,46$ м	$\pm 0,36$ м	$\pm 0,27$	$\pm 0,20$ м
m_u	$\pm 0,68$	$\pm 0,79$	$\pm 0,46$	$\pm 0,35$	$\pm 0,71$	$\pm 0,74$
M	$\pm 0,97$	$\pm 1,12$	$\pm 0,65$	$\pm 0,50$	$\pm 0,76$	$\pm 0,77$

* Вычисления произведены по формулам, предложенным К. А. Лапингом [2, 3].

Согласно «Инструкции о построении государственной геодезической сети Союза ССР» 1961 г., средние квадратические ошибки выходных сторон звеньев триангуляции 1 класса не должны превышать 1 : 400 000. Если учесть это требование инструкции, то величины поперечных сдвигов звена, указанные в столбцах 2, 3 и 4 таблицы 2, практически не изменятся, а величины продольных сдвигов уменьшатся, примерно, на 8—10%. Это, в свою очередь, не приведет к ощутимому уменьшению величины общего смещения крайней вершины звена (вместо, например, $\pm 1,12$ получим $\pm 1,06$).

Приведенные в этой статье соображения о действии ошибок изменений в триангуляционном ряду и рекомендации учета этих ошибок, подкрепленные данными таблицы 2, дают основание думать, что они могут найти практическое применение и при построении звеньев триангуляции 1 класса. Конечно, предлагаемые формулы не учитывают влияния всех тех факторов, которые формируют величины продольного и поперечного сдвигов ряда 1 класса, но тем не менее, факторы, учтенные при выводе соответствующих формул, играют значительную роль в образовании величин продольного и поперечного сдвигов звена.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. И. Ефимов. О продольном и поперечном сдвигах триангуляционного ряда. Респ. межвед. научно-техн. сборник «Разработка месторождений полезных ископаемых», вып. № 3, изд-во «Техника», 1965.
2. К. А. Лапинг. Светодальномерные измерения в геодезии. Бюллетень научно-технической информации НИИВТС № 7, 1956.
3. К. А. Лапинг. О точности построения рядов с измеренными сторонами и углами. «Геодезия и картография», № 4, 1957.

Работа поступила
5 апреля 1965 г.