М. И. МАРЫЧ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОТКЛОНЕНИЙ ОТВЕСА НА ФИЗИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

Формулы, определяющие отклонения отвеса на физической поверхности Земли, получают с помощью возмущающего потенциала, найденного для точек этой же поверхности и граничного условия, составленного для возмущающего потенциала [1, 3]. Рассматривая эти формулы, Н. К. Мигаль обратил внимание на весьма большое значение члена, являющегося произведением вертикального градиента возмущающего потенциала на тангенс угла наклона физической поверхности Земли. Им также были высказаны сомнения относительно правильности полученных в работах [1, 3] значений возмущающего потенциала. Эти замечания, сообщенные нам в личной беседе Н. К. Мигалем, явились поводом дальнейших исследований упомянутых формул. В работе [2] нами уже было показано, что некоторые малые величины третьего порядка, отброшенные при нахождении возмущающего потенциала, дают большую ошибку в отклонении отвеса. В настоящей статье несколько конкретизируется сделанное замечание и более наглядно показано его значение при решении задачи определения отклонений отвеса в точках физической поверхности Земли. Мы ставим также своей целью уменьшить роль нормального гравитационного поля в теории М. С. Молоденского до той, которую она играет в теории Стокса.

Составляющую отклонения отвеса в плоскости меридиана находят по формуле [1, 3]:

$$\xi = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{dT}{\rho dB} - \frac{\partial T}{\partial H}\frac{dH}{\rho dB} - H\frac{\partial\gamma}{\rho\,\partial B}\right), \tag{1}$$

где γ — нормальная сила тяжести, $\rho = a + H$ — радиус-вектор рассматриваемой точки (a — средний радиус Земли), B — геодезическая широта. Величину $\frac{dT}{dB}$ получают путем дифференцирования возмущающего потенциала

$$T = T_0 + T_1 + \ldots, \tag{2}$$

где

$$T_0 = \frac{a}{4\pi}\int \delta g_0\,[s(\psi) - 1]\,d\sigma, \tag{3}$$

$$T_1 = \frac{a}{4\pi}\int \delta g_1\,[s(\psi) - 1]\,d\sigma, \tag{4}$$

$$\delta g_0 = g - \gamma - \frac{2(W_0 - U_0)}{a}, \tag{5}$$

$$\delta g_1 = \frac{1}{a}\int \chi_0 \frac{H - H_0}{r^3}\, d\sigma, \tag{6}$$

$$\chi_0 = \frac{\delta g_0}{2\pi} + \frac{3}{4\pi a} T_0. \tag{7}$$

Здесь приняты обозначения: g — измеренные значения силы тяжести, $d\sigma$ — элемент поверхности сферы единичного радиуса, $s(\psi)$ — функция Стокса, W_0 — значение потенциала силы тяжести на геоиде, U_0 — значение потенциала нормальной силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида, $r = 2\sin\frac{\psi}{2}$, H_0 — высота рельефа Земли в данной точке. Величину $\frac{\partial T}{\partial H}$ находят из граничного условия

$$\frac{dT}{dH} + \frac{2T}{\rho} = -\delta g_0; \tag{8}$$

Выполним преобразование приведенных формул, следуя Л. П. Пеллинену [5]. При этом воспользуемся приемом М. С. Молоденского и др. [4] выделения из функции δg_1 поправки в аномалию силы тяжести при ее аналитическом продолжении на поверхность сферы радиуса a. Итак, принимая во внимание известную формулу

$$\frac{1}{2\pi a}\int \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r^3} d\sigma = \frac{d\Delta g}{dH} + \frac{2\,\Delta g}{a}$$

и соотношение (7), можем без нарушения требуемой точности записать функцию (6) в виде

$$\delta g_1 = \delta g_1' + \delta g_1'',$$

где

$$\delta g_1' = -\frac{H}{a}\int \frac{\chi_0 - \chi_0^{(0)}}{r_3}\, d\sigma = -H\frac{d\Delta g}{dH},$$

$$\delta g_1'' = \frac{1}{a}\int \frac{H\chi_0 - H_0\chi_0^{(0)}}{r^3}\, d\sigma,$$

$\chi_0^{(0)}$ — значение χ_0 в данной точке, Δg — аномалия силы тяжести. Разлагая подынтегральное выражение в ряд сферических функций, после соответствующих преобразований находим

$$\delta g_1'' = -\frac{2\pi}{a}\sum_{n=0}^{\infty} n\,[H\chi_0]_n$$

где

$$\sum_{n=0}^{\infty} [H\chi_0]_n = H\chi_0.$$

Теперь легко привести формулу (2) к виду

$$T = T_{\text{г}} - 2\pi\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n-1}[H\chi_0]_n + \ldots, \tag{9}$$

где

$$T_{\text{г}} = \frac{a}{4\pi}\int\left(\delta g_0 - H\frac{d\Delta g}{dH}\right)[s(\psi) - 1]\, d\sigma. \tag{10}$$

Последнее выражение можно рассматривать как значение возмущающего потенциала на поверхности сферы радиуса a, полученное путем аналитического продолжения.

Известно, что отклонение отвеса не должно зависеть от наклона физической поверхности Земли в данной точке. Выясним, удовлетворяют ли этому требованию формулы Молоденского (1—8). Для этого найдем значение производной $\frac{dT}{dB}$ от функции (9)

$$T[B,\ H(B)] = T_{\text{г}}(B) - 2\pi H(B)\chi_0[B,\ H(B)] + $$
$$+ 2\pi\sum_{n=0}^{1}[H\chi_0]_n - 2\pi\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[H\chi_0]_n}{n-1}, \tag{11}$$

в которой для удобства записи указана зависимость только от широты точки. Так как гармоники $[H\chi_0]_n$ являются малыми величинами третьего порядка, то их производные могут достигать второго порядка малости лишь при больших значениях n. Поэтому последними двумя членами формулы (11) можно пренебречь. Итак, используя (11) и учитывая, что

$$\frac{dT}{dB} = \frac{\partial T}{\partial B} + \frac{\partial T}{\partial H}\frac{dH}{dB},$$

получаем

$$\frac{dT}{dB} = \frac{\partial T_{\text{г}}}{\partial B} - 2\pi H\frac{\partial\chi_0}{\partial B} - 2\pi\left(\chi_0 + H\frac{\partial\chi_0}{\partial H}\right)\frac{dH}{dB}.$$

Подставляя это выражение в формулу (1) и принимая во внимание соотношения (7) и (8), находим

$$\xi = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{\partial T_{\text{г}}}{\rho\,\partial B} - H\frac{\partial g}{\rho\,\partial B} + \left(\frac{T_0}{2a} - H\frac{d\Delta g}{dH}\right)\frac{dH}{\rho\,dB}\right]. \tag{12}$$

Примечательно, что в этой формуле нет уже поправки за кривизну силовой линии нормального поля. Вместо нее здесь в явном виде появилась поправка за кривизну силовой линии реального гравитационного поля. Отметим также, что правая часть формулы (12) зависит от наклона физической поверхности Земли в данной точке, поскольку выражение в круглых скобках не равно нулю. Это свидетельствует о том, что формулы (1—8) не удовлетворяют выше упомянутому требованию.

Попытаемся ввести исправления в формулу (12). С этой целью рассмотрим значение возмущающего потенциала T' на физической поверхности Земли, которое можно получить методом Молоденского, но с сохранением всех величин третьего порядка малости, содержащих высоту H в первой степени. При обозначениях, принятых для (2—7), T' имеет вид:

$$T' = T - \frac{H}{2a}T_0 + \Delta T,$$

где

$$\Delta T = -\frac{1}{2}\int\frac{H\chi_0}{r}d\sigma + \frac{a}{4\pi}\int\Delta\delta g_1\,[s(\psi) - 1]\,d\sigma,$$

$$\Delta\delta g_1 = -\frac{3}{4a}\int\frac{\chi_0(H - H_0)}{r}d\sigma + \frac{2(W_0 - U_0)}{a^2}H.$$

Если каждый член выражения для ΔT разложить в ряд сферических функций, то легко видеть, что ими можно также пренебречь, как это уже было сделано с последними членами формулы (11). Таким образом, вместо (2) или (9) можно написать

$$T' = T - \frac{H}{2a} T_0. \qquad (13)$$

Последний член в (13), являющийся малой величиной третьего порядка, появился потому, что в выражении для $\overline{r^2}$ (см. [3], формула V·15·16), которое использовано при выводе формулы (13), удержана малая величина третьего порядка, содержащая H_0 в первой степени. Такого вида члены, как показано в работе [2], необходимо сохранять. Теперь формула (1), с учетом (13) и (8), дает

$$\xi = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial T_г}{\rho \partial B} - H \frac{\partial g}{\rho \partial B} - H \frac{d \Delta g}{dH} \frac{dH}{\rho dB} \right). \qquad (14)$$

Здесь так же, как и в (12), величина, зависящая от наклона физической поверхности Земли в данной точке, не является пренебрегаемо малой. Таким образом, два первых приближения для возмущающего потенциала не компенсируют явно фигурирующую в формуле (1) зависимость от наклона рельефа Земли. Следовательно, при использовании выражения (2) для вычислений отклонений отвеса не достаточно иметь только два первых приближения.

Покажем, что сумма двух первых приближений возмущающего потенциала в теории Молоденского представляет собой ни что иное как аналитическое продолжение названного потенциала, осуществляемое путем разложения в ряд Тейлора.

Подставим в формулу (13) вместо χ_0 его значение (7) и, принимая во внимание (11), находим

$$T' = T_г - \left(\delta g_0 + \frac{2T_0}{a} \right) H + \cdots$$

Учитывая (8), получаем

$$T' = T_г + \frac{dT}{dH} H + \cdots$$

Итак, формула (13) представляет собой сумму только первых двух членов ряда Тейлора. Посмотрим к чему мы придем, если в названном разложении возмущающего потенциала сохраним три члена, а именно

$$T' = T_г + \frac{dT}{dH} H - \frac{1}{2} \frac{d^2 T}{dH^2} H^2 + \cdots$$

В этом случае формула (14) принимает вид

$$\xi = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial T_г}{\rho \partial B} - H \frac{\partial g}{\rho \partial B} \right). \qquad (15)$$

Следовательно, мы уже избавились от опасного члена $-\frac{H}{\gamma} \frac{d \Delta g}{dH} \frac{dH}{\rho dB}$ формулы (14) и тем самым достигли независимости отклонения отвеса от наклона рельефа в данной точке.

Формулу (15) в развернутом виде можно записать так:

$$\xi = \frac{1}{4\pi\gamma} \int (g_г - \gamma_0) \frac{ds(\psi)}{d\psi} \cos A \, d\sigma - \frac{H}{\gamma} \frac{\partial g}{a \partial B}.$$

Здесь

$$g_г = g - \frac{dg}{dH} H,$$

γ_0 — ускорение нормальной силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида, A — азимут направления из исследуемой точки на текущую точку интегрирования.

Таким образом, мы пришли к результату, ранее полученному Н. К. Мигалем и опубликованному в настоящем сборнике.

Полный возмущающий потенциал с учетом всех приближений Молоденского можно записать так

$$T = T_г - \left(\delta g_0 + \frac{2T_0}{a}\right) H + R.$$

Или, обозначая $T_г - \frac{2T_0}{a} H + R$ через δT, запишем

$$T = -\delta g_0 H + \delta T. \tag{16}$$

Определим δT. С этой целью найдем правую часть равенства

$$\frac{\partial T}{\partial H} = \left(\frac{dT}{aB} - \frac{\partial T}{\partial B}\right)\left(\frac{dH}{dB}\right)^{-1}.$$

На основании (16) имеем

$$\frac{dT}{dB} = -\left(\frac{\partial \delta g_0}{\partial B} + \frac{\partial \delta g_0}{\partial H}\frac{dH}{dB}\right) H - \delta g_0 \frac{dH}{dB} + \frac{\partial \delta T}{\partial B} + \frac{\partial \delta T}{\partial H}\frac{dH}{dB}$$

и

$$\frac{\partial T}{\partial B} = -\frac{\partial \delta g_0}{\partial B} H + \frac{\partial \delta T}{\partial B}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial H} = -\delta g_0 - \frac{\partial \delta g_0}{\partial H} H + \frac{\partial \delta T}{\partial H}.$$

Сопоставляя полученный результат с граничным условием (8), получаем

$$\frac{2T}{\rho} = \frac{\partial \delta g_0}{\partial H} H - \frac{\partial \delta T}{\partial H}.$$

Отсюда

$$\delta T = \int \left(\frac{\partial \delta g_0}{\partial H} H - \frac{2T}{\rho}\right) dH.$$

Выполнив интегрирование по частям и подставив сюда значения производных от δg_0 по H, полученные путем дифференцирования формулы (8), находим

$$\delta T = -\frac{2T}{\rho} H - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial H^2} H^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 T}{\partial H^3} H^3 - \cdots + T_г^1,$$

где $T_г^1$ — постоянная интегрирования, не зависящая от H. После подстановки δT в (16) получаем разложение возмущающего потенциала в ряд Тейлора по степеням высоты рельефа Земли.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Бровар, В. А. Магницкий, Б. П. Шимберев. Теория фигуры Земли. Геодезиздат, 1961.
2. М. И. Марыч. По поводу вычислений отклонений отвеса. Республиканский межведомственный научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 1. Изд-во Львовского университета, 1964.
3. М. С. Молоденский, В. Ф. Еремеев, М. И. Юркина. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Труды ЦНИИГАиК, вып. 131, Геодезиздат, М., 1960.
4. М. С. Молоденский, В. Ф. Еремеев, М. И. Юркина. Оценка точности ряда Стокса и некоторые попытки уточнения его теории. Труды ЦНИИГАиК, вып. 145, Геодезиздат, 1962.
5. Л. П. Пеллинен. Влияние топографических масс на вывод характеристик гравитационного поля Земли. Труды ЦНИИГАиК, вып. 145, Геодезиздат, 1962.

Работа поступила
8 мая 1965 г.